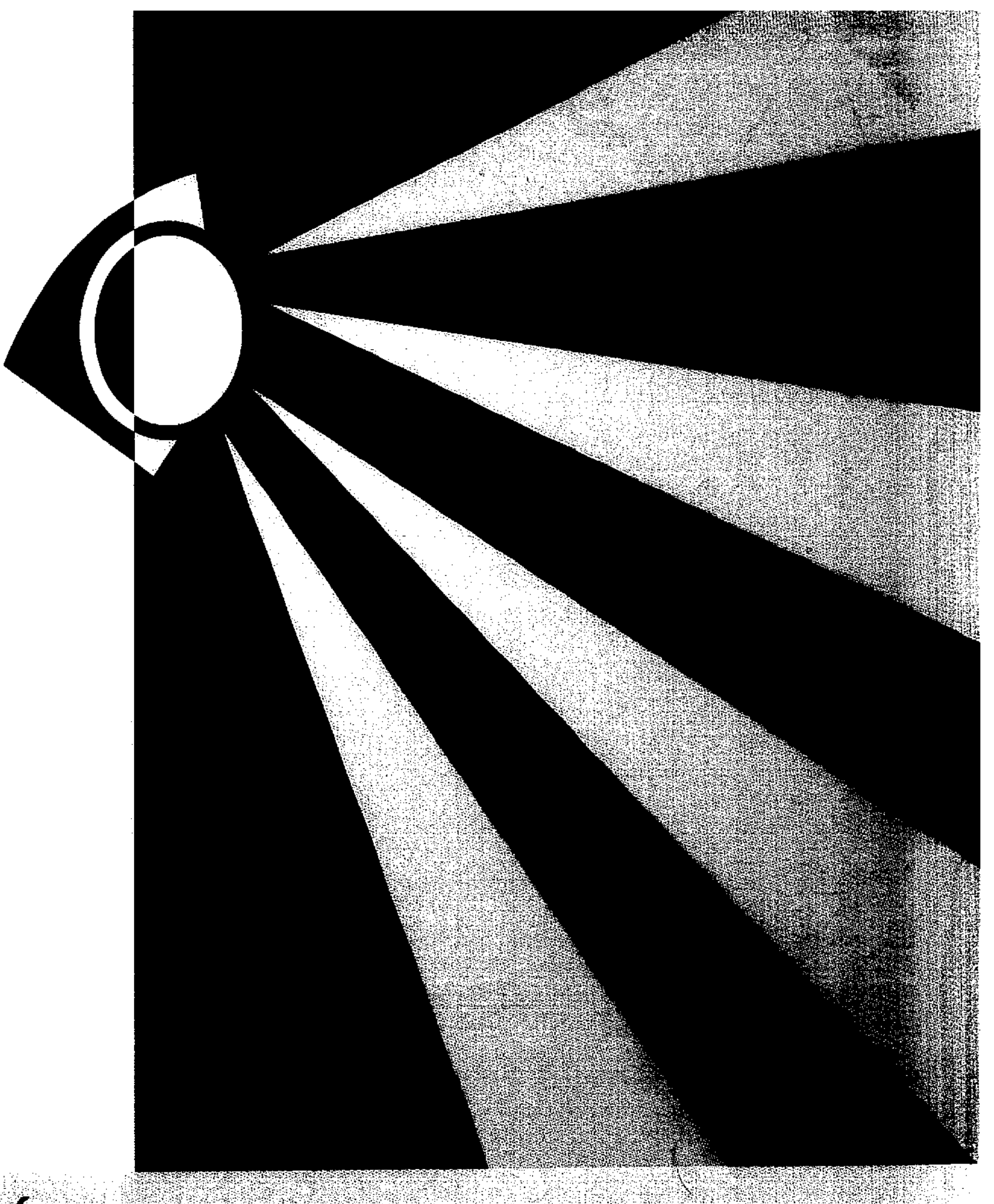


ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES

Damian Craiem
Ricardo L. Armentano

Análisis de Sistemas Lineales

Damian Craiem
Ingeniero Electrónico
Doctor de la Universidad de Buenos Aires

Ricardo Armentano
Ingeniero Electrónico
Doctor Universidad Paris VII Denis Diderot

Consulte nuestra página Web: www.ceit.frba.utn.edu.ar/servicios/editorial
Donde encontrara información de otros libros editados por Editorial-CEIT

Craiem, Damián Oscar
Análisis de sistemas lineales / Damián Oscar Craiem y Ricardo Armentano. - 3a ed. - Buenos Aires : Centro de Estudiantes de Ingeniería Tecnológica - CEIT, 2011.
568 p. ; 28x21 cm.

ISBN 978-987-1063-82-6

1. Informática. I. Armentano, Ricardo II. Título.
CDD 005.3

Fecha de catalogación: 12/09/2011

Diseño de Tapa:

Queda hecho el depósito que previene la Ley 11.723

Impreso en Argentina.

Prólogo

Estimado lector:

En sus manos se encuentra la tercera edición del libro de cátedra de la materia **Análisis de Señales y Sistemas** que se dicta desde el año 1995 en la carrera de Ingeniería Electrónica de la Universidad tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires. Este libro resume la experiencia de todos estos años como profesor. Abarca la teoría de variable compleja y su aplicación al análisis de sistemas lineales continuos y discretos. Cada capítulo está pensado para introducir los temas de manera directa y sencilla, con ejemplos desarrollados para tal fin. Cada capítulo finaliza con una guía de problemas, muchos de los cuales tienen respuesta. También, se adjuntan pequeñas rutinas en Matlab© para permitirle al alumno aplicar los contenidos y resolverlos con la computadora.

El libro se divide conceptualmente en 3 partes. La parte I comienza con 2 capítulos dedicados a introducir conceptos de señales y sistemas lineales. Se presenta la modelización de sistemas a través de ecuaciones diferenciales y se plantean modelos de analogías entre sistemas físicos. También se discute el concepto de respuesta al impulso de un sistema y la operación de convolución. Estas primeras herramientas buscan motivar al lector para que comience a comprender los desafíos que se plantean al intentar analizar la respuesta temporal de un sistema. Allí quedarán en evidencia las limitaciones del análisis en el tiempo y la necesidad de contar con herramientas más sofisticados. La parte II incluye teoría de variable compleja, desde la definición de números complejos y funciones, pasando por integración y series, para llegar a la teoría de residuos. En la parte III se describe la teoría de Fourier y Laplace, introduciendo nuevas herramientas de análisis más poderosas. Se presentan los conceptos de espectro y respuesta en frecuencia de un sistema, así como la transferencia y los diagramas de polos y ceros. Los sistemas discretos de encaran utilizando la Transformada Discreta de Fourier y la Transformada Z. En un capítulo intermedio se unen los dominios discretos y continuos a través del teorema del muestreo. Llegando al final se encuentra un capítulo complementario dedicado al diseño de filtros digitales. El libro cuenta con 3 apéndices, dedicados a la teoría de números complejos, la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias a coeficientes constantes y al algoritmo de transformada de Fourier rápido (FFT).

El objetivo del presente texto es ambicioso. En primera instancia busca conformar una recopilación teórica de las bases fundamentales para la introducción al análisis de sistemas lineales desde una perspectiva práctica e ingenieril, incluyendo toda la teoría de variable

compleja indispensable para comprender estos temas. Además, intenta despertar el interés y entusiasmo del lector por el procesamiento de señales y el análisis de sistemas, que forman parte central del esqueleto de la carrera de ingeniería. El texto permanentemente remite a ejemplos prácticos, donde el lector pueda verificar la teoría con ejercicios analíticos y resoluciones numéricas.

En este texto intento plasmar mi experiencia como profesor de la materia desde el año 1997, mi formación como ingeniero electrónico, y finalmente mi visión como ex-alumno. Es mi deseo que los lectores encuentren un lenguaje amigable y un enfoque concreto y práctico que lo acompañe a lo largo de este aprendizaje.

Agradezco especialmente la colaboración del Dr. Ricardo Armentano, director de la cátedra, que me ha guiado y aconsejado con su experiencia a lo largo de estos años para el desarrollo de este proyecto. Gracias también a mis colegas y profesores de la cátedra, que junto a alumnos de la FRBA y de la Universidad Favaloro colaboraron con sugerencias y correcciones. Deseo agradeces especialmente a Leandro Cymberknop que ha colaborado especialmente en la resolución de los problemas y en la confección de las aplicaciones de Matlab© . Finalmente, agradezco a mis seres queridos sin los cuales ninguna de estas aventuras tendrían sentido.

Dr. Damian Craiem
damian@craiem.com.ar

Capítulo 1

Señales continuas y discretas

1.1. Introducción

Para el análisis y diseño de sistemas, continuos o discretos, es indispensable conocer las características de las señales con las que operan. Los sistemas más sencillos para comenzar a modelizar son los físicos, cuyas leyes son fácilmente incorporadas en los primeros años de las carreras de ingeniería. La infinidad de sistemas físicos, sumado a las posibilidades computacionales actuales, generan que la clasificación de señales en grupos identificables sea indispensable. Debemos comenzar a operar matemáticamente sobre las *funciones* que conformarán las señales de entrada y salida de nuestros sistemas. Algunas de esas funciones serán definidas en el campo real y otras en el campo complejo. Para la comprensión adecuada del capítulo se recomienda al lector consultar el apéndice A donde se hallan los conceptos algebraicos básicos de los números complejos.

1.2. Definición y clasificación de señales

Las señales son magnitudes físicas mediante las que se puede transmitir información. En los fenómenos físicos las señales son muy simples de identificar. Citemos algunos ejemplos. El movimiento mecánico de compresión del aire permite a las ondas sonoras viajar, y la magnitud de este movimiento en función del tiempo puede considerarse una señal de audio que utilizamos habitualmente para comunicarnos. La radio, la televisión y el teléfono celular utilizan señales de origen electromagnético para ser transmitidas. Un semáforo que periódicamente sigue una secuencia lumínica transmite información al transeúnte y al automovilista, y esta secuencia puede considerarse una señal. Un automóvil recibe una señal mecánica desde el suelo que obliga al sistema de amortiguamiento a reaccionar. Un motor produce una cupla sobre una carga para hacerla girar, esa cupla es una señal, así como lo es la velocidad de la carga. Al excitar un componente electrónico, y desde el punto de vista térmico, se aplica una potencia que genera una temperatura interna determinada; ambas en función del tiempo son señales. En un fluido que se desplaza por un tubo se pueden interpretar señales de flujo y velocidad.

Intuitivamente, para procesar, registrar y actuar en base a una señal originada desde cualquier fuente de energía, es necesario que la misma sea traducida a una señal eléctrica proporcional. Es así que, mediante el uso de sensores (transductores), se pueden obtener señales eléctricas proporcionales a valores de temperatura, presión, velocidad de un fluido o del viento, intensidad de luz, etc. La tecnología actual nos permite operar fácilmente con las señales eléctricas y más aun, nos permite ingresarlas dentro de una computadora.

Una señal estará asociada, matemáticamente, a una función con una o más variables independientes. Una señal de audio tendrá una amplitud para cada instante de tiempo t. Esta señal posee al tiempo t como única variable independiente. La amplitud del sonido es la variable dependiente $x(t)$. Como tanto t como $x(t)$ pueden adoptar cualquier valor dentro de los $I\!R$, se define a $x(t)$ como una **señal analógica**. Como ya mencionamos, podemos utilizar un transductor que convierta la señal de audio (mecánica) en una señal eléctrica. Esta última será también analógica.

Es cierto también que se pueden pensar sistemas que no involucren señales eléctricas y estén basados, por ejemplo, en señales puramente mecánicas como en el caso de un reloj antiguo o sistemas de control hidráulico. En el caso de los sistemas presentados en el texto, se reforzarán aquellos cuyas señales puedan ser incorporados en una computadora para su procesamiento a través de sensores.

Si se estudia la evolución demográfica de una ciudad cada año, o la cantidad de litros de sangre donados en un hospital por mes, la variable independiente es ahora discreta. Será, para el primer caso, los números de años, y para el segundo, la sucesión de meses. Estas dos señales son denominadas **discretas**, a pesar que la primera tiene como variable dependiente un número de personas entero, y la segunda tiene la cantidad de litros que, como variable, es continua.

Hasta el momento entonces definimos señales analógicas, para las cuales la variable independiente es continua (tiempo), y señales discretas, para los cuales su variable independiente es discreta (número de muestra). En ambos casos la amplitud es continua. Una señal discreta se puede enumerar de la siguiente forma: $x[n] = \{12, 15, 17, 11, 5, 0, -1, \dots\}$.

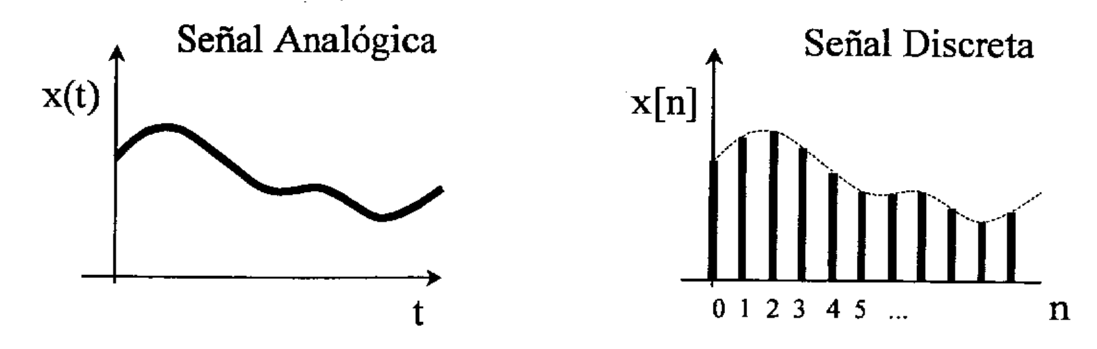


Figura 1.1: Ejemplos de señales.

Para ingresar una señal analógica dentro de una computadora es necesario realizar dos procesos previos. En la computadora las señales almacenadas deben ser discretas: una sucesión de valores que a partir de ahora denominaremos *muestras*. Adicionalmente, cada

uno de estos valores (la amplitud de cada muestra) se debe almacenar en una memoria como un número binario. De esta forma la amplitud debe ser discreta también. Partiendo de la señal analógica, debemos primero *cuantificar* su amplitud en valores discretos. De esta forma obtenemos una señal de variable independiente continua y de amplitud discreta denominada **cuantificada** (Figura 1.2). Luego se debe discretizar la variable independiente. Este proceso se denomina *muestreo*. Un muestreo uniforme se define como aquel donde la amplitud de la señal cuantificada se evalúa secuencialmente cada T_s segundos, siendo T_s una constante. Ese valor adquirido se almacena como una muestra. La señal resultante se denomina **digital**(Figura 1.2). Una ejemplo muy sencillo de una señal digital podría ser una colección de 100 números en una columna de una plantilla como el Excel©. Cada una de las filas constituiría el tiempo discretizado y los valores, que podrían ser enteros o fraccionales, constituirían las muestras.

Uno de los elementos encargados de cuantificar y muestrear una señal eléctrica analógica para obtener una señal digital, es el denominado conversor A/D (analógico/digital).

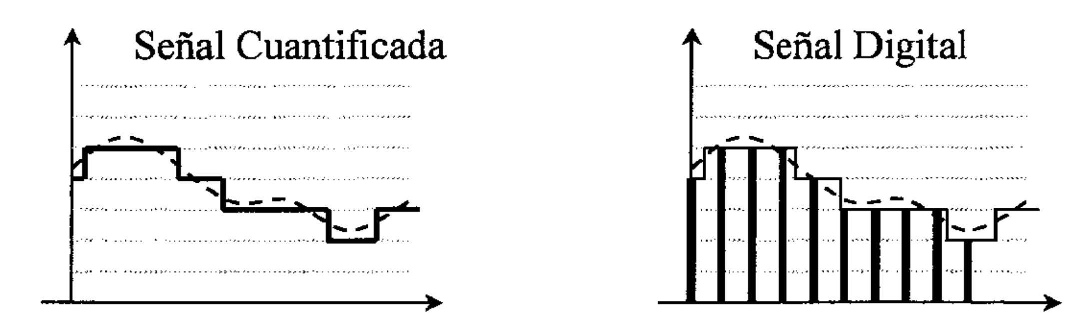


Figura 1.2: Ejemplos de señales.

A lo largo del texto utilizaremos la siguiente nomenclatura. Como las *señales* estarán siempre asociadas a *funciones*, las denominaremos indistintamente *señales o funciones*. Para funciones continuas utilizaremos los paréntesis y la variable independiente t: $x(t)$. Para señales discretas utilizaremos los corchetes y la variable n: $x[n]$. En general trabajaremos con señales analógicas o discretas, donde las amplitudes son continuas (números reales). Los problemas de cuantificación exceden los alcances de este libro, aunque se discutirán en el capítulo de muestreo.

1.3. Señales Continuas

Comencemos nuestra descripción de las señales continuas más comunes.

1.3.1. Periódicas

Las señales periódicas poseen propiedades que deben ser comprendidas claramente, a pesar de ser señales que difícilmente provengan de fenómenos físicos. Estas señales se repiten en el tiempo y por lo tanto, en proporción a otras señales, poseen escasa información. Las

mismas son fácilmente reproducibles por generadores y serán utilizadas para evaluar a los sistemas en múltiples circunstancias.

Definición 1.3.1 *Una señal periódica $x(t)$ es aquella que satisface la siguiente condición:*

$$x(t) = x(t - T_0) = x(t - nT_0) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.1}$$

siendo $T_0 > 0$ una constante denominada **periodo**. *Esto puede describirse como una señal que se repite cada T_0 segundos.*

Una señal que no es periódica se denomina aperiódica.

Un ejemplo de una señal periódica típica es una función senoidal $x(t) = A.sen(\omega_0 t + \theta)$, donde A es la amplitud, ω_0 es la frecuencia angular medida en rad/s y θ es la fase medida en radianes. La señal senoidal continua es siempre periódica con periodo:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \Longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Es evidente que si una señal es periódica con periodo T_0 segundos, también lo es para $2T_0, 3T_0, 4T_0 \ldots$ segundos. Además vemos que a medida que aumenta el periodo T_0 de una señal, disminuye su frecuencia angular ω_0 y si disminuimos el periodo, la frecuencia angular aumenta. De esta forma asociaremos a señales de *alta frecuencia* como señales temporales de variaciones *rápidas* y a las señales de *baja frecuencia* como señales de oscilaciones *lentas*.

A la inversa del periodo se la denomina *frecuencia* y su unidad es $Hertz$:$[Hz] = [1/s]$.

$$f_0 = \frac{1}{T_0}[Hz]$$

Su relación con la frecuencia angular es inmediata:

$$\omega_0[rad/s] = 2\pi f_0[Hz]$$

Las exponenciales complejas

A continuación se presenta la primera señal de variable compleja. Es natural preguntarse por qué utilizar señales complejas en la práctica. Las razones se irán descubriendo a lo largo del libro pero inicialmente mencionaremos que este tipo de representación matemática permitirá un análisis avanzado que no sería posible de otra forma.

Así como una función real posee en su dominio y en su imagen valores reales, una función compleja puede poseer valores complejos en alguno en ambos. Como ejemplo inicial de una señal compleja cuyo dominio es un número real y su imagen uno complejo, de define a la exponencial compleja continua como

$$x(t) = e^{i\omega_0 t}$$

Donde t es la variable independiente real e i la unidad imaginaria ($i^2 = -1$). La utilización de la constante ω_0 sugiere inicialmente su periodicidad. De esta forma para cada valor de t, la función $x(t)$ será un número complejo de módulo unitario y fase $\omega_0 t$. Para analizar a $x(t)$ presentemos una relación de extrema importancia que emplearemos comúnmente, denominada **relación de Euler**:

$$\boxed{e^{it} = cos(t) + i.sen(t)} \tag{1.2}$$

Esta igualdad permite separar la parte real e imaginaria de la exponencial compleja. Intuitivamente, y utilizando la descripción geométrica presentada en el apéndice A, puede observarse que la parte real de e^{it} es la proyección del versor (vector unitario) sobre el eje real $cos(t)$ y la parte imaginaria la proyección sobre el eje imaginario $sen(t)$. Sin embargo, para una demostración más general se procede a la utilización de series geométricas.

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Para demostrar esta relación se utilizará la descomposición en series de Taylor de cada una de las funciones intervinientes en 1.2:

$$\begin{aligned}
e^t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + \dots \qquad \forall t \\
cos(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} + \dots \qquad \forall t \\
sen(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots \qquad \forall t
\end{aligned}$$

Si ahora deseamos expandir e^{it}, reemplazamos t por $i.t$ en el primer desarrollo y recordamos que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ y así sucesivamente (comenzando desde i^0 las potencias de la unidad imaginaria son $1, i, -1, -i, 1, i, \dots$)

$$e^{i.t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i.t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n.t^n}{n!} = 1 + i.t - \frac{t^2}{2} - i\frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + \dots \qquad \forall t$$

finalmente necesitamos el desarrollo de $i.sen(t)$ que es simplemente

$$i.sen(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i.t^{2n+1}}{(2n+1)!} = i.t - i\frac{t^3}{6} + i\frac{t^5}{120} - \dots \qquad \forall t$$

De esta forma puede verificarse la relación de *Euler* sumando término a término los desarrollos del seno y el coseno.

($\Longleftarrow$)

Un número complejo en su forma exponencial $\rho.e^{i\varphi}$ puede representarse en un plano para cada valor de ρ (módulo) y de φ (fase). Se utiliza para este fin el *plano complejo* donde el eje horizontal será siempre el eje real x, y el vertical será el eje imaginario y. De esta forma, y por la relación de *Euler* (1.2), podemos descomponer a $\rho.e^{i\varphi}$ en su parte real e imaginaria:

$$\rho.e^{i\varphi} = \underbrace{\rho.cos(\varphi)}_{real} + i.\underbrace{\rho.sen(\varphi)}_{imaginaria}$$

Veamos el gráfico:

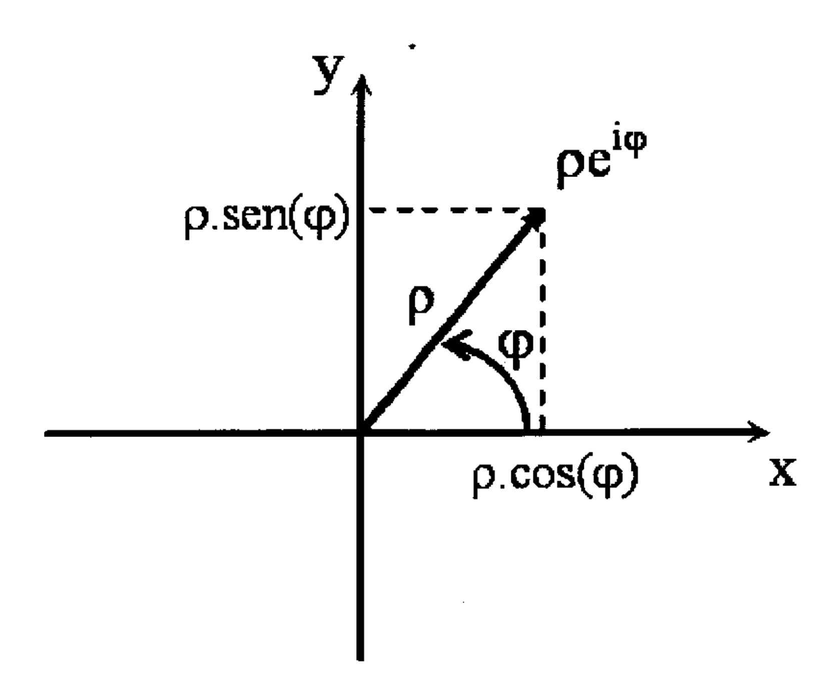


Figura 1.3: Representación exponencial en el plano complejo.

Podemos destacar algunos puntos del plano importantes. Por ejemplo $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{-i\pi} = -i$. Es evidente además que $e^{i2k\pi} = 1$ cuandi $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Esto ya sugiere la periodicidad buscada, además de observar que tanto la parte real como la imaginaria son funciones trigonométricas periódicas.

Veamos qué sucede entonces con la periodicidad de la exponencial compleja $x(t) = e^{i\omega_0 t}$. Para verificarla utilizamos la definición 1.1:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t - T_0) \\ e^{i\omega_0 t} &= e^{i\omega_0 (t - T_0)} = e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega_0 T_0} \end{aligned}$$

por lo tanto se debe cumplir que

$$e^{-i\omega_0 T_0} = 1 = e^{i2k\pi} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ya que como vimos en el plano complejo, el número 1 puede ser representado por un vector de módulo $\rho = 1$ y fase φ múltiplo de 2π.

Finalmente

$$\omega_0 T_0 = 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

y buscando el periodo T_0 más pequeño, obtenemos:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Este cociente es siempre un número real y por lo tanto *las exponenciales complejas continuas son siempre periódicas con periodo* $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Esto implica que cada T_0 segundos el vector vuelve a pasar por la misma posición generando valores complejos repetidos. Esto se evidencia tanto en las proyecciones sobre los ejes o en la parte real e imaginarias que están determinadas por funciones periódicas de periodo T_0.

Nótese que variar la frecuencia ω_0 genera senos y cosenos diferentes y nunca repetidos.

Consideremos ahora un caso generalizado de exponenciales complejas, que incluiremos en este apartado por comodidad, aunque no representan señales periódicas. Una exponencial compleja generalizada está dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = e^{s.t} \quad s \in \mathbb{C}_\wedge s = \sigma + i\omega$$

donde ahora el exponente posee una variable compleja s, con parte real σ y parte imaginaria ω. La señal $x(t)$ es una señal compleja y por lo tanto no posee gráfica. Sin embargo podemos si graficar su parte real o su parte imaginaria para sacar algunas conclusiones:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{s.t} = e^{(\sigma+i\omega)t} = e^{\sigma t} e^{i\omega t} = e^{\sigma t}\left(cos(\omega t) + i.sen(\omega t)\right) \\ x(t) &= e^{\sigma t} cos(\omega t) + i.e^{\sigma t} sen(\omega_t) \end{aligned}$$

Tanto la parte real como la parte imaginaria se pueden graficar y forman senos o cosenos *modulados* por una exponencial **real** creciente o decreciente (dependiendo si σ es positiva o negativa).

La exponencial que modula al seno está determinada por el valor de σ y la pseudo-frecuencia [1] está gobernada por el valor de ω.

[1] Esta no es una señal periódica y por lo tanto no posee ni periodo ni frecuencia, aunque su gráfica muestra una oscilación que se denomina pseudo-periódica.

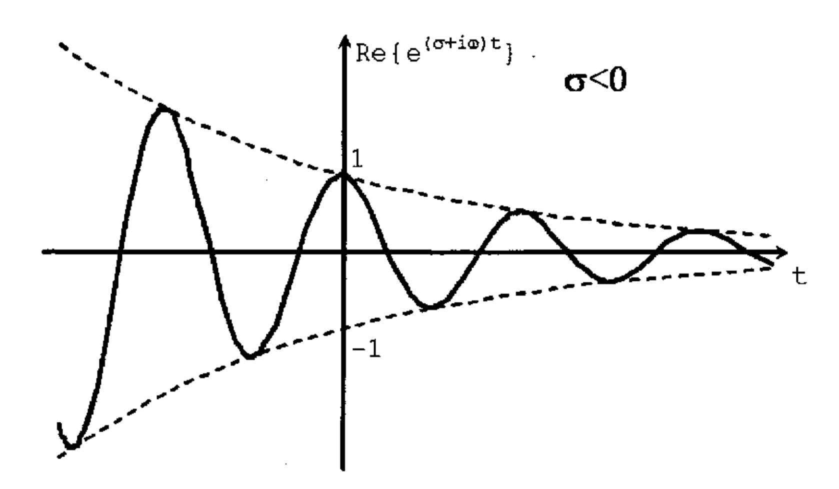


Figura 1.4: Señal cosenoidal modulada por una exponencial decreciente.

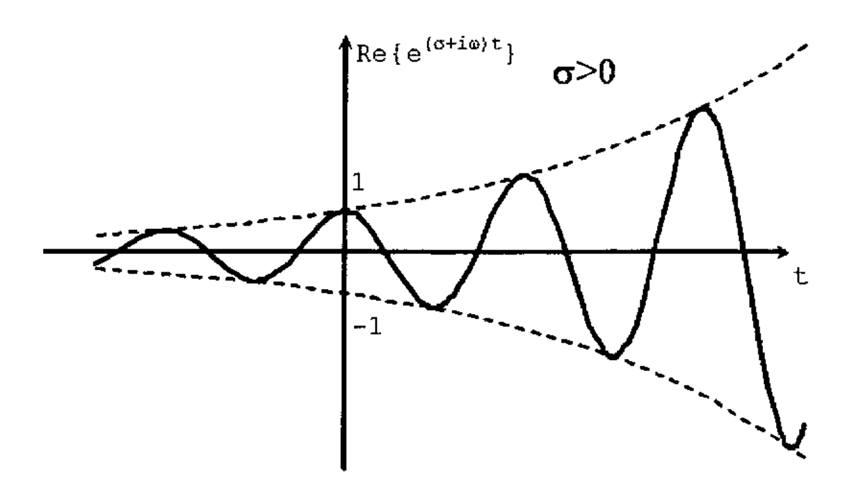


Figura 1.5: Señal cosenoidal modulada por una exponencial creciente.

Suma de señales periódicas

Veamos qué sucede si sumamos dos señales periódicas. Si $x_1(t)$ es periódica con periodo T_1 y $x_2(t)$ es periódica con periodo T_2, entonces por 1.1 obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t+T_1) = x_1(t+m.T_1) \qquad m = \pm 1, \pm, 2 \pm 3, \ldots \\ x_2(t) &= x_2(t+T_2) = x_2(t+k.T_2) \qquad k = \pm 1, \pm, 2 \pm 3, \ldots \end{aligned}$$

Creamos una nueva señal $x(t)$ que sea la suma de ambas señales:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Si esta nueva señal es periódica, entonces debe existir un periodo T que cumpla con 1.1. Veamos entonces :

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t+T) \\ x_1(t)+x_2(t) &= x_1(t+T)+x_2(t+T) \\ x_1(t+m.T_1)+x_2(t+k.T_2) &= x_1(t+T)+x_2(t+T) \qquad k \in \boldsymbol{Z}, m \in \boldsymbol{Z} \end{aligned}$$

y para que la última igualdad sea cierta, se debe cumplir que

$$m.T_1 = k.T_2 = T$$

por lo tanto:

$$\frac{m}{k} = \frac{T_2}{T_1} \qquad m \in \boldsymbol{Z}, k \in \boldsymbol{Z} \tag{1.3}$$

Podemos decir entonces que no siempre la suma de dos señales periódicas resulta en una nueva señal periódica. Para que esto suceda debemos asegurar que el **cociente de periodos sea racional**. Luego, el periodo de la función suma T es $m.T_1 = k.T_2$. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1.3.1 *Sean las siguientes señales periódicas:*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3.cos\left(9t+\frac{\pi}{2}\right) \\ x_2(t) &= sen\left(\frac{2}{3}\pi t\right) \\ x_3(t) &= cos^2(3t) \end{aligned}$$

Determine si las siguientes combinaciones son periódicas:

1. $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$
2. $x(t) = x_1(t) + x_3(t)$
3. $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$

Antes de comenzar debemos hallar el periodo de cada una de las señales. La primera y la segunda son un coseno y un seno respectivamente, por lo tanto simplemente hallamos:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{9} \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{2\pi/3} = 3$$

Note como el desplazamiento de fase presente en $x_1(t)$ $(\pi/2)$ no afecta el cálculo del período.

Para el caso de $x_3(t)$ podríamos comenzar preguntándonos si es o no periódica. Para esto podemos utilizar simplemente la siguiente igualdad trigonométrica:

$$cos^2(x) = \frac{1}{2}\left[1 + cos(2x)\right]$$

y por lo tanto:

$$cos^2(3t) = \frac{1}{2}\left(1 + cos(6t)\right) = \frac{1}{2} + \frac{cos(6t)}{2}$$

Vemos que en realidad se trata de una constante, que no influye sobre la periodicidad, sumada a una señal coseno cuyo periodo (coincidente con el de $x_3(t)$) es

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Comencemos a analizar caso por caso:

1. $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$: *Utilicemos la relación 1.3, con $T_1 = 2\pi/9$ y $T_2 = 3$:*

   $$\frac{m}{k} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{2\pi/9} = \frac{27}{2\pi}$$

   vemos claramente como el cociente no es un número racional y, por lo tanto, la suma de estas dos señales periódicas no conforma una señal periódica. Esto se puede pensar de la siguiente forma. Ninguna de las señales está contenida en la otra un número racional de veces, y entonces al sumarlas encontraremos a lo largo del eje temporal t una señal que no se repite nunca.

2. $x(t) = x_1(t) + x_3(t)$: *Nuevamente utilizamos 1.3 pero ahora $T_1 = 2\pi/9$ y $T_2 = \pi/3$*

   $$\frac{m}{k} = \frac{\pi/3}{2\pi/9} = \frac{3}{2} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow T = 2.T_2 = 3T_1 = \frac{2\pi}{3}$$

   En este caso la señal suma es periódica. Puede notar que la repetición sucede cuando se cumplen tres periodos de $x_1(t)$ y dos periodos de $x_3(t)$.

3. $x(t) = x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$: *Este último caso se puede analizar agrupando las señales y analizando del siguiente modo. La suma $x_1(t)+x_2(t)$ no conforma una señal periódica y por lo tanto, al sumar $x_3(t)$ simplemente no podemos asegurar qué pasará, ya que solo demostramos qué sucede al sumar dos señales periódicas. A pesar de esto el lector puede utilizar la definición de periodicidad en este caso particular (1.1) y verificar que la suma no es periódica.*

1.3.2. Aperiódicas

Las señales aperiódicas más particulares son difíciles de clasificar. A continuación presentaremos tres señales constitutivas básicas con las cuales confeccionaremos señales aperiódicas más complicadas, desplazándolas y escalándolas según cada caso. Debemos dejar en claro que estas señales básicas no son continuas ni derivables, y raras veces aparecen en la práctica, pero constituyen una idealización muy conveniente para representar señales que se utilizarán como patrón.

Impulso o delta de Dirac

Definición 1.3.2 *La señal delta de dirac o señal impulso continua está definida por:*

$$\boxed{\delta(t) = \begin{cases} \infty & si\ t = 0 \\ 0 & si\ t \neq 0 \end{cases}}$$

No es conveniente definir al delta en base a su amplitud, ya que su principal característica es que es una función densidad de probabilidad. La definición más apropiada es:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1}$$

Es imperativo entender que la función impulso se caracteriza por poseer un área unitaria bajo la misma (ya que es una función de densidad de probabilidad) y además estar *perfectamente* determinada en el tiempo (duración nula).

Su gráfico es el siguiente:

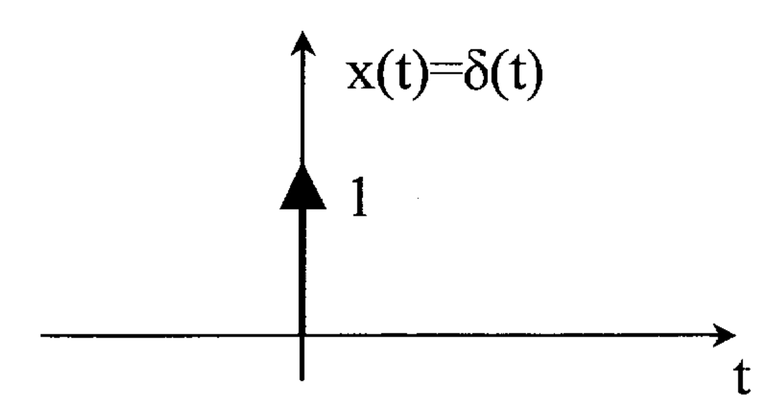


Figura 1.6: Señal delta de Dirac o impulso.

La flecha indica que su amplitud es infinita. El uno a su derecha es solo el valor del **área bajo la función**. Es evidente que la función que representa el delta, no es continua ni derivable.

Para poder comprender cómo se obtiene una función de duración nula, amplitud infinita y área unitaria, utilicemos una función delta aproximada $\delta_\Delta(t)$ definida de la siguiente forma:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{si } |t| < \Delta/2 \\ 0 & \text{para otro } t \end{cases}$$

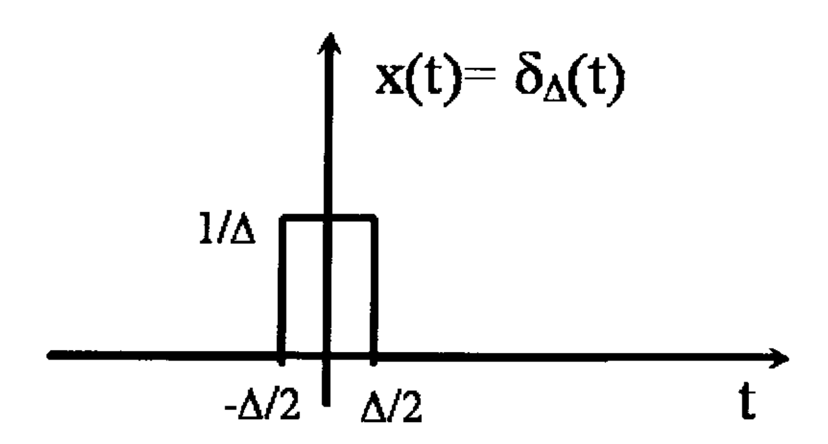


Figura 1.7: Señal delta aproximado.

Obsérvese que si tendemos el ancho Δ a cero, la amplitud tiende a infinito pero el área del rectángulo es siempre uno, de manera que

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

Las propiedades de la función delta son fundamentales y serán utilizadas a lo largo de todo el libro frecuentemente.

- La primera propiedad es muy simple. Si multiplicamos a un delta por una constante, estamos cambiando su área:

$$A.\delta(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} A.\delta(t)dt = A. \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt}_{1} = A$$

- Si tomamos una función $f(t)$ continua para todo valor de t, entonces:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

  Ya que al multiplicar $f(t)\delta(t)$ el delta solo tiene un valor diferente de cero para $t = 0$, por lo tanto $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$, y como $f(0)$ es una constante podemos utilizar la propiedad anterior.

Siguiendo el mismo razonamiento, si ahora desplazamos el delta t_0 segundos a la derecha [2]$(t_0 > 0)$:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

- La última propiedad es la de escala. Sea a una constante, entonces

$$\delta(a.t) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

que intuitivamente es lógico, ya que si pensamos en la aproximación del delta $\delta_\Delta(t)$, escalarla en a es cambiarle su ancho temporal, y por lo tanto su área.

Utilizaremos la función delta para descomponer a cualquier señal continua $x(t)$ en un conjunto de deltas escalados y desplazados. Observe con atención el siguiente razonamiento.

Sea $x(t)$ una señal continua cualquiera. Utilizamos la propiedad del delta:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

Donde si reemplazamos t por τ y t_0 por t, y además tenemos en cuenta que la función impulso es par ($\delta(t) = \delta(-t)$ y $\delta(\tau - t) = \delta(t-\tau)$), podemos escribir la importante descomposición:

$$\boxed{x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau} \tag{1.4}$$

Por ejemplo, si se quiere obtener el valor de $x(t=3)$, entonces dentro de la integral aparece el siguiente producto:$x(\tau)\delta(3-\tau)$. El delta solo tiene valor para $\tau = 3$, y por lo tanto $x(\tau)\delta(3-\tau) = x(3)\delta(3-\tau)$. El $x(3)$ puede salir fuera de la integral ya que es una constante que no depende de τ. La integral vale 1 ya que es el área bajo un delta [3]:

$$x(t=3) = x(3).\underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} \delta(3-\tau)d\tau}_{1} = x(3)$$

El concepto de descomponer a cualquier señal continua en deltas desplazados y escalados es de gran importancia y merece especial atención. Para plasmar el fenómeno gráficamente,

[2] Note que $f(t-t_0)$, con $t_0 > 0$ desplaza el delta a la derecha y lo ubica en $t = t_0$

[3] El delta está desplazado pero su área sigue siendo 1

utilicemos la función delta aproximada $\delta_\Delta(t)$. Recordemos que esta función posee amplitud $1/\Delta$ y su área es siempre unitaria. Si llamamos a $\hat{x}(t)$, a la aproximación de $x(t)$ mediante $\delta_\Delta(t)$ desplazados y escalados, podemos decir que:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta \tag{1.5}$$

donde se multiplicó por Δ al final para que la amplitud de cada escalón sea la correspondiente a $x(t)$ en $t = k.\Delta$ como muestran las figuras 1.8.

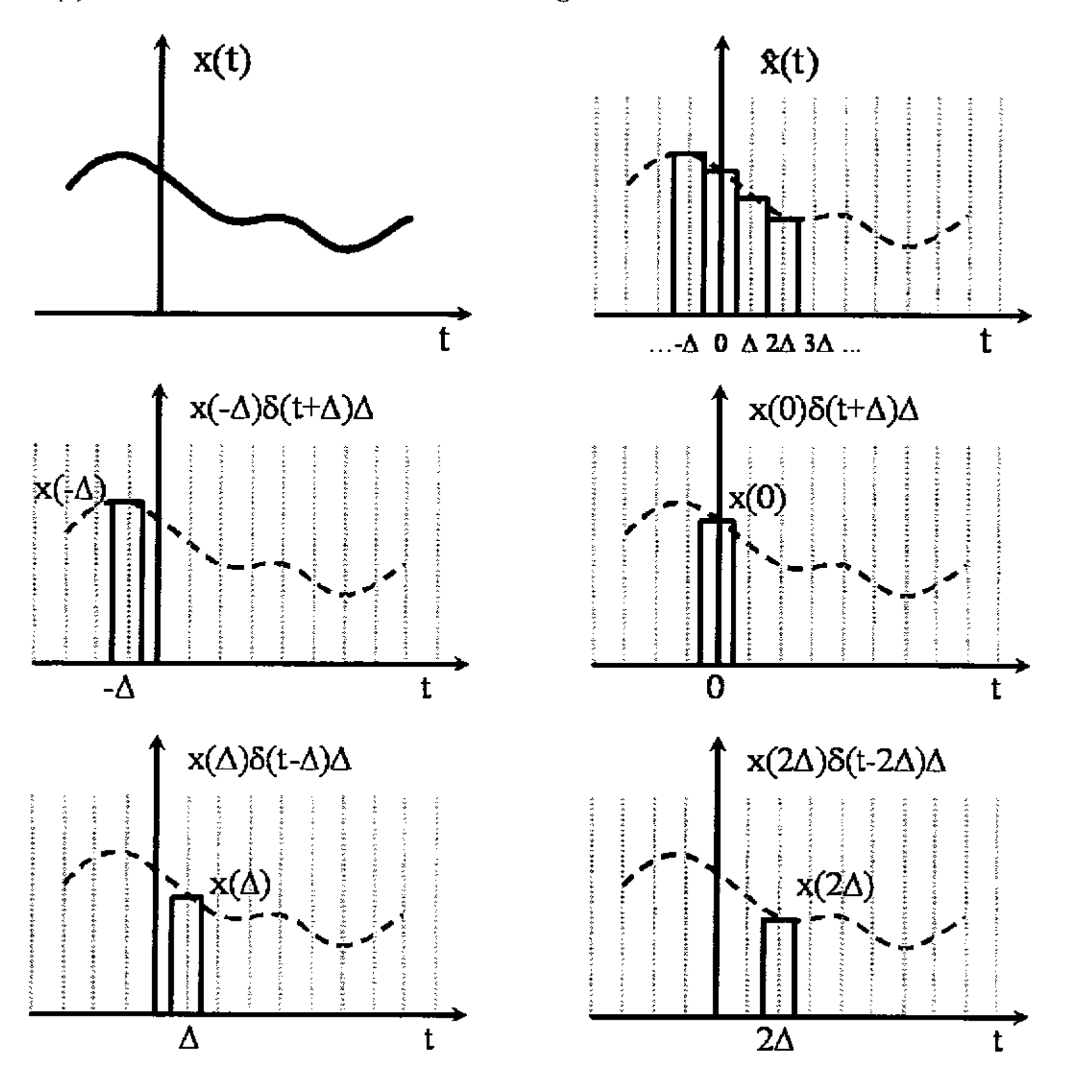


Figura 1.8: Descomposición de una señal continua en término de deltas aproximados.

El delta aproximado se relaciona con la función delta mediante el siguiente límite:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

Si ahora aplicamos el mismo límite ($\Delta \to 0$) a la ecuación 1.5, la sumatoria pasa a ser una integral, el Δ pasa a ser un infinitésimo $d\tau$, y gráficamente los escalones serán más angostos

hasta que copien exactamente a la función original. Este concepto es el mismo que se emplea comúnmente para deducir la operación de *integración* en funciones de una variable:

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(t)$$

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Escalón

La función escalón se define de la siguiente manera:

Definición 1.3.3

$$\boxed{u(t) = \begin{cases} 1 & si\; t > 0 \\ 0 & si\; t < 0 \end{cases}}$$

Esta función posee una discontinuidad de primer orden (salto finito) en $t = 0$.

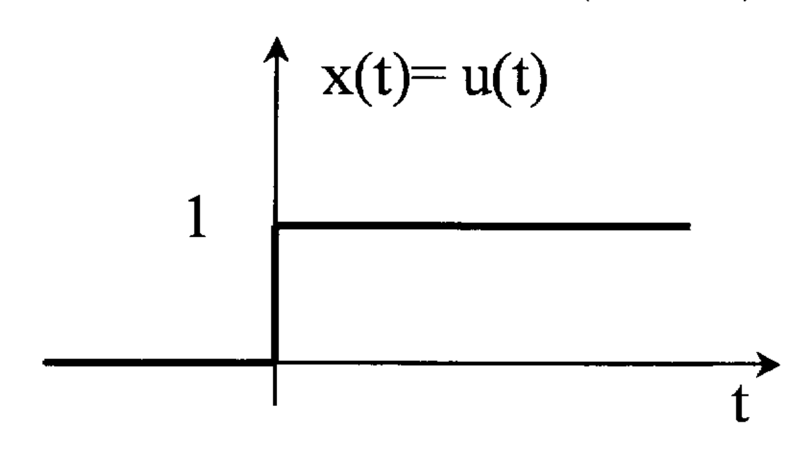


Figura 1.9: Señal escalón o pulso continuo.

Además si la escalamos cambiamos su amplitud $A.u(t)$.
La función escalón puede relacionarse con la función impulso de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = \delta(t) \Longrightarrow u(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

Donde en la segunda relación se utilizó la variable auxiliar τ. Note que si $t < 0$ la integral (que puede considerarse como una sumatoria) no *suma* área. Recién en el momento en que $t > 0$, pasado el delta, la integral *junta* área uno y se mantiene constante conformando la función escalón.

Rampa

Por último definamos a la función rampa como:

Definición 1.3.4

$$\rho(t) = \begin{cases} t & si\ t > 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases}$$

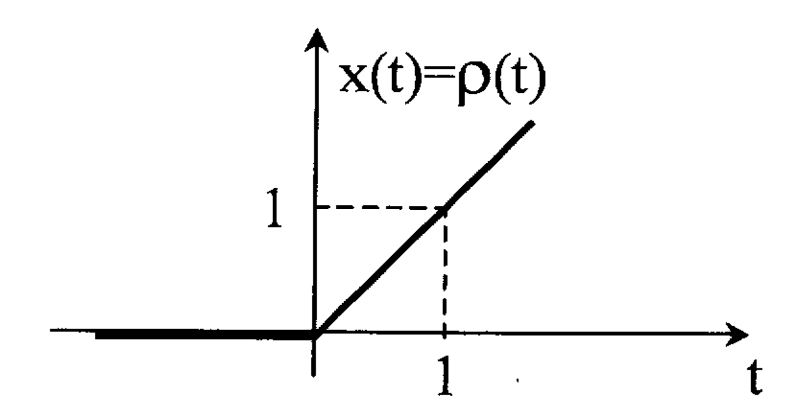


Figura 1.10: Señal rampa.

Donde puede verse claramente que si escalamos a la función rampa cambiamos *su pendiente*:

$$A.\rho(t) = \begin{cases} A.t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

La función rampa se puede relacionar con la función escalón de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = u(t) \Longrightarrow \rho(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$

También podemos escribir

$$\rho(t) = t.u(t)$$

como se puede verificar fácilmente multiplicando punto a punto un escalón por la función $f(t) = t$.

Composición de señales aperiódicas

Veamos cómo utilizando las señales aperiódicas básicas (delta,escalón y rampa), podemos componer una función aperiódica más compleja. Esto será de gran utilidad a la hora

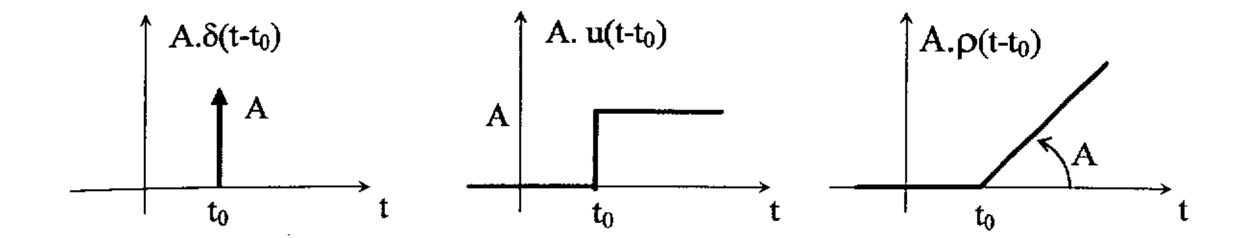


Figura 1.11: Señales aperiódicas básicas desplazadas.

de ingresar señales a un sistema lineal, ya que bajo ciertas condiciones podremos estudiar la respuesta de una señal complicada simplemente conociendo la respuesta de cada señal ingresada y sumando los efectos. Primero realicemos un esquema para ver qué sucede al desplazar y al escalar las señales básicas en forma gráfica. Observe la figura 1.11.

Si el valor de la constante A fuera negativo, el delta, el escalón y la rampa, estarían en el semieje negativo de las ordenadas.

Veamos a continuación un ejemplo:

Ejemplo 1.3.2 *Descomponga a la señal aperiódica $x(t)$ de la figura 1.12 en sus señales básicas.*

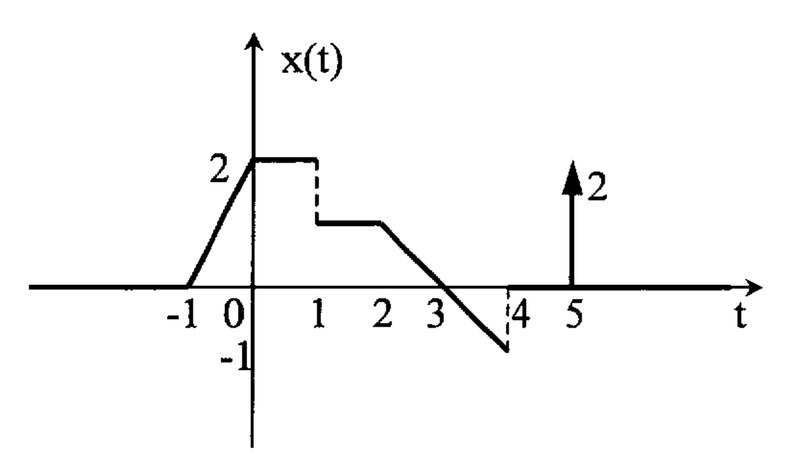


Figura 1.12: Señal aperiódica para descomponer.

Para poder componer la señal es conveniente comenzar de izquierda a derecha, colocando las señales básicas desplazadas y escaladas de manera conveniente para ir generando el efecto buscado. Se recomienda al lector graficar en una hoja aparte cada señal que compone la sumatoria, una bajo la otra, e ir sumando punto a punto. La señal compuesta sería la siguiente:

$$x(t) = 2.\rho(t+1) - 2.\rho(t) - u(t-1) - \rho(t-2) + \rho(t-4) + u(t-4) + 2\delta(t-5)$$

pen-

ión

de-
pra

El primer término coloca una rampa de pendiente 2 *que arranca en* $t = -1$. *Luego en* $t = 0$ *es necesario eliminar esa rampa, y se lo consigue restando una rampa de pendiente opuesta que arranque en* $t = 0$ *(verifique gráficamente punto a punto). En* $t = 1$ *debemos restar un escalón y en* $t = 2$ *debe nacer una rampa de pendiente* -1. *En* $t = 4$ *debemos realizar dos operaciones, incluir una rampa de pendiente* 1 *que contrarreste a la anterior, y además utilizar un escalón para provocar el salto. Finalmente aplicamos el delta en* $t = 5$ *de área* 2.

1.4. Señales Discretas

En el caso de las señales discretas encontraremos muchas similitudes con su contraparte continua, aunque mencionaremos diferencias sustanciales en algunas de ellas. Recordemos que las señales discretas se caracterizan por poderse enumerar: Son sucesiones de valores como en un listado de números. Entre dos números sucesivos no hay *cero* sino, simplemente, no existen valores. **Esto implica que dibujar dos muestras a una distancia de un centímetro o de medio centímetro no altera en absoluto a la señal.** Piense como en arreglo de valores en C donde se definen por ejemplo 100 números: *int array[100]*. Esto definiría una señal discreta de 100 muestras.

Es por esto que la noción de una señal de alta frecuencia en tiempo continuo (variaciones rápidas temporales) debe ser revisada con mucha atención en el caso discreto, ya que **existe una tasa de variación máxima entre muestras adyacentes para una señal discreta.** En el caso continuo, las oscilaciones de una señal se pueden aumentar *comprimiendo* el eje temporal que constituye un dominio real. Por el contrario, el un eje discreto, acercar o alejar las muestras no cambia la frecuencia de la señal. Lo que modifica la frecuencia de una señal discreta es la tasa de cambio de los números adyacentes. Volviendo al ejemplo de los 100 números enteros, piense simplemente qué valores deben tomar esos 100 números para que la señal que representan sea de mayor o menor frecuencia. Si los valores de los números contiguos se parecen, la señal es de baja frecuencia. Si los valores difieren y pasan de positivos a negativos, la señal es de alta frecuencia. Este punto es crucial en el análisis de señales y sistemas discretos y nos abrirá las puertas a conceptos más avanzados.

Comencemos siguiendo el esquema de las señales continuas. Notará que en algunos casos citaremos las conclusiones obtenidas ya que no existen diferencias entre ambos casos.

1.4.1. Periódicas

Las señales periódicas discretas son aquellas para las cuales una secuencia de valores se repite sistemáticamente cada N_0 muestras, siendo N_0 un número entero positivo de muestras. De esta forma definimos:

Definición 1.4.1 *Una señal discreta periódica* $x[n]$ *debe cumplir con la siguiente igualdad*

$$x[n] = x[n - N_0] = x[n - k.N_0] \qquad k = \pm 1, \pm, 2 \pm 3, \ldots \wedge N_0 \in I\!N \tag{1.6}$$

donde a N_0 *se lo denomina periodo.*

Aquí debemos hacer una distinción muy importante entre los conceptos de frecuencia para señales periódicas continuas y discretas. En el caso continuo, si el periodo aumenta (señal más lenta) la frecuencia disminuye, y si el periodo disminuye (señal más rápida) la frecuencia aumenta. En el caso de una señal discreta, disminuir el periodo implica que N_0 debe ser un valor más pequeño, aunque este valor tiene un límite mínimo ya que es un número entero. Si N_0 fuera 1, la señal se repetiría cada una muestra, y por lo tanto llegaríamos al absurdo de considerar a una señal **constante** periódica [4]. Por lo tanto el número mínimo para el periodo es $N_0 = 2$. Además si deseamos que la frecuencia de la señal sea máxima, debemos realizar la máxima variación entre muestras posibles. Como el periodo mínimo determina la frecuencia máxima: la frecuencia normalizada máxima de una señal discreta normalizada es π, ya que definimos a la frecuencia normalizada como:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \qquad N_0 \in I\!N$$

Note que las unidades son $rad/muestra$.

La señal discreta de mayor frecuencia es $x[n] = cos(\pi n) = (-1)^n = \{\ldots 1, -1, 1, -1, \ldots\}$. Ninguna señal discreta puede variar más rápido o brusco que esta señal (recuerde que acercar o alejar las muestras es solo una cuestión de escala; la señal es la misma). Verificaremos esta afirmación en capítulos posteriores.

Introduzcamos un grupo de señales periódicas clásicas: las exponenciales complejas discretas.

Las exponenciales complejas discretas

Las funciones exponenciales complejas continuas tenían una característica central muy importante: eran siempre periódicas en tiempo. Veamos qué sucede en el caso discreto.

La señal exponencial compleja se define como

$$x[n] = e^{i\Omega_0 n} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

donde $\Omega_0 \in I\!R$ es constante y se la denomina *frecuencia fundamental*. La relación de *Euler* (1.2) se puede aplicar ya que es genérica para todo t:

$$x[n] = e^{i\Omega_0 n} = cos(\Omega_0 n) + i.sen(\Omega_0 n)$$

A continuación intentemos probar la periodicidad de la exponencial. Como en el caso continuo, utilicemos la función $\rho.e^{i\varphi}$, recordando que la misma puede ser representada en un plano complejo como un vector de módulo ρ y fase φ; cuya parte real es $\rho.cos(\varphi)$ y parte imaginaria $\rho.sen(\varphi)$.

Pensemos ahora en la fase φ que, para el caso discreto, varía en forma discreta como $\varphi = \Omega_0 n$. De esta manera se describen puntos del plano complejo para cada valor entero de

[4] Como una señal discreta constante $x[n] = A$ podría considerarse periódica con un N_0 arbitrario, no la consideraremos periódica sino simplemente constante

n. Para que $e^{i\Omega_0 n}$ (suponemos $\rho = 1$) sea periódica, debe, para algún valor de n volverse a repetir la secuencia de vectores. Como al variar la fase φ el vector gira alrededor del origen, se podría intuir que el periodo N_0 debe ser un número (entero) tal que en algún múltiplo o submúltiplo de vueltas se cumpla:

$$N_0 = \frac{2\pi m}{\Omega_0} \qquad m = 1, 2, 3 \ldots$$

Esto se puede deducir utilizando la definición 1.6 y aplicándola sobre la exponencial compleja de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x[n] &= x[n - N_0] \\ e^{i\Omega_0 n} &= e^{i\Omega_0 (n - N_0)} = e^{i\Omega_0 n} e^{-i\Omega_0 . N_0} \\ 1 = e^{i2k\pi} &= e^{-i\Omega_0 . N_0} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

donde nuevamente se utilizó el hecho que el número 1 se puede representar como un vector de módulo unitario y fase cero o múltiplo de 2π. Note entonces que para que la exponencial compleja discreta sea periódica se debe cumplir

$$\boxed{\Omega_0 = \frac{2.\pi.k}{N_0}}$$

donde tanto k como N_0 deben ser enteros.

Tal como lo habíamos anticipado, la frecuencia Ω_0 debe ser un múltiplo o submúltiplo de 2π para que la relación se cumpla y la exponencial compleja sea periódica. Es natural además suponer que lo mismo sucederá con un seno o un coseno discreto, debido a su estrecha relación mediante la fórmula de *Euler*.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.4.1 *Analice la periodicidad de las siguientes señales. Determine el periodo para las periódicas.*

1. $x[n] = 2.e^{i\pi n/5}$.

2. $x[n] = cos(2n/3)$.

1. *En el primer caso* $x[n] = 2.e^{i\pi n/5}$*, entonces* $\Omega_0 = \pi/5$*. Verificamos entonces*

$$N_0 = \frac{2k\pi}{\Omega_0} = \left.\frac{2k\pi}{\pi/5}\right|_{k=1} = 10$$

Donde el valor de k se elige para lograr que N_0 sea el número entero más pequeño. De esta forma esta es una señal periódica que se repite cada 10 muestras.

2. Como $x[n] = cos(2n/3)$, obtenemos $\Omega_0 = 2/3$. Es evidente que si aplicamos la relación

$$N_0 = \frac{2k\pi}{\Omega_0} = \frac{2k\pi}{2/3} = 3k\pi$$

no existe ningún valor de k entero que permita que N_0 sea entero; por lo tanto esta señal no es periódica.

Podemos pensar en esta señal discreta como obtenida de muestrear una señal coseno continua cada un número de segundos y esperar que en algún momento las muestras tomadas se repitan. Esto no siempre sucederá. A pesar que la señal coseno continua sea siempre periódica, si las muestras no son tomadas cada una fracción (o múltiplo) del periodo de la continua, encontraremos muestras siempre diferentes.

El hecho que en el exponente $\Omega_0 n$ aparezca la variable entera n provoca que no todas las exponenciales complejas sean periódicas (como acabamos de ver) pero además genera un efecto muy curioso. Si ahora decidimos variar la frecuencia Ω_0 en forma continua, nos encontraremos con la siguiente situación. Si al coseno discreto periódico del ejemplo, con frecuencia $\Omega_0 = \pi/5$, le aumentamos la frecuencia en 2π: $\Omega_0 = \Omega_0 + 2\pi = 11\pi/5$ **obtendremos la misma señal**. Esto se puede verificar fácilmente en el caso genérico de las exponenciales complejas, ya que:

$$e^{i(\Omega_0+2\pi)n} = e^{i\Omega_0 n} \underbrace{e^{i2\pi n}}_{1} \qquad \forall n \in \boldsymbol{Z}$$

Esto implica que **todas las exponenciales complejas discretas son periódicas en <u>frecuencia</u> con periodo** 2π. Por lo tanto, una señal discreta de baja frecuencia posee un Ω_0 cercano a cero. A medida que aumentamos este Ω_0 la frecuencia comienza a aumentar hasta que se llega a la frecuencia máxima normalizada $\Omega_0 = \pi$. Luego de ese punto, y si se continua aumentando Ω_0, se va a comenzar a observar en las muestras el efecto inverso al esperado: gráficamente las muestras parecen variar de una a otra con mayor lentitud, hasta que para $\Omega_0 = 2\pi$ volvemos a tener una señal de baja frecuencia.

Note este efecto en la función *coseno* de la 1.13 si aumentamos la frecuencia en pasos de $\pi/4$.

Suma de señales periódicas

Como las señales discretas periódicas poseen como periodo un número entero de muestras N_0, si sumamos dos señales periódicas siempre obtendremos una nueva señal periódica. Esto se puede comprobar ya que el cociente entre periodos será siempre racional.

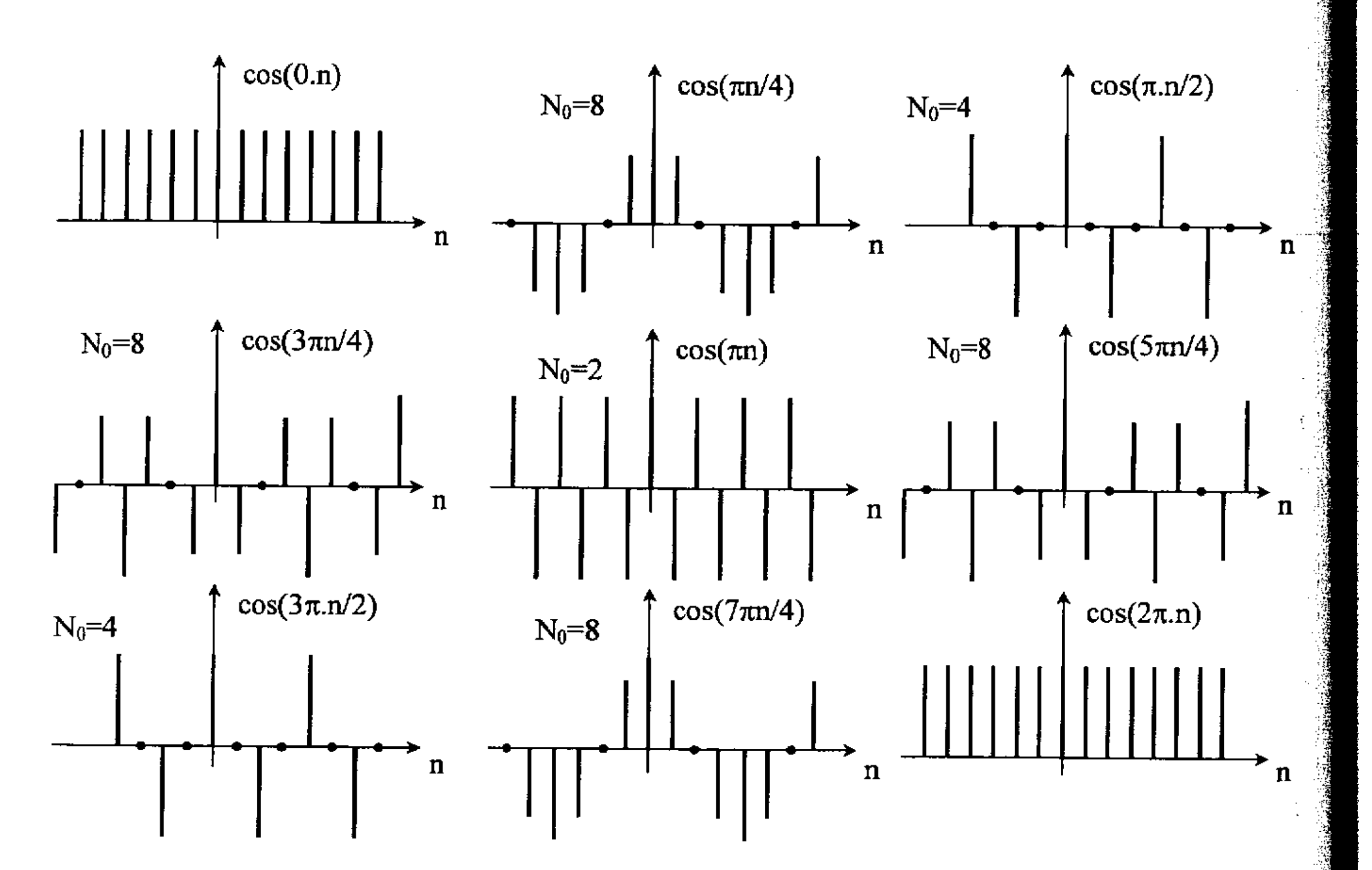


Figura 1.13: Ejemplo de las muestras obtenidas en un $cos(\Omega_0 n)$ aumentando la frecuencia Ω_0 en pasos de $\pi/4$

1.4.2. Aperiódicas

Así como en el caso continuo, existen contrapartes discretas para las señales delta, escalón y rampa. Utilizando esas señales básicas podremos conformar cualquier señal aperiódica más complicada, aunque en la práctica es mucho más simple comprender que **cualquier señal discreta puede descomponerse en una sumatoria de ”deltas.escalados y desplazados**. Analizaremos esto último adelante con más detalle.

Además de las señales básicas mencionadas veremos las exponenciales reales discretas, ya que son de especial interés y poseen alguna características que las diferencias de las exponenciales reales continuas.

Señal impulso o delta de dirac

Esta señal elemental no posee los problemas que presentaba el $\delta(t)$ respecto a su representación. Simplemente definimos:

Definición 1.4.2 *Señal delta o impulso unitario discreto:*

$$\boxed{\delta[n] = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ 0 & para\ otro\ n \end{cases}}$$

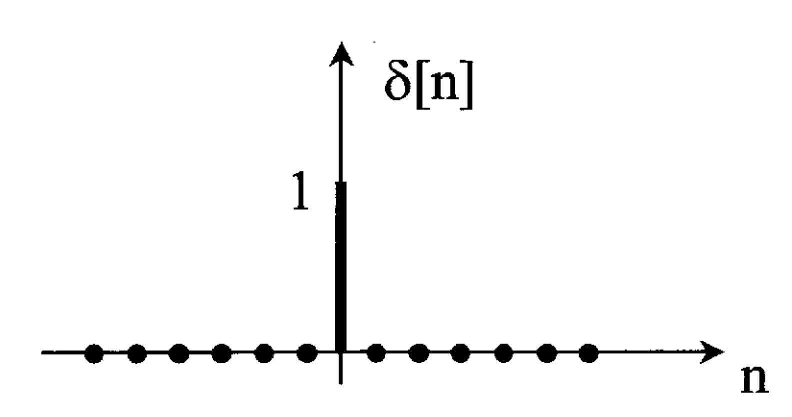


Figura 1.14: Señal impulso discreta.

Esta señal es de suma importancia ya que cualquier señal discreta puede ser descompuesta mediante ”deltas.escalados y desplazados:

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]} \tag{1.7}$$

donde se utilizó la variable auxiliar k. Note que el producto punto a punto (o muestra a muestra) $x[k]\delta[n-k] = x[n]\delta[n-k]$ da como resultado un único delta de amplitud $x[n]$ en la posición n. Esta descomposición tan simple en el campo discreto es la que realizamos en el campo continuo mediante el uso de la integral (1.4).

Escalón

Definición 1.4.3 *Señal escalón unitario discreto:*

$$u[n] = \begin{cases} 1 & si\ n \geq 0 \\ 0 & si\ n < 0 \end{cases}$$

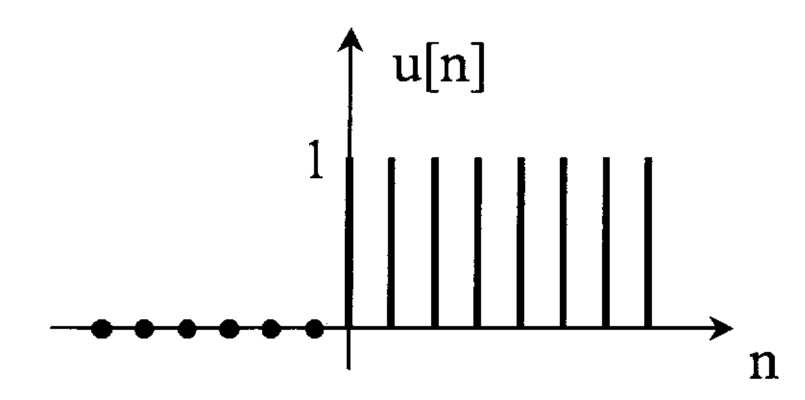


Figura 1.15: Señal escalón discreto.

La relación entre el escalón y la señal impulso unitario puede establecerse de la siguiente forma:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \qquad y \qquad u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

En el primer caso simplemente desplazamos el escalón una muestra a la derecha y lo restamos obteniendo una única muestra en el origen (delta). Note en la segunda relación su correlato continuo. En este caso es una sumatoria en la cual si el valor de la variable auxiliar k no llega hasta el origen ($n < 0$), no se suma ninguna muestra y el resultado es cero. En el momento en que $n > 0$ y la sumatoria abarca a la única muestra del delta, la sumatoria da como resultado 1, conformándose el escalón.

Rampa

Definición 1.4.4 *Señal rampa discreta:*

$$\rho[n] = \begin{cases} n & si\ n \geq 0 \\ 0 & si\ n < 0 \end{cases}$$

Se puede verificar gráficamente la siguiente igualdad:

$$u[n] = \rho[n+1] - \rho[n]$$

Y se mantiene además la relación estudiada en el caso continuo:

$$\rho[n] = n.u[n]$$

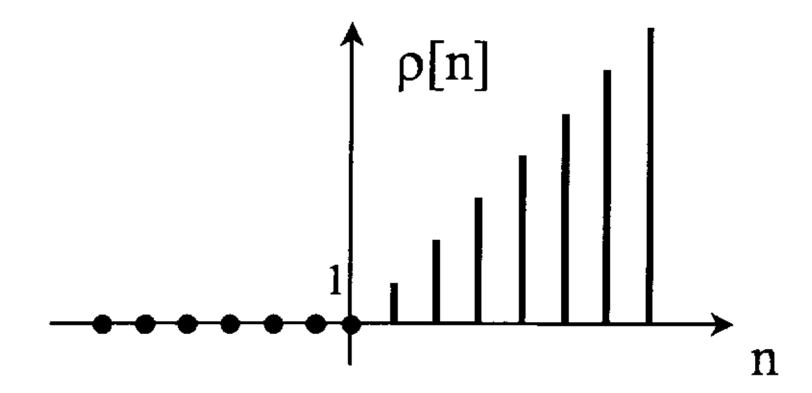


Figura 1.16: Señal rampa discreta.

Exponenciales reales discretas

Una señal exponencial real se define como:

$$x[n] = a^n \qquad a \in I\!R$$

Dependiendo los valores de la constante a podemos encontrar cuatro casos diferentes:

1. $1 > a > 0$: Exponencial monótonamente decreciente.
2. $a > 1$: Exponencial monótonamente creciente.
3. $0 > a > -1$: Exponencial decreciente alternada.
4. $a < -1$: Exponencial creciente alternada.

1.5. Potencia y Energía

Un parámetro importante de una señal periódica es su potencia.

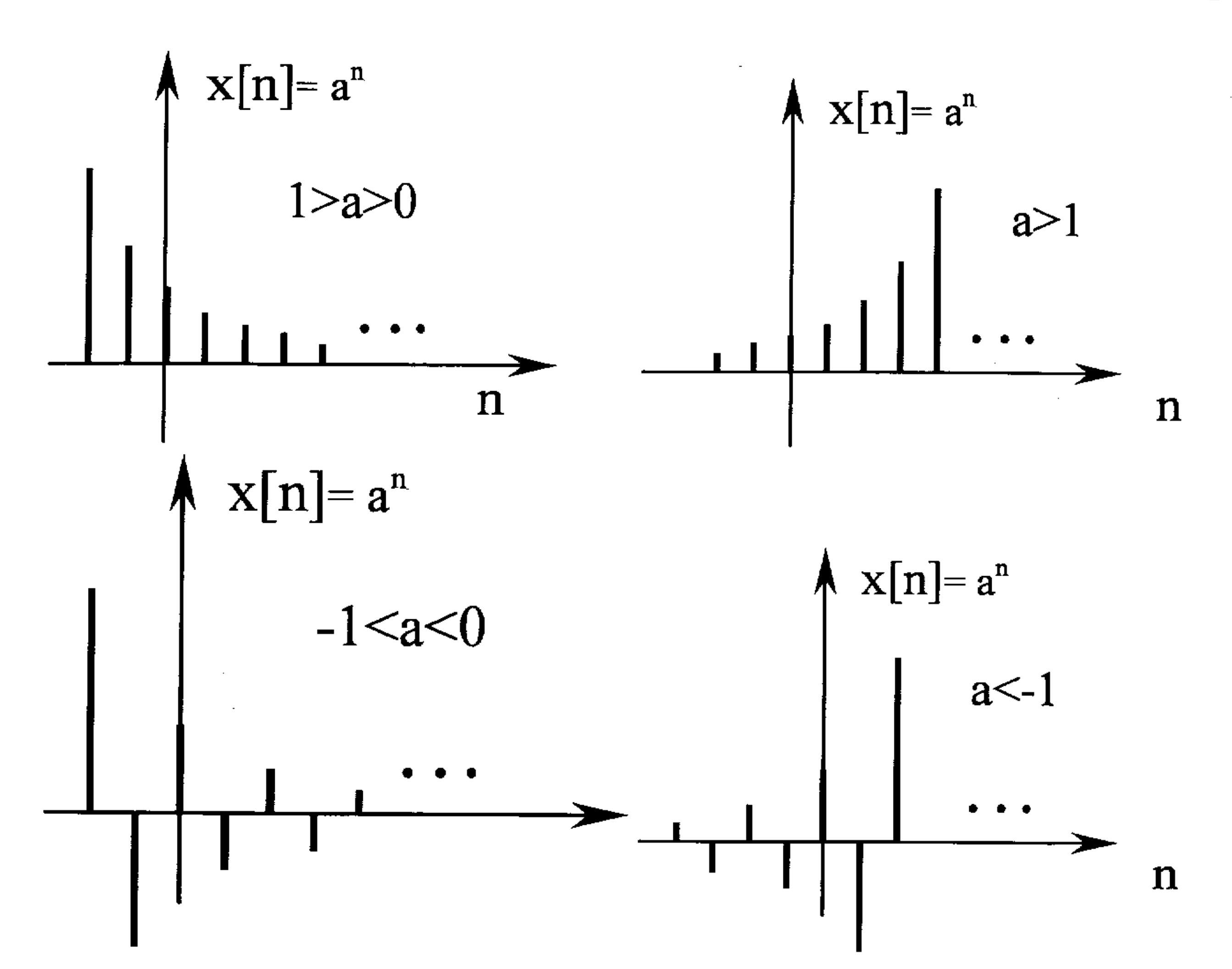
Definición 1.5.1 *La potencia de una señal periódica se calcula como:*

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

donde

$$E = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

es la energía de la señal en un período.



Para una señal aperiódica la potencia promedio se calcula como

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

y su energía es

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

De manera similar para una señal discreta, la energía se define como

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

y la potencia promedio es

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Basándonos en estas definiciones definimos las siguientes clases de señales:

- $x(t)$ o $x[n]$ son señales (o secuencias) de energía si $\infty > E > 0$ y por lo tanto su potencia promedio es cero $P = 0$.
- $x(t)$ o $x[n]$ son señales (o secuencias) de potencia si $\infty > P > 0$ y por lo tanto su energía es infinita $E = \infty$.

Una señal periódica es una señal de potencia si la energía contenida en un periodo es finita.

1.6. Paridad

Definimos a continuación la paridad:

Definición 1.6.1 *Una señal $x(t)$ o $x[n]$ es par si se cumple la siguiente condición:*

$$x(t) = x(-t) \qquad x[n] = x[-n]$$

y $x(t)$ es impar si:

$$x(t) = -x(-t) \qquad x[n] = -x[-n]$$

Una señal par real $x(t)$ o $x[n]$ se caracteriza por ser *espejada* con respecto al eje vertical. La señal par continua más utilizada es el coseno, ya que $cos(t) = cos(-t)$.

Una señal impar real $x(t)$ o $x[n]$ se caracteriza por ser *espejada* con respecto a los dos ejes. La señal impar continua más utilizada es el seno, ya que $sen(t) = -sen(-t)$. Además, existe otra característica importante que poseen las señales impares: **todas las señales impares poseen valor medio nulo**. El valor medio, o *componente de continua* como se lo denomina habitualmente se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t).dt \qquad \text{si } x(t) \text{ es periódica con periodo } T_0 \\ x_m &= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x(t).dt \qquad \text{si } x(t) \text{ es aperiódica} \end{aligned}$$

Esta propiedad puede deducirse basado en el hecho que si las señales impares poseen el mismo área entre $[0, T/2]$ y $[-T/2, 0]$, su valor medio será nulo.

Existen, obviamente señales que no son ni pares ni impares.

Toda señal $x(t)$ o $x[n]$ puede ser descompuesta en la suma de una señal par y otra impar como lo muestra la siguiente igualdad:

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t) \qquad x[n] = x_p[n] + x_i[n] \tag{1.8}$$

donde

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{2}\left(x(t) + x(-t)\right) \qquad x_p[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right) \\ x_i(t) &= \frac{1}{2}\left(x(t) - x(-t)\right) \qquad x_i[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right) \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1.6.1 *Descomponga la señal $x(t) = u(t)$ y la señal $x[n] = u[n]$ en su parte par e impar.*

Utilizando las descomposiciones hallamos, para el caso del escalón continuo:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right] = \frac{1}{2}\left[u(t) + u(-t)\right] = \frac{1}{2} \\ x_i(t) &= \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right] = \frac{1}{2}\left[u(t) - u(-t)\right] = \frac{1}{2} sgn(t) \end{aligned}$$

donde $sgn(t)$ es la función signo dada por:

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & si\ t > 0 \\ -1 & si\ t < 0 \end{cases}$$

por lo tanto:

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sgn(t)}$$

Para el caso del escalón discreto, siguiendo los mismos pasos, obtenemos:

$$\begin{aligned} x_p[n] &= \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right) = \frac{1}{2}\left(u[n] + u[-n]\right) = \frac{1}{2} + \delta[n] \\ x_i[n] &= \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right) = \frac{1}{2}\left(u[n] - u[-n]\right) = \frac{1}{2} sgn[n] \end{aligned}$$

donde $sgn(t)$ es la función signo discreta dada por:

$$sgn[n] = \begin{cases} 1 & si\ n > 0 \\ 0 & si\ n = 0 \\ -1 & si\ n < 0 \end{cases}$$

por lo tanto:

$$\boxed{u[n] = \frac{1}{2} + \delta[n] + \frac{1}{2} sgn[n]}$$

1.7. Resumen del capítulo

Para poder analizar y sintetizar sistemas es necesario conocer las señales intervinientes. Definimos las señales continuas y discretas, destacando sus características fundamentales. Una señal continua es periódica cuando se repite en el tiempo cada T segundos. Una señal discreta es periodica cuando el conjunto de muestras se repite. Dentro de la clasificación aperiódica destacamos la posibilidad de descomponer a cualquier señal en términos de "deltas" desplazados y escalados. Esta descomposición se demostró en tiempo continua y discreto.

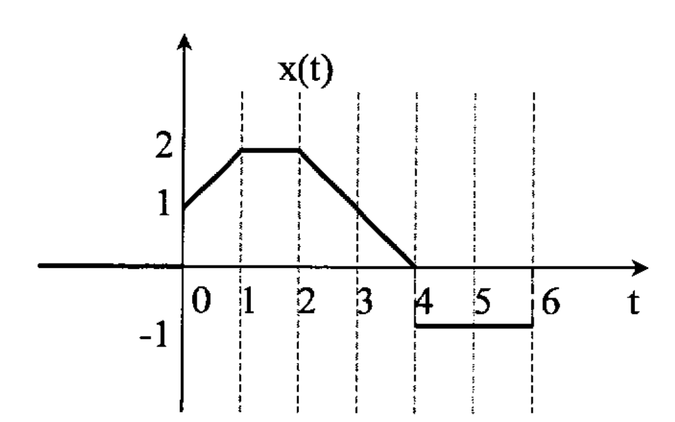
Definimos y analizamos las señales exponenciales complejas continuas. Las mismas son siempre periódicas en el tiempo y a medida que aumenta su frecuencia nos encontramos con señales diferentes que oscilan más rápido. Las exponenciales complejas discretas son periódicas solamente si su frecuencia fundamental Ω_0 es un múltiplo o submúltiplo de π y siempre presentan periodicidad frecuencial en Ω de 2π (frecuencia normalizada).

Una señal discreta normalizada es aquella para las cuales las muestras se enumeran secuencialmente en pasos de a un segundo. Las señales discretas normalizadas tienen una frecuencia máxima de $\Omega = \pi$. Las bajas frecuencias son las cercanas a cero. El concepto de frecuencia debe interpretarse desde el punto de vista de la tasa de cambio de las amplitudes de las muestras contiguas. Acercar o alejar las muestras no altera la frecuencia de una señal discreta, simplemente su representación gráfica. Una señal discreta es solo una sucesión de números que pueden ser almacenados como una lista de números en una planilla de cálculo.

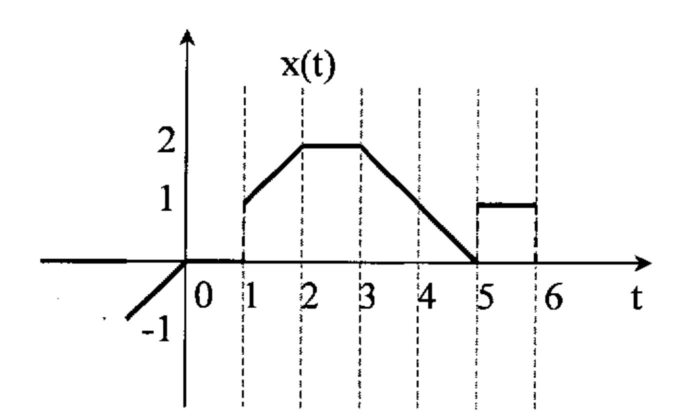
1.8. Problemas propuestos

1. Escribir las expresiones de las siguientes señales en términos de rampas ($\rho(t)$), escalones ($u(t)$) y deltas ($\delta(t)$) desplazados y escalados:

   a)



   b)



   Rta: $x(t) = -u(t+1) + \rho(t+1) - \rho(t) + u(t-1) + \rho(t-1) - \rho(t-2) - \rho(t-3) + \rho(t-5) + u(t-5) - u(t-6)$.

   $x'(t) = -\delta(t+1) + u(t+1) - u(t) + \delta(t-1) + u(t-1) - u(t-2) - u(t-3) + u(t-5) + \delta(t-5) - \delta(t-6)$.

2. Calcular analíticamente la derivada $x'(t)$ de las funciones del problema 1 y graficarlas.

3. Graficar las siguientes señales y sus derivadas:

   a) $x(t) = u(t) - u(t-4)$.

   b) $x(t) = t.[u(t) - u(t-4)]$.

   c) $x(t) = -u(-t) + u(t)$. Llamada función signo $sgn(t)$.

   d) $x(t) = 3.e^{t}u(-t)$.

   e) $x(t) = 5.e^{-2t}u(t-1)$.

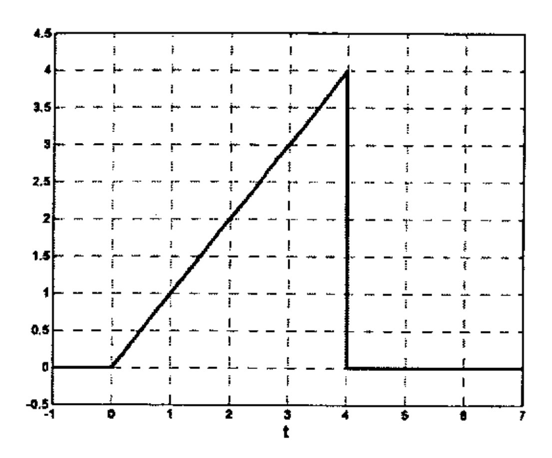


Figura 1.17: Rta: $x(t) = t.[u(t) - u(t-4)]$

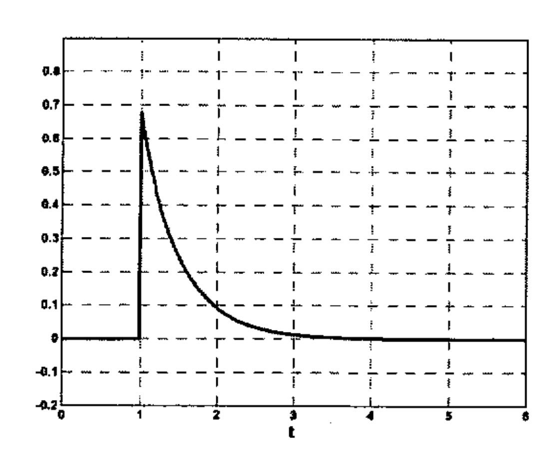


Figura 1.18: Rta: $x(t) = 5.e^{-2t}u(t-1)$

f) $x(t) = |t+1|[u(t+1) - u(t-1)]$.

g) $x(t) = e^{-|t|}$.

4. Sea $x(t) = \rho(t) - \rho(t-4) - 4.u(t-4)$, se pide graficar:

   a) $x(t)$.

   b) $x(2t)$.

   c) $x(t+3)$.

   d) $x(t/2)$.

   e) $x(-t)$.

   f) $x(-t+2)$.

   g) $x(-t-2)$.

5. Sea $x[n] = \rho[n] - \rho[n-3] - 3.u[n-5]$, se pide graficar:

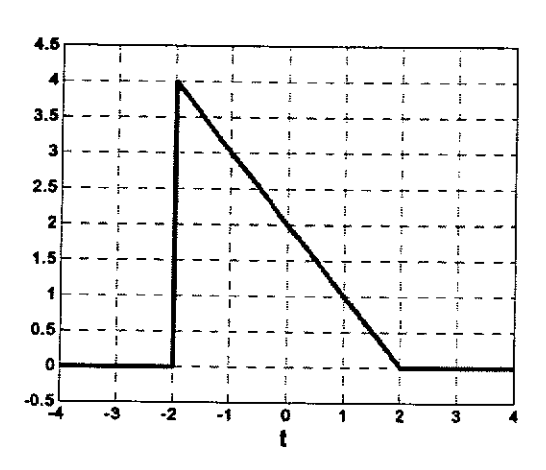


Figura 1.19: Rta: $x(-t+2)$

a) $x[n]$.

b) $x[n-2]$.

c) $x[n+2]$.

d) $x[-n]$.

e) $x[-n-2]$.

f) $x[-n+2]$.

6. Sean las secuencias $x_1[n] = \{(1), 2, 3, 0, 0, 1, 2, 2\}$ y $x_2[n] = \{-2, -2, (2), 2, 0, -2, 0\}$, donde los elementos entre paréntesis son $x_1[n=0]$ y $x_2[n=0]$ respectivamente, se pide graficar:

   a) $x_1[n] + x_2[n]$.

   b) $x_1[n].x_2[n]$.

   c) $x_1[n].x_2[-2-n]$.

   d) $x_1[n].x_2[-1-n]$.

   e) $x_1[n].x_2[-n]$.

   f) $x_1[n].x_2[1-n]$.

7. Hallar la parte par y la parte impar de cada una de las siguientes funciones y graficarlas:

   a) $x(t) = 2\rho(t) - 2\rho(t-4) - 8.u(t-4)$.

   b) $x(t) = 2.e^{-t}u(t)$.

   c) $x[n] = u[n] - u[n-5]$.

   d) $x[n] = \rho[n] - 2\rho[n-2] + \rho[n-4]$.

8. Demuestre que el producto de una señal par por otra par da como resultado una señal par; que par por impar da impar y que impar por impar da par.

9. Determine cuáles de las siguientes señales son periódicas, y en el caso que lo sean determine su periodo:

   a) $x(t) = 3.cos(t + \pi/2)$.

   Rta: Periódica. $T_0 = 2\pi$ s.

   b) $x(t) = 3.cos(t + \pi/2) + sen(\pi t)$.

   Rta: No periódica. Cociente periodos irracional.

   c) $x(t) = cos^2(3t)$.

   Rta: Periódica. $T_0 = \pi/3$ s.

   d) $x[n] = cos^2[3n]$.

   Rta: No periódica.

   e) $x[n] = e^{in\pi/4}$.

   Rta: Periódica. $N_0 = 8$

   f) $x[n] = cos(2n + \pi/2)$.

   g) $x[n] = 3.cos(n + \pi/2) + sen(2\pi n/7)$.

10. Compruebe las siguientes igualdades:

   a)

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n \begin{cases} \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ N & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

   b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \qquad |\alpha| < 1$$

   c)

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \qquad |\alpha| < 1$$

   d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n.\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \qquad |\alpha| < 1$$

Aplicación en MatLab

```
%Generación de señales temporales
%Si bien MatLab trabaja con valores discretos (vectores y matrices), se generan
%vectores temporales discretizados a intervalos diferenciales de manera de poder
%considerarlos continuos

%Generación de un vector temporal
%Incremento diferencial
dt=0.01
%Generación de un vector t de 0 a 2 seg. Con intervalos de 0,01 seg.
t=0:dt:2
%Generación de las señales
x1=t+1
x2=(0.5)*t.^2+1
x3=sin(3*t)
%Visualización
subplot(311),plot(t,x1),grid
subplot(312),plot(t,x2),grid
subplot(313),plot(t,x3),grid

%Utilización de  las funciones rampa, escalón e impulso (ver apéndice I).
%Generación de la señal: x(t)=ro(t)-ro(t-4)-4u(t-4)
dt=0.01
t=0:0.01:5
x=ramp(t)-ramp(t-4)-4*esc(t-4)
figure
subplot(211),plot(t,x),grid
%Compresión temporal: x(2t)
tm=2*t
xm=ramp(tm)-ramp(tm-4)-4*esc(tm-4)
subplot(212),plot(t,xm),grid
```

Aplicación en MatLab

```
%Generación de señales discretas
%Se utilizan las mismas funciones especificadas para las continuas pero con
%vectores discretos (tiempo discreto)

%Generación de un vector discreto (incremento unitario)
n=-5:8
%Generación de las señales discretas
x1=esc(n)-esc(n-5)
x2=((0.5).^n).*esc(n)
x3=cos(pi*n)
%Visualización
figure
subplot(311),stem(n,x1),grid
subplot(312),stem(n,x2),grid
subplot(313),stem(n,x3),grid

%Desplazamiento discreto: x(n-4)
x=esc(n)-esc(n-5)
nm=n-4
xm=esc(nm)-esc(nm-5)
figure
subplot(211),stem(n,x),grid
subplot(212),stem(n,xm),grid
```

```
%FUNCIONES: Rampa, escalón e impulso
%Se utilizan las mismas funciones tanto para el caso continuo como discreto
%Generar los archivos .m con el contenido correspondiente y colocarlos en el
%directorio de trabajo

1)Función RAMPA

%--------------------------------------------------------------
%Funcion: ramp.m
%Acción:  Genera la función rampa: p(x)= x si x>0; 0 x<=0
%Entrada: x-> vector temporal (t) o discreto (n)
%Salida:  r-> vector temporal r(t) o discreto r(n)
%--------------------------------------------------------------
function r=ramp(x)
  r=x.*(x>0);


2)Función ESCALON

%--------------------------------------------------------------
%Funcion: esc.m
%Acción:  Genera la función escalón: u(x)= 1 x>=0; 0 x<0
%Entrada: x-> vector temporal (t) o discreto (n)
%Salida:  u-> vector temporal u(t) o discreto u(n)
%--------------------------------------------------------------
function u=esc(x)
  u=(x>=0);


3)Función DELTA

%--------------------------------------------------------------
%Funcion: delta.m
%Acción: Genera la función impulso: d(x)= 1/dx si x=0, 0 si x<>0
%Entrada: x-> vector temporal (t) o discreto (d)
%Salida:  d-> vector temporal d(t) o discreto d(n)
%--------------------------------------------------------------
function d=delta(x)
  dx=abs(x(2)-x(1));
  d=(1/dx).*(x<dx).*(x>-dx);
```

Capítulo 2

Sistemas LTI

2.1. Introducción

ht Para estudiar las características de un sistema y poder llegar a sintetizarlo, o sea diseñarlo en base a un conjunto de especificaciones, es necesario clasificarlos. Todo lo que nos rodea puede verse, de alguna u otra manera, como un conjunto de sistemas interconectados que responden a señales de entrada de diferentes clases. Nos ocuparemos específicamente de los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), los cuales utilizaremos a lo largo de todo el libro. Utilizaremos una nueva operación, la convolución, para estudiar sus características intrínsecas. Los sistemas LTI son muy útiles en la modelización de sistemas físicos clásicos, por lo que dedicaremos una sección al tema *modelización*. Se utilizarán conceptos de ecuaciones diferenciales lineales, por lo que se recomienda la lectura complementaria del apéndice B.

2.2. Propiedades de sistemas

Un sistema es un proceso que transforma una señal de entrada $x(t)$ (o $x[n]$) en una señal de salida $y(t)$ (o $y[n]$). Normalmente esta transformación se puede escribir, para el caso continuo o discreto, como:

$$y(t) = T\left[x(t)\right] \qquad\qquad y[n] = T\left[x[n]\right]$$

La naturaleza de las señales puede ser la misma o muy diferente. Un sistema de audio puede procesar una señal de entrada (eléctrica) para lograr amplificar los sonidos graves a la salida (eléctrica). Un micrófono es un sistema que a la entrada posee una señal mecánica (de vibración del aire sobre la cápsula) y a la salida produce una señal eléctrica. Una simple cremallera como la utilizada en la dirección de un automóvil puede traducir una rotación del volante en una traslación de las ruedas. La complejidad puede aumentar progresivamente si pensamos en controlar la temperatura de una heladera, equilibrar un sistema de suspensión o regular la velocidad de un motor. En la actualidad muchos sistemas se plantean en el campo

discreto, donde las señales intervinientes pueden ser por ejemplo imágenes o señales digitales que se obtuvieron del proceso de muestreo de alguna señal continua. La diversidad de los planteos es tan alta, que es necesario clasificar a los sistemas para agruparlos. Describiremos a continuación algunas propiedades para poder llevar a cabo esta tarea.

2.2.1. Sistemas con y sin memoria

Un sistema es *sin memoria*, si la salida actual $y(t_0)$ solo depende del valor actual de la entrada $x(t_0)$. Por ejemplo en un resistor ideal, la tensión entre sus bornes $v(t)$ y la corriente que circula a través de él $i(t)$ se relacionan por la ley de Ohm como:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

Si consideramos a $v(t)$ como entrada y a $i(t)$ como salida, este sistema es *sin memoria*. Es un sistema disipativo puro, no almacena ningún tipo de energía.

Para sistema con memoria, la salida no solo dependerá de la entrada actual, por ejemplo:

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

o para un capacitor, la relación entre la tensión y la corriente es:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{\tau=-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

donde claramente se observa que la tensión actual depende de valores de corriente anteriores. La mayor parte de los sistemas complejos poseen memoria.

2.2.2. Causalidad

Un sistema es causal cuando su salida actual depende solo del valor actual de su entrada y/o de valores previos. Estos sistemas son *no anticipativos*, ya que si colocamos dos entradas idénticas en un sistema causal hasta el instante $t = t_0$, sus salidas $y(t_0)$ siempre serán iguales. En el caso de los sistemas físicos es difícil encontrar un ejemplo de un sistema no causal, aunque podemos pensar en la emisión aleatoria de determinadas partículas donde la ecuación que las gobierne sea anticipativa. En el caso discreto es más común ya que la variable independiente no es el tiempo. Por ejemplo, una imagen digital está constituida por una matriz de valores contiguos que representan los niveles de brillo de cada punto llamado pixel. Para procesar una imagen es común que se tome un pixel y se analicen los vecinos para el cálculo del pixel de salida. Por ejemplo, si $y[n]$ es el pixel de salida actual, $x[n-1]$ es el pixel anterior y $x[n+1]$ es el próximo, aplicar la siguiente transferencia a todos los pixels,

$$y[n] = \frac{x[n-1] + x[n+1]}{2}$$

es un proceso que, para cada pixel de la imagen origen, promedia los vecinos para calcular el valor del pixel central de la imagen resultado. Este es un sistema no causal ya que utiliza un valor de la entrada posterior $x[n+1]$.

2.2.3. Estabilidad

El concepto de estabilidad se puede describir de una manera muy intuitiva, aunque su determinación es relativamente complicada. Un sistema estable se refiere a aquel que para una pequeña señal de entrada, su salida no diverge. Es común pensar que un sistema que oscila no es estable y esto no es cierto. Lo importante es si la amplitud de la oscilación se mantiene dentro de márgenes acotados. Aunque este es un caso extremo es necesario definir con más rigurosidad el concepto de estabilidad que utilizaremos.

La estabilidad *BIBO* (bounded input bounded output) es muy utilizada y se refiere a lo siguiente:

Definición 2.2.1 *Un sistema es BIBO estable si para toda entrada acotada, su salida es acotada.*

Las señales de entrada que utilizaremos serán de una única variable dependiente, y por lo tanto el concepto de *acotada* se refiere a su amplitud. En caso de haber más variables independientes se debe aplicar el concepto de norma. Si para alguna entrada acotada en amplitud, la salida diverge, entonces ese sistema es inestable.

Un ejemplo típico es el sistema para el cual la salida actual es la suma de todos los valores anteriores:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Este es un sistema inestable, ya que si colocamos un escalón en la entrada ($u[n]$ es acotado), la salida diverge:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = (n+1)u[n]$$

Para probar la estabilidad de un sistema es habitual someterlo a señales acotadas a la entrada e intentar desestabilizarlo.

2.2.4. Invariancia en el tiempo

Un sistema es invariante en el tiempo si al desplazar la entrada (adelantarla o atrasarla en tiempo), la salida se desplaza en la misma proporción. Si por ejemplo conocemos cómo responde un sistema al aplicar un escalón en su entrada:

$$y_1[n] = T\left[u[n]\right]$$

luego al colocar el mismo escalón pero desplazado, solo debemos desplazar la salida:

$$T\left[u[n-n_0]\right] = y_1[n-n_0]$$

Este concepto es central en la caracterización de sistemas. Para verificar si un sistema es o no invariante en el tiempo debemos comprobar que al aplicar una entrada desplazada, su salida se desplace en igual proporción. Por ejemplo, analicemos el siguiente sistema:

$$y(t) = t.x(t)$$

Si aplicamos una señal de entrada $x_1(t)$, obtenemos la salida $y_1(t)$ como:

$$y_1(t) = t.x_1(t)$$

Si ahora colocamos la misma entrada pero desplazada $x_2(t) = x_1(t-t_0)$, obtenemos a la salida:

$$y_2(t) = t.x_2(t) = t.x_1(t-t_0)$$

que vemos que no coincide con desplazar la salida anterior, ya que

$$y_1(t-t_0) = (t-t_0).x_1(t-t_0) \neq y_2(t)$$

Por lo tanto este sistema no es invariante en el tiempo.

Este concepto aplicado a sistemas físicos puede interpretarse de la siguiente manera. Por ejemplo, un sistema mecánico compuesto por una masa (M), un resorte (K) y un rozamiento viscoso (B) como el de la figura 2.13 puede analizarse en término de una señal de fuerza de entrada y una posición como salida. Si los valores de los parámetros M,K y B no varían con el tiempo, entonces ante idénticas entradas el sistema responderá con desplazamientos equivalentes **sin importar el instante en que se apliquen las fuerzas**. Este sistema será entonces invariante en el tiempo. Ahora si por el contrario, el valor de la constante clástica del resorte K varía con la temperatura, el sistema responderá en forma diferente en función de la temperatura en el instante de aplicar la fuerza. Este sistema no será invariante en el tiempo. En general, los sistemas basados en ecuaciones diferenciales lineales ordinarias, si sus coeficientes son constantes, son invariantes en el tiempo.

2.2.5. Linealidad

Un sistema lineal es aquel que cumple con la propiedad de superposición. Si se coloca una combinación lineal de señales en la entrada, la salida es la suma de las respuesta individuales a cada entrada. Esto se puede resumir en dos exigencias:

Definición 2.2.2 *Un sistema es lineal si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

1. *Si se coloca la suma de dos señales a la entrada, la salida es la suma de las respuestas individuales:*

$$T\left[x_1(t)+x_2(t)\right] = T\left[x_1(t)\right] + T\left[x_2(t)\right] = y_1(t)+y_2(t)$$

2. *Si se coloca una señal escalada por una constante, la misma puede salir fuera de la transformación:*

$$T\left[\alpha.x_1(t)\right] = \alpha.T\left[x_1(t)\right] = \alpha.y_1(t) \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

Esta última condición permite mostrar una peculiaridad importante para los sistemas lineales. Si la entrada de un sistema lineal es cero, su salida es cero. Esto sucede ya que si $\alpha = 0$, entonces:

$$T\left[\underbrace{\alpha}_{=0}.x(t)\right] = \underbrace{\alpha}_{=0}.T\left[x(t)\right] = 0$$

Esta condición es necesaria pero no suficiente, aunque en muchos casos es fácil de verificar. Es por eso que el lector puede comprobar que el siguiente sistema no es lineal, a pesar de su apariencia:

$$y(t) = 3.x(t) + 4$$

Si por ejemplo tomamos un sistema lineal como el siguiente:

$$y(t) = T\left[x(t)\right]$$

y aplicamos dos señales de entrada $x_1(t)$ y $x_2(t)$ escaladas por constantes α y β, observamos a la salida:

$$T\left[\alpha.x_1(t) + \beta.x_2(t)\right] = \alpha.T\left[x_1(t)\right] + \beta.T\left[x_2(t)\right] = \alpha.y_1(t) + \beta.y_2(t) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

El concepto de linealidad es central y debe ser revisado con atención. La principal ventaja que posee un sistema lineal es que puede ser estudiado descomponiendo su entrada como suma de señales. De esta forma se puede analizar individualmente cada respuesta y sumarlas al final. Piense qué interesante sería poder descomponer cualquier señal arbitraria de entrada en señales constitutivas que puedan ser analizadas individualmente. De esta forma, analizando la respuesta a esta única señal constitutiva, se podría estimar la respuesta de cualquier otra. Este concepto se extenderá en varios capítulos del texto.

2.3. Sistemas LTI

Entre todos los tipos de sistemas que existen nos dedicaremos casi exclusivamente a los que son lineales e invariantes en el tiempo (LTI). Trabajaremos sobre ellos siguiendo el siguiente razonamiento. Supongamos que contamos con una entrada arbitraria al sistema y su respectiva salida. Sabemos que si colocamos la misma entrada escalada, obtenemos una salida escalada (linealidad), y que si desplazamos la entrada, la salida se desplaza en igual medida (invariancia en el tiempo). Lo que intentaremos hallar es alguna manera de

predecir que acontecerá a la salida si colocamos ahora una entrada genérica. Esto puede sonar inicialmente descabellado, aunque veremos que posee una lógica muy interesante.

Comencemos recordando que cualquier señal discreta se puede descomponer en deltas (impulsos) escalados y desplazados, como demostramos en la ecuación 1.7 y que reproducimos a continuación por comodidad:

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]}$$

Si ahora colocamos un delta ($\delta[n]$) en la entrada y denominamos a la salida $y[n] = h[n]$, al ingresar cualquier señal discreta podemos descomponerla en la suma de deltas escalados y desplazados. Utilizando las propiedades de linealidad e invariancia al impulso podemos hallar la respuesta para cada delta, y sumar los resultados. Es así como **solo conociendo la salida del sistema al colocar un impulso en la entrada podemos predecir la salida para una entrada genérica**.

Así como las señales discretas se pueden descomponer en término de impulsos, demostramos que lo mismo sucede para las señales continuas con la ecuación 1.4:

$$\boxed{x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

Para profundizar en este concepto definamos:

Definición 2.3.1 *Sea un sistema LTI continuo o discreto, de entrada $x(t)$ (o $x[n]$) y salida $y(t)$ (o $y[n]$), al que se le aplica un impulso en su entrada: $x(t) = \delta(t)$ (o $x[n] = \delta[n]$). Denominaremos a su salida $h(t)$ (o $h[n]$)* **respuesta impulsional** *o* **respuesta al impulso***:*

$$\boxed{h(t) = T[\delta(t)] \qquad\qquad h[n] = T[\delta[n]]}$$

O sea la respuesta impulsional de un sistema es la salida cuando en la entrada se coloca un impulso en el origen (delta). Al conocer la respuesta impulsional, y sabiendo que cualquier señal se puede descomponer en términos de impulsos, podemos calcular la salida a una entrada genérica (sin necesidad de realmente ingresarla) mediante una operación denominada convolución.

2.4. Convolución

La convolución se simbolizará con un asterisco, por ejemplo la convolución entre dos señales discretas la escribiremos como $x_1[n] * x_2[n]$ y en el caso continuo $x_1(t) * x_2(t)$. Comenzaremos describiendo la convolución de señales discretas debido a que es más sencillo. Luego nos ocuparemos de la convolución de señales continuas que requiere de mucha práctica para ser implementada correctamente.

2.4.1. La sumatoria de convolución

Utilicemos la descomposición de cualquier señal discreta en términos de deltas:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Si ahora aplicamos la transformación para hallar la salida del sistema, observamos que

$$y[n] = T\left[x[n]\right] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right]$$

donde si el sistema es lineal podemos aplicar la transformación a cada término

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\left[x[k]\delta[n-k]\right]$$

y sacar los términos $x[k]$ que son constantes ya que no dependen de n (linealidad):

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].\underbrace{T\left[\delta[n-k]\right]}_{h[n-k]}$$

Observamos entonces que la transformación de deltas desplazados k muestras son las respuesta impulsionales desplazadas (invariancia en el tiempo). Finalmente, la sumatoria de convolución que muestra **la relación temporal entre la entrada y la salida de un sistema LTI** es:

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]} \tag{2.1}$$

Esta relación es central, fundamental y clave para comprender la caracterización de sistemas LTI. Una de las primeras conclusiones que podemos sacar es que las propiedades intrínsecas del sistema, el corazón del mismo, está totalmente descripto por su respuesta impulsional. Si conocemos la respuesta impulsional de un sistema, podemos hallar la salida del mismo para cualquier entrada utilizando la ecuación 2.1. El cálculo de esta sumatoria puede realizarse analíticamente, aunque el método gráfico contribuye a la comprensión y simplificación del problema.

Método gráfico

Como la ecuación posee varios desplazamientos comencemos utilizando una señal de entrada $x[n] = 3.\delta[n] + 2.\delta[n-1] + \delta[n-2]$ de ejemplo y calculemos $x[-n]$, $x[1-n]$, $x[-1-n]$ y genéricamente $x[n_0 - n]$:

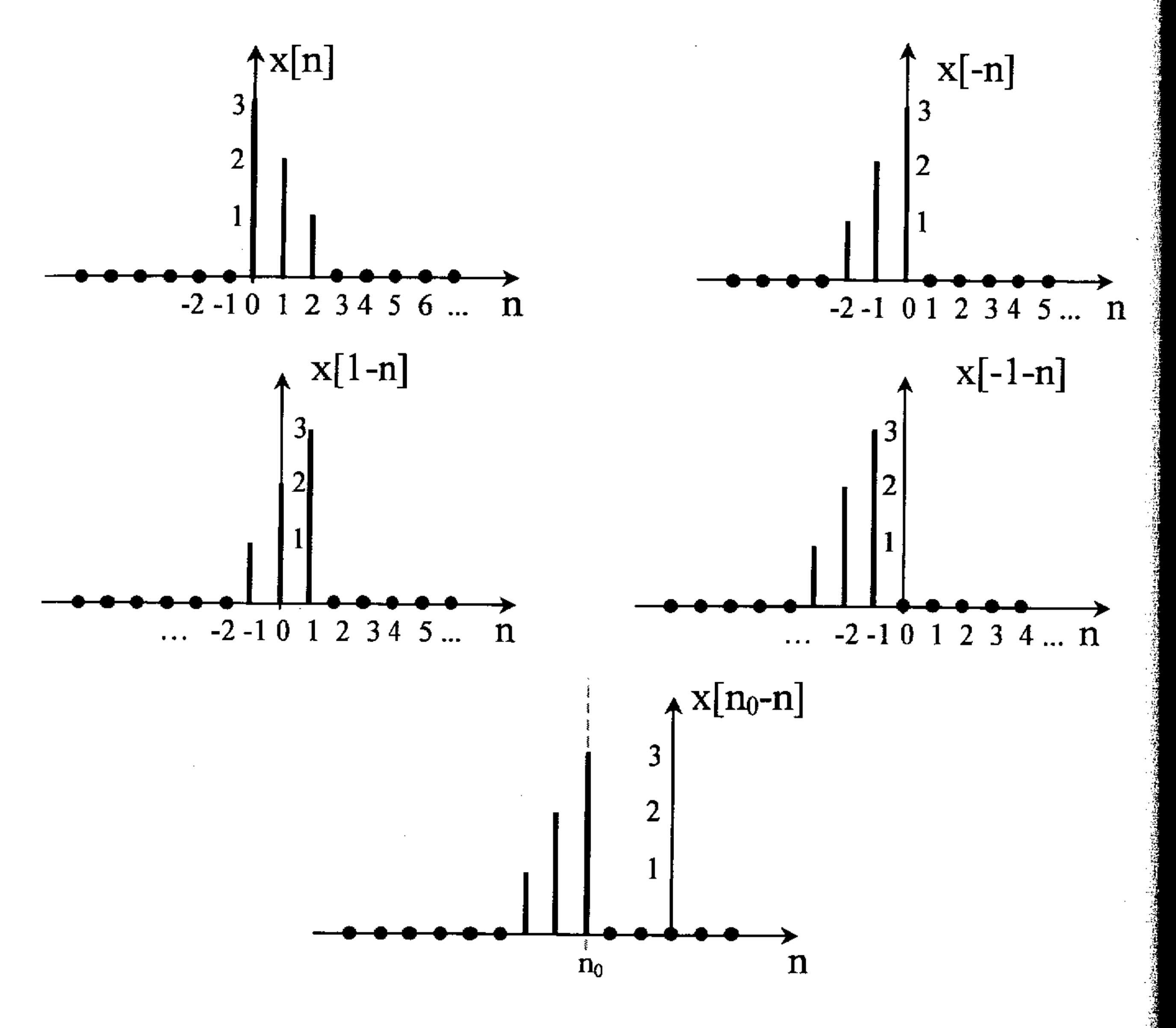


Figura 2.1: Señales discretas desplazadas de ejemplo.

Observe claramente el efecto de espejo con respecto al eje vertical que produce la expresión $x[-n]$ y asegúrese de comprender perfectamente que $x[n_0 - n]$ desplaza la señal espejada hasta la posición n_0.[1]

Utilicemos la señal $x[n]$ anterior y convoluciónémosla con una respuesta impulsional como por ejemplo $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ para obtener la salida del sistema. Note en la ecuación 2.1 que las señales intervinientes en la sumatoria son $x[k]$ y $h[n-k]$. La primera es fácil de obtener ya que es idéntica a $x[n]$ pero cambiando su variable por k. La segunda es la

[1]Cuando uno desplaza una señal $x[n - n_0]$, el signo negativo implica que si $n_0 > 0$ el desplazamiento es hacia la **derecha** y si $n_0 < 0$ el desplazamiento es hacia la **izquierda**. Si ahora analizamos $x[n_0 - n]$ debemos primero espejar la señal y luego desplazarla n_0 lugares a la **derecha** si $n_0 > 0$ o n_0 lugares a la izquierda si $n_0 < 0$.

señal $h[k]$ (idéntica a $h[n]$ pero con variable k), *espejada* ($h[-k]$) y desplazada n posiciones $h[n-k]$:

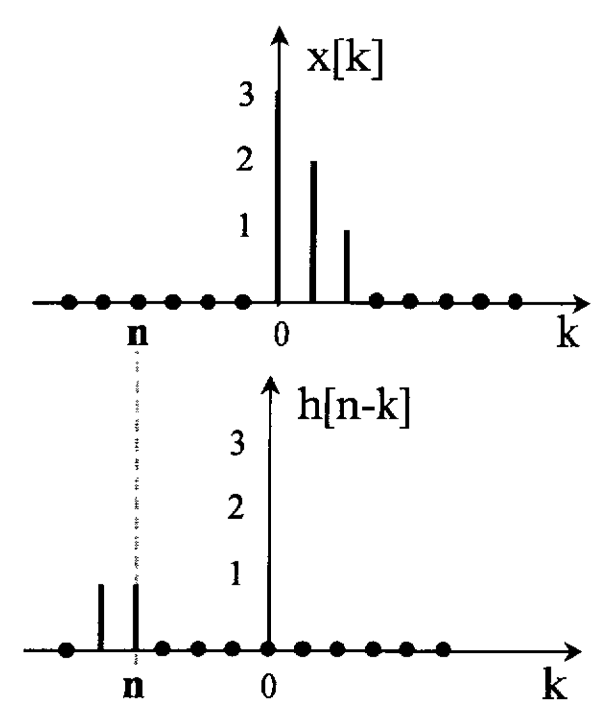


Figura 2.2: Señales ejemplo para la realización de la sumatoria de convolución.

Para calcular la salida es necesario hacerlo muestra a muestra. La salida $y[n]$ depende del valor de n. Esta variable es la que desplaza al $h[n-k]$, y por lo tanto para cada uno de los valores de salida es necesario desplazar $h[n-k]$ convenientemente, multiplicarlo punto a punto por $x[k]$, y luego calcular la sumatoria de las muestras resultantes. Este procedimiento debe realizarse para cada valor de n obteniéndose el respectivo $y[n]$. Recuerde que $x[k]$ queda siempre fija, y es $h[n-k]$ la que debemos ir desplazando.

Analicemos punto a punto este caso. Para $n < 0$, el producto punto a punto entre $x[k]h[n-k]$ da siempre cero, nunca hay muestras solapadas como muestra la figura 2.2. Por lo tanto $y[n] = 0, \quad n < 0$. Para $n = 0$ tenemos la situación de la figura 2.3. Si ahora aplicamos la sumatoria de las muestras resultantes (en este caso solo quedó una muestra), el resultado es $y[n = 0] = 3$. Todo este procedimiento permitió hallar un único punto de la señal de salida para $n = 0$.

Veamos qué sucede para el caso de $n = 1$. Desplazamos $h[n-k]$ un lugar a la derecha y multiplicamos punto a punto. Observe el resultado en la figura 2.4.

Si ahora realizamos la sumatoria de las muestras resultantes (dos en este caso), obtenemos $y[n = 1] = 3+2 = 5$. Puede seguir el mismo razonamiento para $n = 2$ donde notará que nuevamente hay solo dos muestras resultantes $y[n = 2] = 2+1 = 3$. Para $n = 3$ solo una $y[n = 3] = 1$, y a partir de allí no obtenemos más solapamiento, por lo tanto para $n > 3$, $y[n] = 0$. Graficamos el resultado $y[n]$ en la figura 2.5(observe que el resultado debe quedar

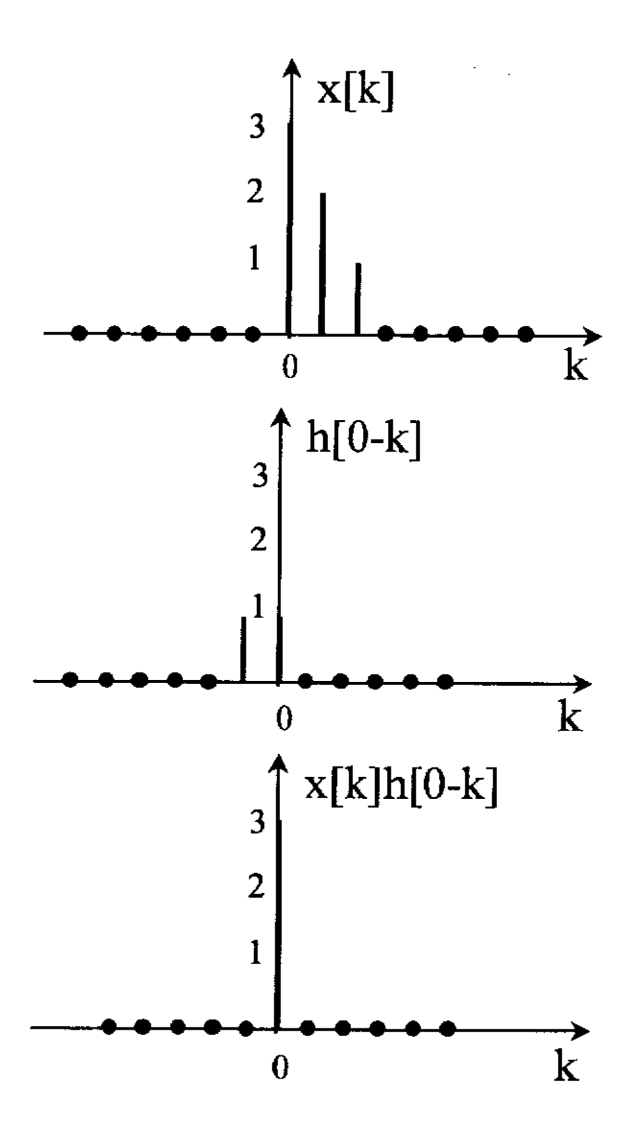


Figura 2.3: Convolución para n=0

en función de n).

Debemos remarcar el objetivo de la operación de convolución. En este caso la respuesta impulsional era conocida: $h[n]$. Con ella pudimos, sin necesidad de introducir la entrada $x[n]$ en el sistema real, calcular cual será la salida $y[n]$ que aparecería si colocamos $x[n]$ en la entrada: $y[n] = x[n] * h[n]$.

La respuesta impulsional $h[n]$ es la salida del sistema al aplicar un delta en la entrada., centrado en el origen: $x[n] = \delta[n]$. Como cualquier señal de entrada puede descomponerse en suma de deltas desplazados y escalados, y dado que el sistema es lineal invariante en el tiempo, la salida puede reconstruirse para cada delta. El proceso de reconstrucción se resume con el método de convolución. Sin embargo, el lector puede comprobarlo en este caso expresando a la entrada como la suma de 3 señales independientes: $3.\delta[n]$, $2.\delta[n-1]$ y $\delta[n-2]$. Luego calcular las salidas a través de la respuesta al impulso como $3.h[n]$, $2.h[n-1]$ y $h[n-2]$, respectivamente. La sumatoria de estas 3 salidas configuran la $y[n]$.

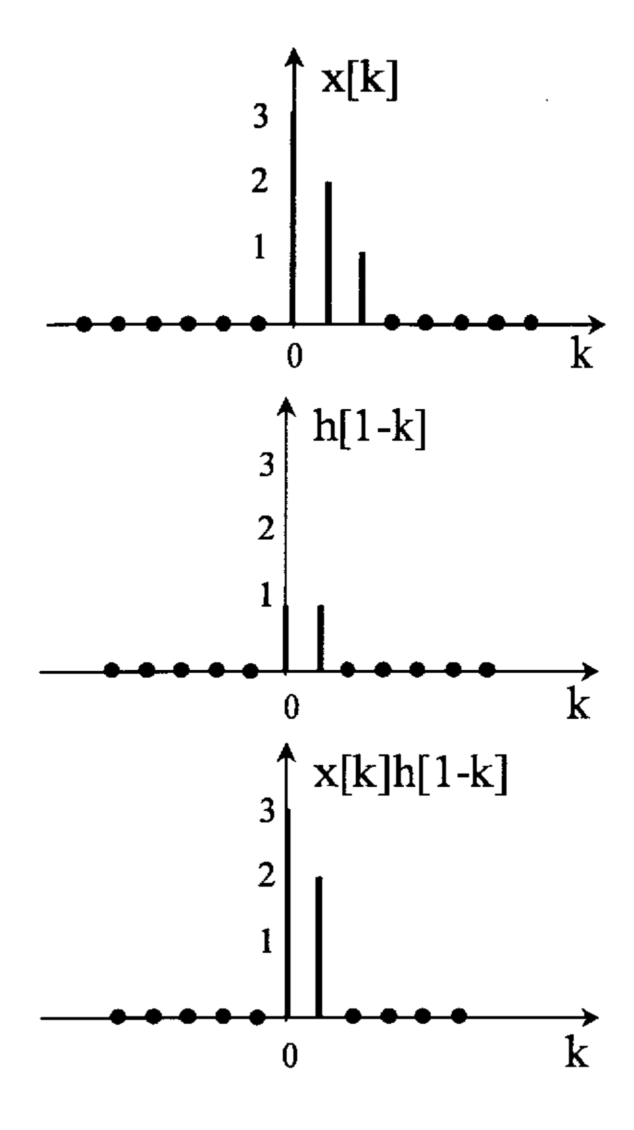


Figura 2.4: Convolución para n=1

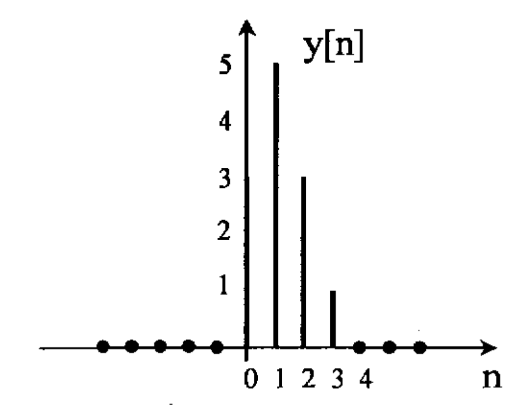


Figura 2.5: Resultado de la convolución

2.4.2. La integral de convolución

Así como en el caso discreto, una señal continua también puede ser descripta en término de deltas:

$$x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Si aplicamos la transformación en ambos miembros para hallar la salida $y(t)$ del sistema LTI:

$$y(t) = T\left[x(t)\right]$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} y(t) &= T\left[x(t)\right] = T\left[\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\underbrace{T\left[\delta(t-\tau)\right]}_{h(t-\tau)}d\tau \end{aligned}$$

donde la transformación no afecta a $x(\tau)$ ya que no depende de t. Recordando que la salida de un sistema LTI a un impulso es su respuesta impulsional $h(t)$, y utilizando la invariancia al impulso, concluimos en:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau} \qquad (2.2)$$

donde vemos que **la salida de un sistema LTI es el resultado de la convolución entre la entrada y la respuesta impulsional del mismo**.

Para realizar el cálculo analítico de esta integral se puede recurrir a dos métodos. El primero es un método gráfico, donde los límites de la integral (en τ) se colocan contemplando desplazamientos gráficos, para luego hacer la integral en forma analítica. El segundo es completamente analítico. Este último suele ser más complicado ya que se pierde la noción del posible resultado. Analizaremos los dos casos a continuación.

Método gráfico

La operación de convolución en el caso continuo es más complicada de realizar que para su contraparte discreto ya que no se puede *avanzar de a una muestra*. Es por eso que es necesario determinar, utilizando el gráfico, zonas de integración tanto para la variable

independiente t, como para los límites de la integral τ. A pesar de esto, siempre es posible calcular el valor de la salida para un punto específico $y(t = t_0)$; para esto es necesario realizar el producto entre la función $x(\tau)$ y la desplazada $h(t_0 - \tau)$ para cada intervalo en t, y luego integrar en τ el resultado de ese producto. Todos estos pasos son necesarios para obtener un único punto de la salida: $y(t_0)$.

Para poder hacer más genérico el resultado, calcularemos los valores de la salida para intervalos de t que comprendan tramos ”homogéneos.º continuos en las señales a convolucionar. Estos tramos se determinarán gráficamente. Luego se procederá, manteniendo $x(\tau)$ fija, a desplazar a $h(t-\tau)$ para los valores de t determinados y encontrar los **límites genéricos de integración de τ en función de t.**

Utilicemos como ejemplo las siguientes señales: entrada $x(t) = u(t) - u(t-2)$ y respuesta impulsional $h(t) = e^{-t}u(t)$. La salida $y(t)$ del sistema será:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Para realizar el cálculo debemos conformar la señal $x(\tau)$ que no es más que $x(t)$ pero con variable τ; y luego presentar la función $h(t-\tau)$. Esta función está espejada $(h(-\tau))$ y se desplazará, dependiendo el valor de t, tal como lo hacía su contraparte discreta. Si t es positiva se desplazará a la derecha, y si es negativa a la izquierda. El espejado es siempre con respecto al eje vertical, así como los desplazamientos.

Como el objetivo es encontrar la salida $y(t)$ para todo t, es necesario desplazar la señal $h(t-\tau)$ desde $-\infty$ hasta $+\infty$. A medida que nos desplacemos encontraremos diferentes situaciones para el resultado del producto $x(\tau)h(t-\tau)$, es por eso que la convolución se hace de a tramos homogéneos determinados gráficamente. Si comenzamos con $t = -\infty$, veremos que no hay solapamiento entre las funciones y por lo tanto $y(t) = 0$. Note por ejemplo qué sucede para $t = -2$ observando la figura 2.6.

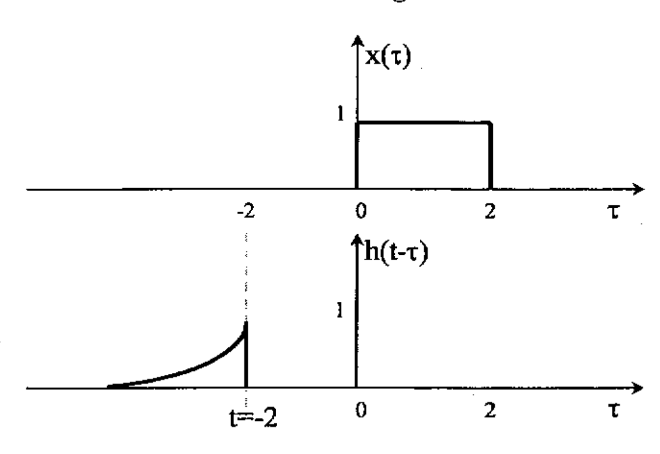


Figura 2.6: Ejemplo de señales a convolucionar para $t = -2$.

Debe quedar claro que primero se espejó la señal $h(t)$, de manera de quedar $h(-\tau) = e^{-(-\tau)}u(-\tau)$, y luego se la desplaza quedando $h(t-\tau) = e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)$. Como se observa

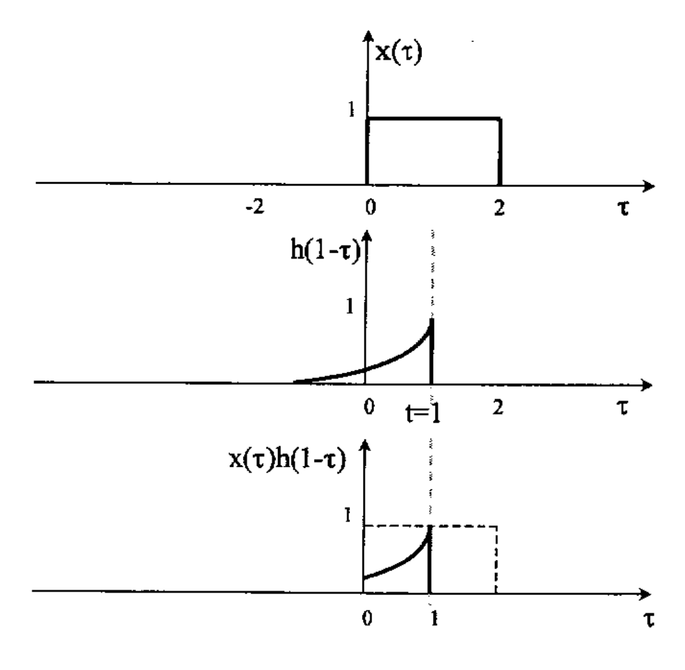


Figura 2.7: Ejemplo para $t = 1$

gráficamente, no habrá solapamiento hasta que t sea igual a cero, por lo tanto: $y(t) = 0$ para $t < 0$. Es así como gráficamente se determinan las zonas homogéneas.

Veamos ahora qué sucede cuando $t > 0$. La exponencial espejada comienza a entrar en la zona del pulso, aunque queda claro que la integral será la misma solo hasta que t alcance el valor de $t = 2$, donde el pulso de $x(t)$ finaliza. Es así como la próxima zona de trabajo será para $2 > t > 0$. Dibujemos qué sucede, por ejemplo, para $t = 1$ en la figura 2.7.

Esta es la parte más complicada de entender. Como lo que se desea calcular es la integral, pero no para un único valor de t, sino para un intervalo $t = [0, 2]$, debemos deducir los límites de integración de τ correspondientes para cada valor de t. La integral representa el **área del resultado del producto** de $x(\tau)h(t - \tau)$.

Los límites de esta integral son:

- Para el caso del límite inferior, siempre está determinado por $x(\tau)$, que es la función que recorta la exponencial **siempre** en $\tau = 0$.

- El límite superior se va desplazando junto con el desplazamiento de la función exponencial. En la figura, y para el caso de $t = 1$ se ve claramente como el límite superior es $\tau = 1$. Es así que a medida que t aumente desde $t = 0$ a $t = 2$, el límite superior acompaña esa variación, por lo tanto el límite superior es $\tau = t$.

Finalmente hacemos el cálculo analítico de la integral, incluyendo las funciones.[2] ($x(\tau) = 1$ para todo el intervalo):

[2] Recuerde que la integración se hace con respecto a τ.

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t} 1.e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-(t-\tau)} \Big|_{0}^{t} = 1 - e^{-t} \qquad 2 > t > 0$$

Si ahora $t > 2$ tenemos un tercer tramo de análisis. Grafiquemos qué sucede para $t = 3$ en la figura 2.8.

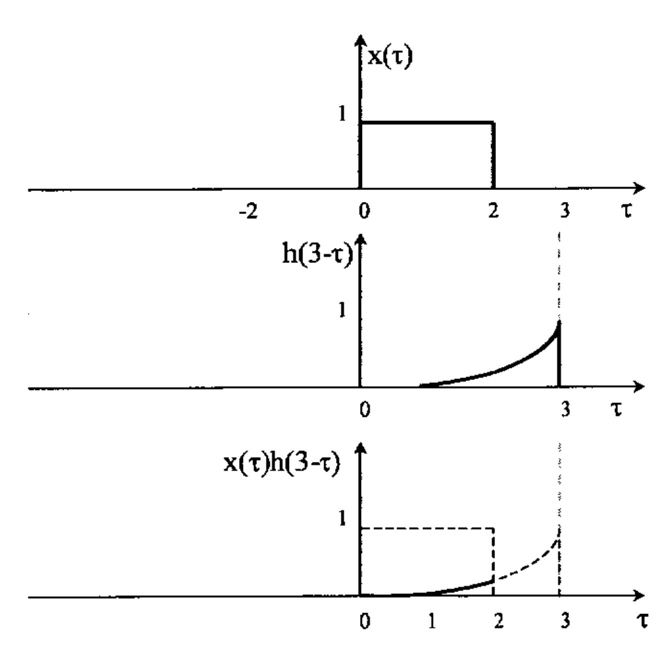


Figura 2.8: Ejemplo para t=3.

Vemos que para $t > 2$, los límites de la integral están totalmente determinados por la señal $x(\tau)$, que es la que recorta a la exponencial en $\tau = 0$ y $\tau = 2$ sin importar el valor de t. Es por eso que:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{2} 1.e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-(t-\tau)} \Big|_{0}^{2} = e^{-(t-2)} - e^{-t} \qquad t > 2$$

Así finalizamos expresando a la salida $y(t)$ como:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{si } 2 > t > 0 \\ e^{-(t-2)} - e^{-t} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

De esta forma resumimos los pasos necesarios para realizar la convolución $x(t) * h(t)$:

1. Dibujar la señal $x(\tau)$, idéntica a $x(t)$ pero con la variable τ.

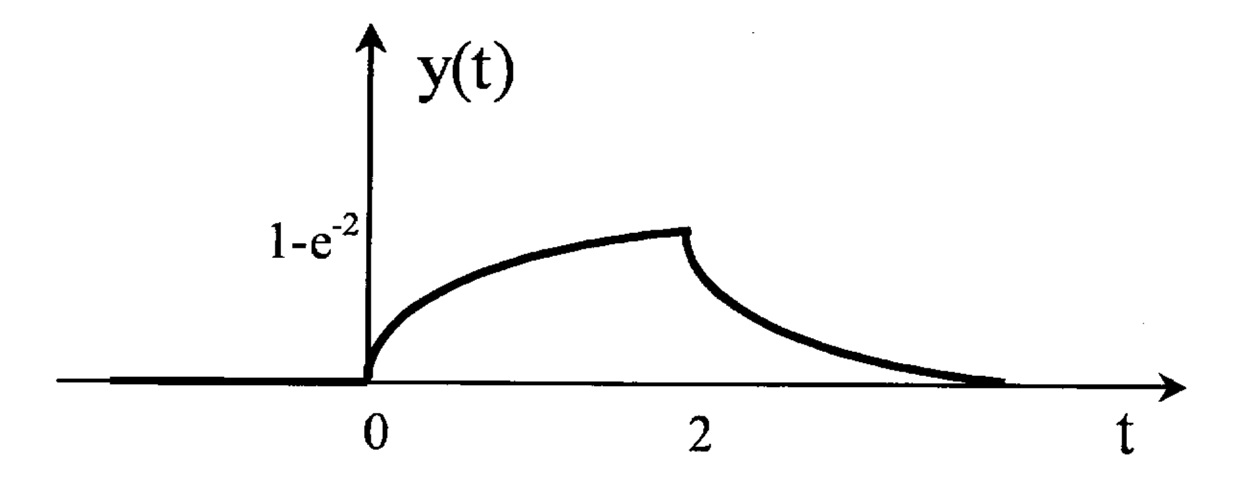


Figura 2.9: Resultado de la convolución.

2. Espejar la función $h(t)$ con respecto al eje vertical $t = 0$ y cambiar la variable por τ, obteniendo $h(-\tau)$.

3. Para cada valor de la salida $y(t)$ es necesario desplazar la función espejada $h(t-\tau)$, multiplicarla por la función fija $x(\tau)$ y calcular el área encerrada del resultado de esa multiplicación. Valores de $t > 0$ desplazan la función espejada hacia la derecha, mientras que valores negativos $t < 0$ la desplazan hacia la izquierda.

4. Como se desea hallar la salida $y(t)$ para todo valor de t, es necesario partir el análisis en regiones homogéneas donde el producto $x(\tau)h(t-\tau)$ permita realizar una integral genérica. Es necesario entonces determinar el intervalo de la variable t que se calculará.

5. Luego de elegir el intervalo de t es necesario colocar los límites de la integral en función de τ. Estos límites pueden ser fijos o dependientes del valor de t, según sea la morfología de las señales.

6. Es necesario realizar los dos últimos pasos para cada tramo hasta recorrer todo el eje real.

Método analítico

Veamos cómo realizar la integral de convolución sin utilizar el gráfico. La complejidad de las funciones a convolucionar es crítica y determinante en la utilización de este método. Como ejemplo plantearemos $x(t) = u(t) - u(t-2)$ y $h(t) = e^{-t}u(t)$. Calculemos la

convolución como

$$y(t)=x(t)*h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} [u(\tau)-u(\tau-2)]\left[e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\right]d\tau$$
$$= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau - \int_{\tau=-\infty}^{\infty} u(\tau-2)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

El problema radica en determinar los límites de integración. Para la primer integral el producto $u(\tau)u(t-\tau)$ es igual a uno, solo en el caso en que $\tau>0_\wedge t-\tau>0 \Rightarrow \tau<t$. Además como $t>\tau_\wedge\tau>0$ entonces $t>0$. Para la segunda integral, el producto $u(\tau-2)u(t-\tau)$ es igual a uno, solo para $\tau-2>0 \Rightarrow \tau>2_\wedge t-\tau>0 \Rightarrow \tau<t$. Como ahora $t>\tau_\wedge\tau>2$ entonces $t>2$. De esta manera encontramos tanto los límites de la integral en τ como los intervalos de validez de cada una en t. Por lo tanto las integrales quedan:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t} e^{-(t-\tau)}d\tau - \int_{\tau=2}^{t} e^{-(t-\tau)}d\tau$$
$$= e^{-(t-\tau)}\Big|_0^t - e^{-(t-\tau)}\Big|_2^t$$
$$= \underbrace{1-e^{-t}}_{t>0} - \underbrace{\left(1-e^{-(t-2)}\right)}_{t>2}$$

donde todos los escalones se eliminaron ya que su valor es uno en esos intervalos. Para valores de $2>t>0$, solo la primer parte es la solución: $y(t)=1-e^{-t}, 2>t>0$, mientras que para $t>2$, al sumar la segunda parte queda $y(t)=e^{-(t-2)}-e^{-t}$, donde se confirma el resultado obtenido por el método gráfico.

2.4.3. Propiedades

Es fácil demostrar que la convolución es asociativa y conmutativa. Además posee la siguiente relación con respecto al producto por un escalar:

- Asociativa: $(x_1(t)*x_2(t))*x_3(t) = x_1(t)*(x_2(t)*x_3(t))$.
- Conmutativa: $x_1(t)*x_2(t) = x_2(t)*x_1(t)$.
- Producto por un escalar $\alpha\in\mathbb{C}$: $\alpha.(x_1(t)*x_2(t)) = (\alpha.x_1(t))*x_2(t) = x_1(t)*(\alpha.x_2(t))$

Por lo tanto si se realiza la convolución por el método gráfico es indistinto cuál de las dos funciones se espeja. La ecuación 2.2 puede ser reescrita como

$$y(t) = x(t)*h(t) = h(t)*x(t)$$
$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

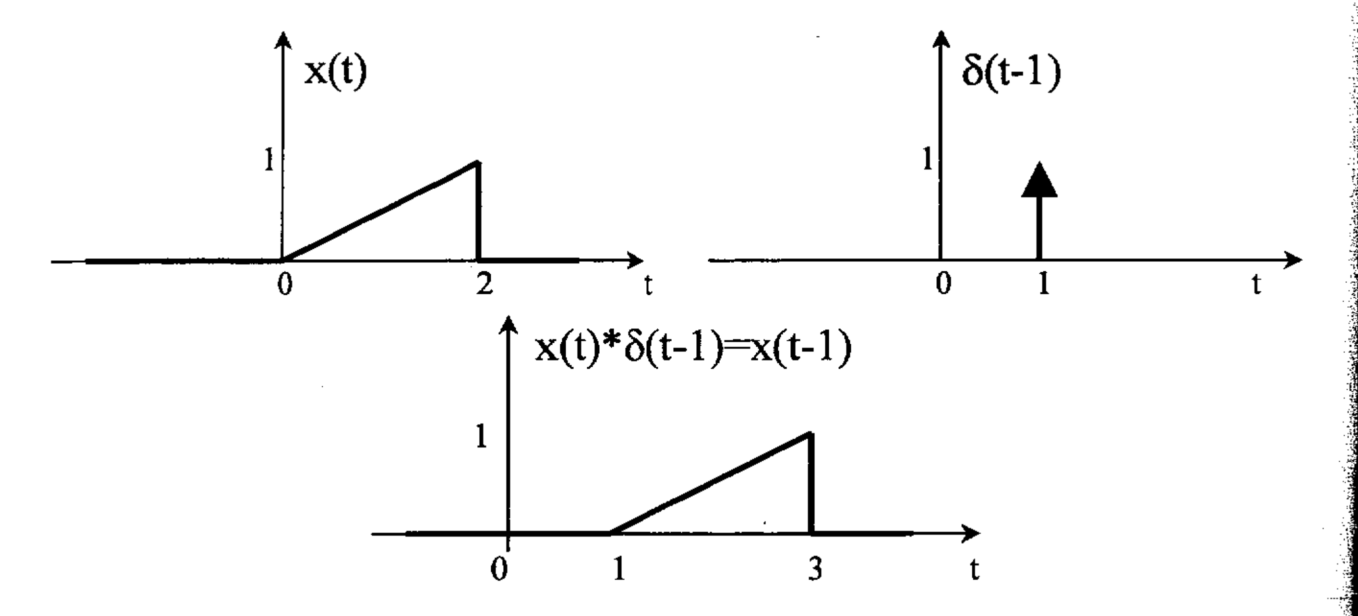


Figura 2.10: Convolución con deltas desplazados.

Destaquemos además que la convolución no posee una operación inversa y por lo tanto no se la puede "pasar del otro lado"de ninguna igualdad.

Observemos además qué sucede al convolucionar una señal continua o discreta con un delta desplazado. En el caso continuo planteamos :

$$\begin{aligned}
x(t) * \delta(t-t_0) &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau \\
\delta(t-t_0) * x(t) &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(\tau-t_0)x(t-\tau)}_{\delta(\tau-t_0)x(t-t_0)} d\tau \\
&= x(t-t_0). \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t_0)d\tau}_{=1} \\
x(t) * \delta(t-t_0) &= x(t-t_0)
\end{aligned}$$

donde utilizamos la propiedad conmutativa y además el hecho que el área bajo un delta es siempre igual a uno. Gráficamente esto implica que al convolucionar una función $x(t)$ con un delta, se produce un desplazamiento de la función hacia la posición donde está situado el delta. **No se debe espejar la función** y siempre el desplazamiento es desde el eje $t = 0$. Veamos un ejemplo gráfico para una función $x(t)$ y una respuesta impulsional $h(t)$ cualquiera:

Para el caso discreto escribimos:

$$\begin{aligned}
x[n] * \delta[n-n_0] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-n_0-k] \\
\delta[n-n_0] * x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta[k-n_0]x[n-k]}_{\delta[k-n_0]x[n-n_0]} \\
&= x[n-n_0]. \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-n_0]}_{=1} \\
x[n] * \delta[n-n_0] &= x[n-n_0]
\end{aligned}$$

donde el resultado se puede verificar gráficamente en forma análoga al caso continuo.

2.5. La respuesta indicial

Un sistema LTI está completamente caracterizado por su respuesta al impulso $h(t)$. De esta forma la salida $y(t)$ para cualquier entrada $x(t)$ se halla utilizando la convolución: $y(t) = x(t) * h(t)$. Como conocer la respuesta impulsional es indispensable y concentra toda información inherente del sistema, en la práctica sería deseable hallarla fácilmente. Para esto, sería necesario colocar un impulso $\delta(t)$ en la entrada y registrar la salida. La señal delta o impulso no es una señal fácil de implementar en la práctica. Para un sistema eléctrico, sería una tensión de amplitud infinita y duración cero, o un pulso de corriente de las mismas características. Para un sistema mecánico, representaría un .empujón"de fuerza infinita y duración cero. Este tipo de excitación no práctica y es por eso que demostraremos a continuación que se puede utilizar como excitación alternativa un escalón $u(t)$. El escalón es una señal más sencilla de obtener.

La respuesta de un sistema al escalón se denomina respuesta indicial. La respuesta indicial es la salida de un sistema cuando se aplica un escalón en la entrada y la denominaremos como $s(t)$. Podemos entonces decir que:

$$u(t) * h(t) = s(t)$$

La información contenida en la respuesta indicial es similar a la contenida en la respuesta impulsional. Veamos su relación analítica planteando la convolución y derivando en ambos miembros con respecto a t:

$$s(t) = u(t) * h(t) = h(t) * u(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)\frac{du(t-\tau)}{dt}d\tau$$

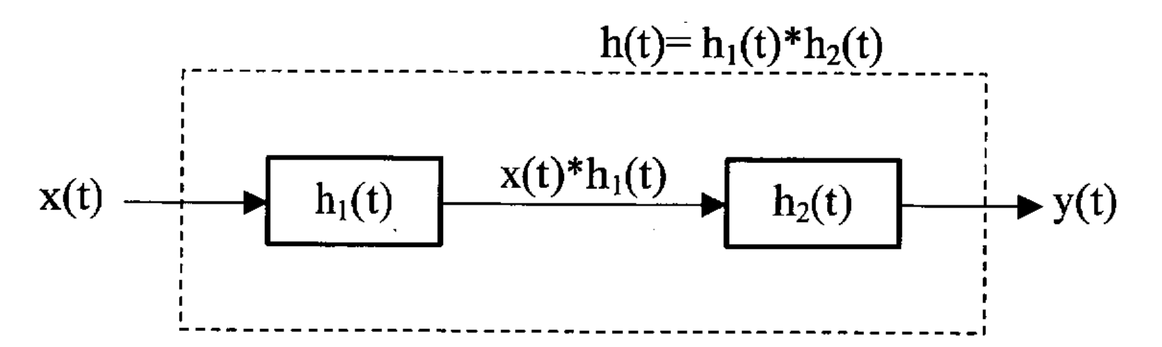


Figura 2.11: Sistemas conectados en cascada o en serie.

donde la derivada entra dentro de la integral ya que nò es función de τ. Además recuerde que:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

por lo tanto:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = h(t) * \delta(t) = h(t)$$

Finalmente encontramos la relación entre la respuesta impulsional y la indicial:

$$\boxed{\frac{ds(t)}{dt} = h(t)} \qquad (2.3)$$

La respuesta impulsional es la derivada de la respuesta indicial. Se confirma de esta forma que toda la información intrínseca del sistema está plasmada tanto en su respuesta impulsional como en su respuesta indicial. Recuerde sin embargo que la salida para una entrada genérica solo se logra convolucionando la entrada con la respuesta impulsional.

2.6. Sistemas LTI en cascada

Utilizando las propiedades asociativa y conmutativa de la convolución, podemos mostrar cuál es la respuesta al impulso de un conjunto de sistemas LTI conectados en serie o paralelo.

El primer caso lo esquematizamos de la siguiente manera:

donde $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son las respuestas impulsionales de ambos sistemas. Esta combinación se denomina en cascada o en serie. La respuesta impulsional del sistema completo (líneas punteadas) es simplemente la convolución de las respuestas individuales:

$$y(t) = x(t) * \underbrace{h(t)}_{?} = x(t) * \underbrace{(h_1(t) * h_2(t))}_{h(t)}$$

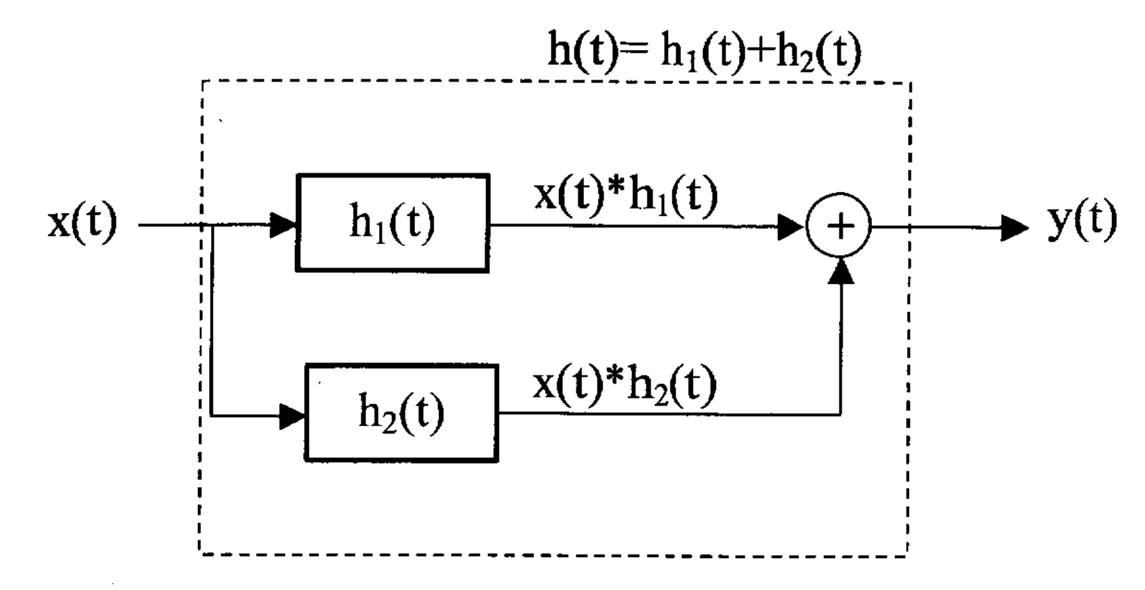


Figura 2.12: Sistemas conectados en paralelo.

El segundo caso es la conexión en paralelo dibujada en la figura 2.12.

En este caso observamos que la respuesta impulsional del sistema completo es la suma de las respuestas individuales:

$$y(t) = x(t) * \underbrace{h(t)}_{?} = x(t) * \underbrace{(h_1(t) + h_2(t))}_{h(t)}$$

2.7. Modelización de sistemas

La diversidad de sistemas que nos rodean es realmente muy vasta. Para comenzar se propone analizar algunos sistemas físicos que abarcan sistemas mecánicos, de fluidos, térmicos y eléctricos entre otros. Los mismos son esencialmente deterministas lo que facilita su modelización. Las leyes que los gobiernan se estudian en los cursos iniciales de física.

Para poder interpretar con mayor facilidad y claridad el comportamiento de estos sistemas ante diferentes excitaciones de entrada, se utiliza la técnica de modelización mediante ecuaciones diferenciales. La aplicación de la modelización de sistemas físicos ha sido ampliamente utilizada y brinda grandes ventajas. Las leyes físicas, que gobiernan los comportamientos de los sistemas reales, pueden resultar muy complejas por lo que se intenta lograr modelos simplificados que permitan un análisis razonable con las limitaciones impuestas. El objetivo de las simplificaciones es lograr que el modelo capture la realidad lo mejor posible, permitiendo que la resolución computacional sea de una complejidad adecuada a la capacidad de una computadora común.

Mencionamos a continuación algunas de las ventajas de la modelización matemática:

- Al plasmar el comportamiento del sistema en una ecuación, se puede estudiar en profundidad el comportamiento del sistema en términos de almacenamiento y disipación

de energía.

- La ecuación permite **predecir** la salida del sistema ante entradas sintetizadas matemáticamente.
- Los coeficientes de la ecuación pueden asociarse a los componentes del sistema y por lo tanto se puede estudiar los efectos que produce la variación de los parámetros sobre las respuestas de salida.
- La simulación por computadora se convierte en una alternativa para el análisis del comportamiento del sistema ante todo tipo de excitaciones.
- Para comparar sistemas, se pueden utilizar modelos análogos de un campo de la física y aplicarlos a otros, facilitando la comprensión completa del modelo.

Una vez obtenido el modelo es necesario validarlo. Para esto, se comparan algunas salidas reales del sistema con las observadas en el modelo mediante simulaciones. Las diferencias deben ser analizadas teniendo en cuenta las simplificaciones que se hicieron al proponer las ecuaciones del modelo. Las diferencias encontradas pueden generar el rediseño o la modificación de las ecuaciones planteadas. El diseño de modelos es una tarea de prueba y error. Un modelo matemático jamás podrá representar exactamente la respuesta de un sistema físico. Lo importante es acotar y comprender sus errores y limitaciones.

2.8. Sistemas descriptos por ecuaciones diferenciales

Muchos sistemas pueden ser modelizados o descriptos por ecuaciones diferenciales que relacionan sus múltiples entradas con sus múltiples salidas. Para simplificar el problema concentraremos nuestra atención en un subconjunto acotado de sistemas:

1. Modelizaremos sistemas lineales invariantes en el tiempo.
2. Plantearemos sistemas de una única entrada y una única salida.
3. Utilizaremos ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes. El lector puede consultar el apéndice B para encontrar los métodos de resolución de este tipo de ecuaciones clásicas.
4. Cada parámetro de la ecuación estará asociado a un componente físico y por lo tanto responderá a alguna ley física conocida.

Como veremos, aún dentro de este subconjunto de sistemas, encontraremos un gran número de modelos físicos que nos permitirán trabajar con modelos y simulaciones interesantes. A medida que los sistemas que se quieren representar son más complejos, las ecuaciones de los modelos son más complicadas y los métodos numéricos que las resuelven requieren mayor carga computacional.

Figura 2.13: Modelización mecánica traslacional.

2.8.1. Sistemas mecánicos traslacionales

Utilizaremos a los sistemas mecánicos traslacionales como punto de partida ya que sus bases físicas son las más sencillas. Luego, utilizaremos analogías y cambios de nomenclatura para relacionarlos con el resto de los casos.

Las leyes del movimiento de Newton serán la base teórica de nuestro modelo:*La suma algebraica de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido en una dirección dada es igual al producto de la masa del cuerpo por su aceleración en la misma dirección.*

$$\sum Fuerzas = m.a(t)$$

Los tres componentes básicos de estos modelos serán: masa, resorte y amortiguador viscoso. Estos tres elementos estarán representados por **coeficientes constantes** en la ecuación diferencial. Las variables intervinientes podrán ser desplazamiento $x(t)[m]$ (posición), velocidad $v(t) = x'(t)[m/s]$, aceleración $a(t) = v'(t) = x''(t)[m/s^2]$ y fuerza $f(t)[N]$. Observe las unidades MKS que utilizaremos entre corchetes.

Analicemos un primer esquema donde colocamos un cuerpo de masa M, un rozamiento o fricción B y un resorte ideal de constante elástica K. Además, la excitación (entrada) será una fuerza $f(t)$ aplicada sobre el cuerpo en la dirección x y como salida utilizaremos la posición $x(t)$. El componente de rozamiento B será, en este caso, dinámico y no estático; por lo tanto la fuerza de rozamiento será *proporcional a la velocidad*. Este rozamiento se denomina *viscoso*. Por el momento no se considerará el rozamiento estático proporcional al peso.

Debemos distinguir a los tres elementos básicos de los sistemas mecánicos para luego poder generalizarlos en otros sistemas análogos. La masa es el elemento que almacena energía

cinética. La ecuación que relaciona la fuerza con la posición es

$$f(t) = M.a(t) = M.v'(t) = M.x''(t)$$

La masa tiene unidades de $[kg]$. La variable que aparece derivada es la velocidad y en este caso es la salida del sistema.

El rozamiento es dinámico y por lo tanto la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento debe ser **proporcional a la velocidad**. La fricción viscosa resulta entonces:

$$f(t) = B.v(t) = B.x'(t)$$

El rozamiento tiene unidades de $[N.s/m]$ y es el componente **disipativo** del sistema. No almacena ningún tipo de energía y simplemente representa la disipación de calor. La variable que aparece nuevamente derivada es la salida del sistema.

Existen otros dos tipos de rozamientos. El primero es el estático que solo aparece cuando el cuerpo está detenido. El segundo es la fricción de Coulomb, que posee un valor constante para todo cambio de velocidad y su signo es dependiente de la dirección. Es muy importante dejar expresado qué tipo de rozamiento se contemplará en cada modelo siendo el rozamiento dinámico el que emplearemos más a menudo.

Por último, un resorte lineal almacena la energía potencial elástica. Utilizando la Ley de Hooke, la fuerza ejercida por el resorte es proporcional a su estiramiento y de sentido inverso:

$$f(t) = -K.x(t)$$

Donde las unidades de elasticidad son $K = [N/m]$. Utilizando la ecuación de Newton y teniendo en cuenta que la fuerza aplicada debe vencer la inercia de la masa, la fuerza de rozamiento y el estiramiento del resorte, planteamos la ecuación diferencial del modelo:

$$f(t) - B.x'(t) - K.x(t) = M.x''(t)$$

$$\boxed{f(t) = M.x''(t) + B.x'(t) + K.x(t)}$$

Mediante esta ecuación podemos caracterizar completamente al sistema, siempre dentro de las consideraciones que se realizaron al modelizar. Como la ecuación diferencial es de segundo orden, se requieren dos condiciones iniciales para hallar su solución.

Esto significa que esta ecuación se puede utilizar para hallar la salida (posición) en función de cualquier señal de entrada (fuerza). Como ya mencionamos se puede verificar la validez del modelo comparando las respuestas matemáticas con las reales, para lo cual se requiere el armado de un prototipo.

La complejidad en la obtención de la respuesta de salida radica en la resolución de la ecuación para una estrada específica. Piense qué sucedería si ésta fuera por ejemplo no continua o no derivable.

Figura 2.14: Modelización eléctrica.

Como alternativa, este simple sistema descripto por su ecuación diferencial, también puede ser caracterizado por su respuesta impulsional. Una vez obtenida la respuesta impulsional $h(t)$ se podrá utilizar la operación de convolución para hallar la salida ante cualquier entrada arbitraria.

Para hallar $h(t)$ es necesario colocar un impulso en la entrada $f(t) = \delta(t)$. Sin embargo, resolver la ecuación para esta entrada puede ser complicado ya que no es ni continua ni derivable; por lo tanto es conveniente hallar la respuesta indicial colocando un escalón $f(t) = u(t)$ para obtener a la salida $s(t)$. Derivando la respuesta indicial se obtiene la impulsional $h(t)$ como se desarrolló en la sección 2.5.

Ambos métodos, el de la resolución de la ecuación diferencial en forma analítica o el de la obtención de la respuesta impulsional, deben proporcionar la misma respuesta.

2.8.2. Sistemas eléctricos

Así como en el caso de los sistemas mecánicos, hallaremos los tres componentes básicos de un sistema eléctrico: resistencia, capacitancia e inductancia. Los elementos físicos del circuito serán el resistor, el capacitor y el inductor, respectivamente. Utilizaremos dos leyes básicas de circuitos denominadas Leyes de Kirchhoff para interconectar estos elementos. Estas leyes se considerarán familiares para el lector. Las señales intervinientes serán tensiones en Volts $v(t)[V]$, y corrientes en Amperes $i(t)[A]$ o carga eléctrica $q(t)[C]$ en Coulomb.

Comencemos planteando el circuito que analizaremos como ejemplo en la figura 2.14.

Para este caso se supuso que la entrada del sistema la impone una fuente de corriente, y que la salida se toma como la tensión del paralelo de los tres elementos. Esto no es siempre así y dependerá de la configuración del circuito que se desee analizar.

La ley de Ohm establece que la tensión $v(t)$ y la corriente $i(t)$ a través de una resistencia

ideal se relacionan linealmente por:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

donde $R[\Omega]$ es constante. Este es el elemento disipativo, donde se ve claramente la ausencia de almacenamiento de energía.

En el caso del inductor, la tensión entre sus bornes es proporcional a los cambios de líneas de campo magnético que atraviesan la bobina y se opone al propio efecto que la genera(Ley de Lens). Como la corriente que circula es la que genera ese flujo, se utiliza a la inductancia L como constante entre flujo y corriente:

$$v(t) = \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \frac{\partial L.i(t)}{\partial t} = L.\frac{\partial i(t)}{\partial t} = L.i'(t)$$

La inductancia $L[Hy]$ se mide en unidades de Henry. El inductor almacena energía, y esto se puede ver fácilmente despejando la corriente en función de la tensión, y comprobando que la corriente depende de valores de tensión anteriores.

Finalmente la carga $q(t)$ almacenada en un capacitor de capacidad C es proporcional a la tensión aplicada:

$$q(t) = C.v(t) \tag{2.4}$$

Como la corriente es carga por unidad de tiempo:

$$i(t) = \frac{\partial q(t)}{\partial t}$$

podemos derivar ambos miembros de la ecuación 2.4 y obtener la relación buscada:

$$\frac{\partial q(t)}{\partial t} = i(t) = C.\frac{\partial v(t)}{\partial t}$$

donde se supuso que la capacidad $C[F]$ es constante y se mide en unidades de Farad. El capacitor almacena otro tipo de energía, la potencial eléctrica.

Utilizando la segunda ley de Kirchhoff, donde la sumatoria de corrientes en un nodo es cero, considerando positivas las entrantes y negativas las salientes, planteamos para el circuito:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_{\tau=-\infty}^{t} v(\tau)d\tau + C.v'(t)$$

La ecuación resulta ser integro-diferencial. El lector puede comprobar que si se utiliza como variable de salida la corriente por el inductor $i_L(t)$, la ecuación diferencial resulta:

$$i(t) = LC.i''_L(t) + \frac{L}{R}i'_L(t) + i_L(t)$$

Una vez resuelta esta ecuación para la corriente $i_L(t)$, es muy sencillo obtener la tensión de paralelo como $v(t) = v_L(t) = L.i'_L(t)$.

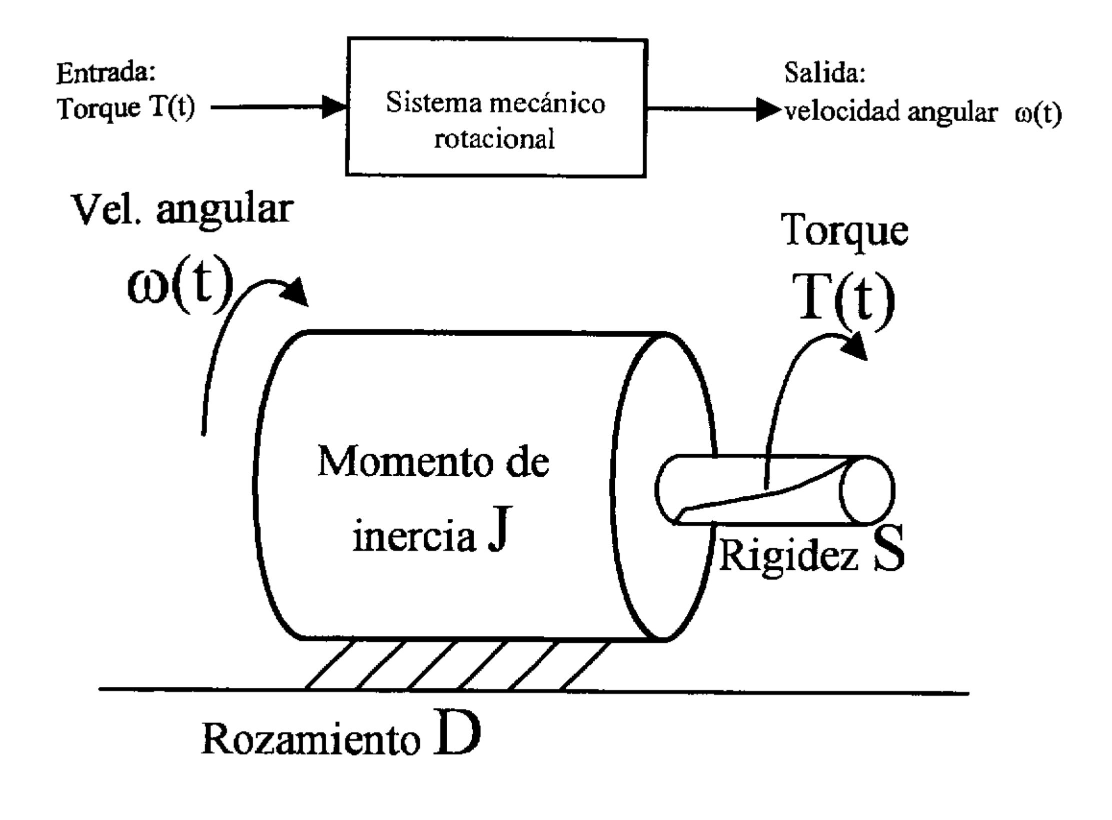


Figura 2.15: Modelización mecánica rotacional.

2.8.3. Sistemas mecánicos rotacionales

Los movimientos rotacionales se efectúan alrededor de un eje fijo. Los tres elementos que utilizaremos serán cuerpos de momento de inercia constante J, rozamiento dinámico D y rigidez de torsión S. Las variables intervinientes son torque $T(t)[N.m]$, velocidad angular $\omega(t)[rad/s]$, aceleración angular $\alpha(t)[rad/s^2]$ y posición angular $\theta[rad]$.

Utilicemos el esquema de la figura 2.15 como ejemplo.

Disponemos de un cuerpo de momento de inercia J al que se le aplica una cupla o torque $T(t)$; posee rozamiento viscoso D (proporcional a la velocidad angular) y almacena energía en la torsión de su eje con constante de rigidez S. Consideremos como entrada el torque y salida la velocidad angular. Nuevamente aclaramos que se pueden considerar como entrada o salida otras variables.

El torque y la aceleración angular del cuerpo se relacionan mediante el momento de inercia de la siguiente manera:

$$T(t) = J.\alpha(t) = J.\omega'(t) = J.\theta''(t)$$

donde vemos la relación entre aceleración, velocidad y posición angular. Las unidades son $J[kg.m^2]$. Este elemento almacena energía cinética.

El rozamiento viscoso produce un torque, que se opone al movimiento, proporcional a

la velocidad angular:

$$T(t) = D.\omega(t)$$

con unidades $D[N.m.seg/rad]$. Este es el elemento disipativo que no almacena energía.

El eje que posee torsión está caracterizado por su rigidez $S[N.m/rad]$, y almacena energía proporcional al ángulo de giro:

$$T(t) = S.\theta(t)$$

Finalmente el torque total y la ecuación integro-diferencial que caracteriza al sistema es:

$$T(t) = J.\omega'(t) + D.\omega(t) + S.\int_{\tau=-\infty}^{t} \omega(\tau)d\tau$$

Si se desea confeccionar una ecuación puramente diferencial, se puede expresar la relación entre torque de entrada y la posición $\theta(t)$.

$$T(t) = J.\theta''(t) + D.\theta'(t) + S\theta(t)$$

Luego de resolver la ecuación, la velocidad se puede hallar en función de la posición con $\omega(t) = \theta'(t)$.

2.8.4. Sistemas térmicos

Utilizando las leyes de calor se pueden obtener solo dos elementos: la resistencia y la capacidad térmica. Las señales que intervienen son potencia $P(t)[W]$ en Watt o calor $Q(t)[J]$ en Joules, y la temperatura $\theta(t)[°C]$ en grados.

Veamos un esquema de un cuerpo que está sometido a un generador de calor, caracterizado por su potencia $P(t)$ (Figura 2.16).

El cuerpo disipa calor a través de su resistencia y almacena calor en su capacidad. El generador a la derecha es el que simula la temperatura ambiente constante. La salida del sistema es la temperatura del cuerpo $\theta(t)$

Un cuerpo, en función de su área y otros coeficientes, presenta una disipación de temperatura en forma de calor, proporcional a su resistencia térmica $R_{th}[°C/W]$:

$$P(t) = \frac{\theta(t)}{R_{th}}$$

Este es el elemento evidentemente disipativo que no almacena energía.

Por otro lado, la capacidad térmica se define como:

$$P(t) = C.\frac{d\theta(t)}{dt}$$

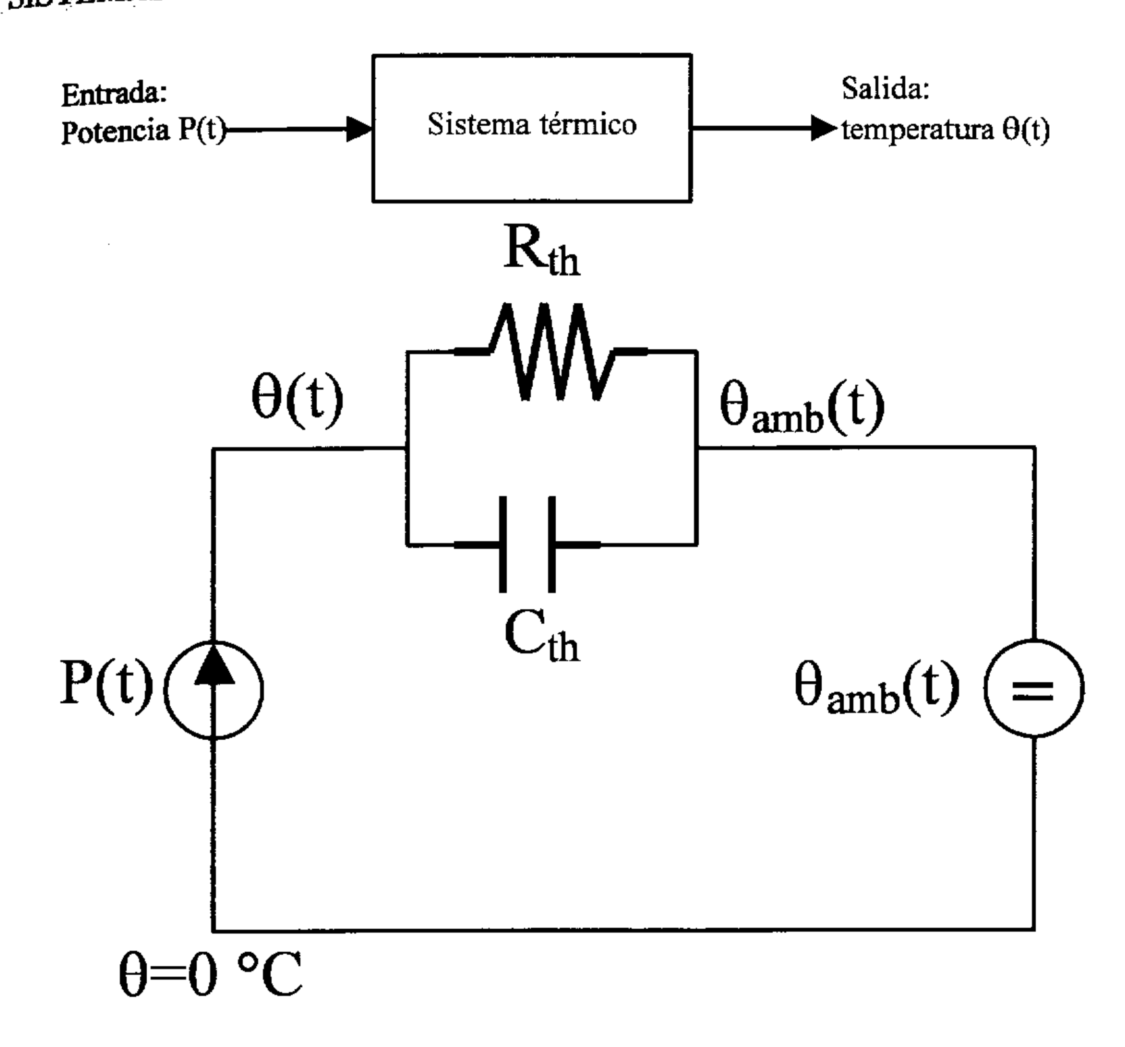


Figura 2.16: Modelización térmica.

y es el elemento donde se almacena la energía calórica. Sus unidades son $C[W.s/°C]$.

Planteando la ecuación para este sistema obtenemos:

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{\theta(t) - \theta_{amb}(t)}{R_{th}} + C.\frac{d\{\theta(t) - \theta_{amb}(t)\}}{dt} \\ P(t) &= \frac{\theta(t) - \theta_{amb}(t)}{R_{th}} + C.\frac{d\theta(t)}{dt} \end{aligned}$$

En esta modelización se adoptó utilizar a la temperatura de $0°C$ como referencia. Es así como fue necesario incluir una fuente de tensión constante (temperatura ambiente $theta(t)$ constante) que simule la transmisión de calor del medio ambiente hacia el sistema. Es necesario aclarar que el mismo sistema se puede modelizar utilizando como referencia la temperatura ambiente y eliminar esta fuente de tensión. En este caso, los valores de temperatura que resultan de la solución de la ecuación deben ser pensados referidos a la

temperatura ambiente.

2.8.5. Sistemas con fluidos

Los sistemas hidráulicos son los más complicados de modelizar con ecuaciones diferenciales ordinarias. Los fluidos poseen características complejas que dependen de las características físicas del fluido, de su velocidad y la geometría por donde fluyen. Para el caso más simple utilizaremos como variable el caudal o flujo $q(t)[m^3/s]$ y la presión $p(t)[N/m^2]$. Los elementos de nuestros modelos serán tanques de capacidad C, resistencias hidráulicas R y la inercia del fluido J. Se simplificarán todas las ecuaciones complejas para reducirlas a analogías más simples con fines académicos.

Un esquema genérico sería el presentado en la figura 2.17.

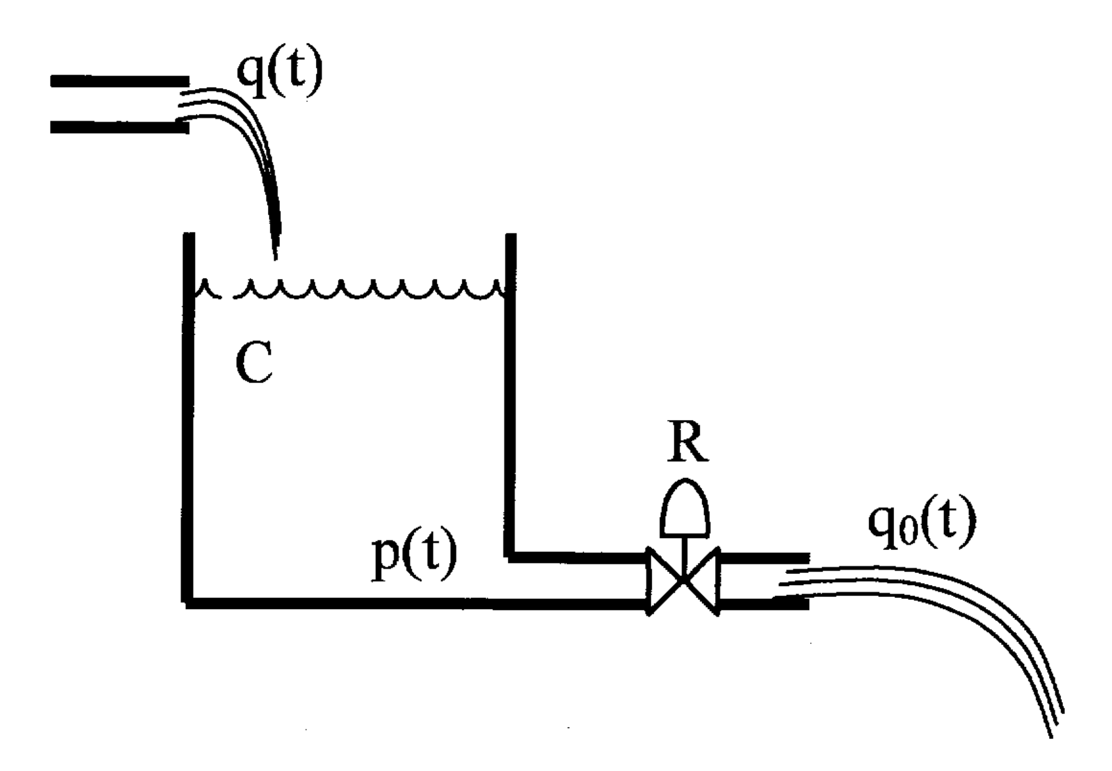


Figura 2.17: Modelización hidráulica.

La presión $p(t)$ es la presión del fondo del tanque con respecto a la presión atmosférica y depende de la altura del líquido en el tanque.

La resistencia hidráulica que ofrece la válvula relaciona a la presión y al flujo de la siguiente forma:

$$q(t) = \frac{p(t)}{R}$$

la unidad es $R[N.s/m^5]$. Esta relación lineal solo se cumple para variaciones muy pequeñas de la presión. En realidad la diferencia de presión no es lineal con el flujo.

La capacitancia del tanque es constante si la sección del mismo hacia el fondo es constante. La capacitancia es la inversa entre la relación de cambio de presión y cambio de volumen:

$$C = \frac{\Delta V(t)}{\Delta p(t)}$$

como el flujo es el cambio de volumen por unidad de tiempo,

$$q(t) = \frac{\partial V(t)}{\partial t}$$

hallamos la ecuación final como

$$q(t) = C.\frac{\partial p(t)}{\partial t}$$

Las unidades son $C[m^5/N]$.

La inercia S del fluido es la relación entre cambios de presión, proporcional a la velocidad de cambio del fluido:

$$p(t) = \frac{1}{S}.\frac{\partial q(t)}{\partial t}$$

Normalmente la inercia es despreciable. Teniendo en cuenta esto último, la ecuación diferencial del tanque y la válvula resulta:

$$q(t) = C.p'(t) + \underbrace{\frac{p(t)}{R}}_{q_0(t)}$$

donde el primer término de la derecha es el flujo almacenado en el tanque y el segundo el flujo que sale por la válvula. Un tanque produce un efecto *capacitivo* sobre el caudal. Imagine que el flujo de entrada fuera pulsatil. El tanque se llenaría intermitentemente. Sin embargo, el flujo de salida por la válvula va a ser más homogéneo a medida que se vaya descargando el tanque. Esta atenuación de la pulsatilidad es típica de sistemas *capacitivos*.

2.9. Analogías entre modelos

Entre cada uno de los modelos analizados se pueden encontrar analogías evidentes. En todos los casos aparecen elementos disipativos y otros que almacenan distintos tipos de energía. Para poder analizar los comportamientos de los modelos es frecuente intentar llevar las ecuaciones diferenciales análogas a un circuito con componentes más familiares. En nuestro caso elegiremos el denominado circuito eléctrico-mecánico. En este circuito habrá señales que fluyen a través de los componentes, y otras que se hallan entre dos puntos del circuito (corrientes y tensiones respectivamente).

De esta forma llevamos las ecuaciones de los modelos físicos estudiados a un circuito eléctrico donde debemos imponer analogías entre las señales que van a intervenir, decidiendo qué señal simbolizará a la corriente y qué señal será la tensión. Luego analizando cada ecuación diferencial podemos encontrar los valores de resistencia, capacidad e inductancia correspondientes. Al elegir arbitrariamente las analogías pueden surgir dos tipos de circuitos análogos, uno paralelo y otro serie. Mostraremos a continuación, y como ejemplo, los circuitos análogos para sistemas mecánicos traslacionales. En este caso utilizaremos la analogía que deriva en circuitos paralelos. El resto de las analogías las puede hallar en la tabla de la figura 2.20.

2.9.1. Modelos electro-mecánicos

Las variables o señales que utilizaremos de los modelos mecánicos serán fuerza $f(t)[N]$ y velocidad $v_{el}(t)[m/s]$. Reemplazaremos estas señales por sus análogas de la siguiente manera; la velocidad será la tensión $v(t)[V]$ y la fuerza será la corriente $i(t)[A]$.

Comencemos analizando la ecuación diferencial que relaciona fuerza y velocidad para la masa:

$$f(t) = M.v_{el}'(t)$$

Si ahora colocamos la ecuación que relaciona la tensión y la corriente en un capacitor,

$$i(t) = C.v'(t)$$

observamos que si utilizamos la analogía $f(t) = i(t)$ y $v_{el}(t) = v(t)$, las ecuaciones son idénticas aceptando que el valor de la masa M sea igual al del capacitor: $M = C$. La unidades deben estar en MKS para que la ecuación diferencial sea idéntica numéricamente. De esta forma la masa del modelo mecánico será un capacitor en nuestro circuito eléctrico-mecánico. Si colocamos un borne del capacitor a masa [3], en el borne opuesto tendremos una tensión proporcional a la velocidad de la masa con respecto a un observador detenido.

La ecuación que relaciona la fuerza y la velocidad para un resorte lineal de constante elástica K es:

$$f(t) = K.x(t) = K. \int v_{el}(t)dt$$

si la comparamos con la que relaciona tensión y corriente en un inductor observamos:

$$i(t) = L. \int v(t)dt$$

Claramente se observa que el valor del inductor L coincide con la constante elástica del resorte $K = L$. Nuevamente la tensión entre los bornes del inductor modelizarán la velocidad

[3] Colocar un borne a masa implica colocarlo a una tensión de referencia de $0Volt$. Como las tensiones del circuito eléctrico son velocidades en el modelo mecánico, colocar un elemento a masa significa referenciar su velocidad a un observador detenido.

entre los extremos del resorte, y la corriente que circula por el inductor, la fuerza que realiza el resorte.

El último elemento es la fricción o rozamiento viscoso (proporcional a la velocidad), cuya ecuación es:

$$f(t) = B.v_{el}(t)$$

En los circuitos eléctricos el elemento disipativo es la resistencia, cuya ecuación es

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

En este caso observamos que para que las ecuaciones coincidan el valor de la resistencia R debe ser $R = 1/B$.

La fuerza aplicada se modelizará como un generador de corriente. Como normalmente las velocidades de las masas se consideran con respecto a un observador detenido, uno de los bornes de los capacitores siempre estará a una tensión de 0 Volt. Dibujemos a continuación un esquema de un sistema mecánico traslacional, su circuito electromecánico (preste especial atención en la representación gráfica de los diferentes elementos) y el circuito eléctrico análogo (figuras 2.18 y 2.19).

Si se arma físicamente un circuito con elementos eléctricos análogos, se pueden medir señales de tensión proporcionales a las velocidades que aparecerían en el sistema mecánico, y corrientes proporcionales a las fuerzas intervinientes. Más aun, se pueden variar los valores de los componentes del circuito eléctrico para estudiar el sistema mecánico y predecir su comportamiento.

Los modelos análogos para el resto de los sistemas pueden observarse en la tabla 2.20. Se realizó siempre una analogía que genera circuitos principalmente paralelos.

Todos los elementos fueron detallados en sus respectivas secciones. El lector puede realizar las analogías intercambiando las señales de tensión y corriente, y hallando de esta manera los equivalentes serie para cada modelo. Los componentes vistos son los más simples de modelizar en forma lineal. Muchos de estos elementos pueden comportarse en forma alineal en la realidad por lo cual pueden requerir algunas modificaciones. Generalmente si se suponen variaciones pequeñas de las señales, la linealidad se cumple. El objetivo es mostrar el método de modelización y trabajo con ecuaciones análogas. El tema requiere de muchas más definiciones físicas avanzadas que no se incluirán en el presente texto.

resorte de cte
elástica K
masa M
fuerza f(t)
rozamiento dinámico B
posicion x(t=0)=0
f(t)
fuerza
M
masa
K
resorte
B
fricción
velocidad
$v_{el}(t)$
0 m/s

Figura 2.18: Circuitos electromecánicos.

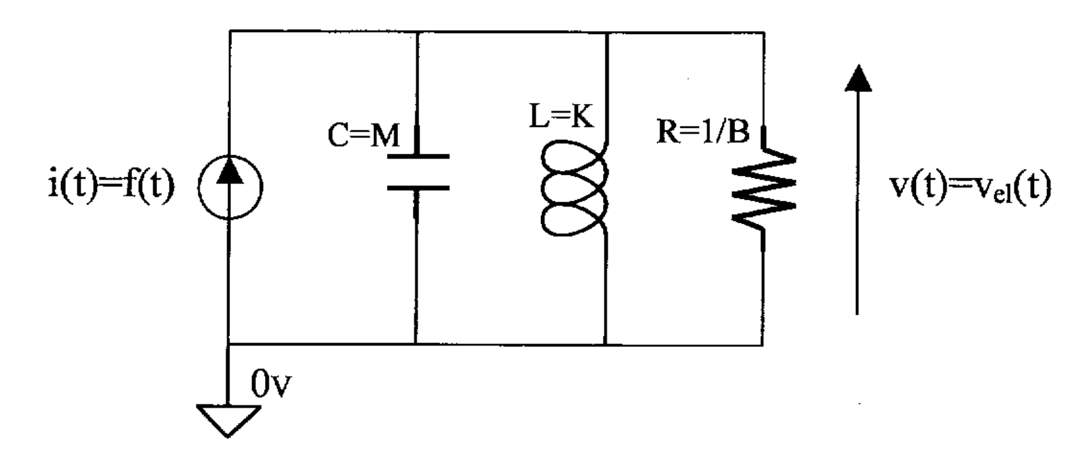


Figura 2.19: Circuito eléctrico análogo.

SISTEMA	Variable que fluye	Variable entre bornes
Eléctrico	Corriente, $i(t)$	Diferencia de potencial, $v(t)$
Mecánico	Fuerza, $f(t)$	Velocidad, $v_{el}(t)$
Rotacional	Torque, $T(t)$	Vel.angular $\omega(t)$
de Fluidos	Diferencia de presión, $p(t)$	Caudal, $q(t)$
Térmico	Potencia o Calor, $P(t)$, $Q(t)$	Diferencia de temperatura, $\theta(t)$

Figura 2.20: Analogías entre modelos físicos

Sistema	Resistor	Inductor	Capacitor
Eléctrico	R: $i(t)=\frac{v(t)}{R}$	L: $v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$	C: $i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$
Mecánico	$R=\frac{1}{B}$: $f(t)=B.v_{el}(t)$	$L=\frac{1}{K}$: $v_{el}(t)=\frac{1}{K}\frac{df(t)}{dt}$	$C=M$: $f(t)=M.\frac{dv_{el}(t)}{dt}$
Rotacional	$R=\frac{1}{D}$: $T(t)=D.\omega(t)$	$L=\frac{1}{S}$: $\omega(t)=\frac{1}{S}\frac{dT(t)}{dt}$	$C=J$: $T(t)=J.\frac{d\omega(t)}{dt}$
de Fluidos	$R=R$: $q(t)=\frac{p(t)}{R}$	$L=\frac{1}{S}$: $p(t)=\frac{1}{S}\frac{dq(t)}{dt}$	$C=C$: $q(t)=C.\frac{dp(t)}{dt}$
Térmico	$R=R_{th}$: $P(t)=\frac{\theta(t)}{R_{th}}$		$C=C_{th}$: $\theta(t)=C_{th}.\frac{dP(t)}{dt}$

Figura 2.21: Relaciones análogas hacia el modelo eléctrico.

2.9.2. Casos especiales

Existe un conjunto de elementos simples que se utilizan frecuentemente en los sistemas mecánicos. Mencionaremos tres de ellos a continuación. Estos elementos son los engranajes, las cremalleras y la palanca. Los engranajes conectan dos sistemas mecánicos rotacionales produciendo un efecto de transformación entre velocidad angular y torque en función del número de dientes (proporcionales al radio). La palanca relaciona dos sistemas mecánicos traslacionales transformando fuerza en desplazamiento en función de las distancias al pivote. La cremallera relaciona un sistema mecánico rotacional con otro traslacional. En el esquema eléctrico-mecánico utilizaremos generadores de corriente controlados para esquematizarlos.

La palanca de pivote fijo

Una palanca se puede esquematizar de la siguiente forma:

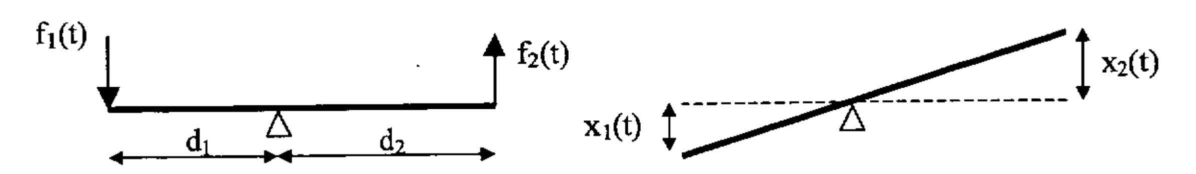


Figura 2.22: Modelo de la palanca.

Se supone que el desplazamiento de la palanca es pequeño (por linealidad) y que la misma no tiene masa ni rozamiento. La relación entre los desplazamientos a ambos lados y las fuerzas se pueden hallar mediante las siguientes deducciones:

$$\frac{x_1(t)}{d_1} = \frac{x_2(t)}{d_2}$$

e igualando los torques (fuerza por distancia)

$$f_1(t).d_1 = f_2(t).d_2$$

donde finalmente relacionamos las variables de la siguiente forma:

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{f_2(t)}{f_1(t)} = \frac{d_1}{d_2}$$

Si derivamos la posición, obtenemos velocidades, por lo tanto:

$$\boxed{\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{f_2(t)}{f_1(t)} = \frac{d_1}{d_2}}$$

el esquema eléctrico-mecánico de la palanca se gráfica en la figura 2.23, mediante el uso de generadores controlados. Recuerde que siempre se utiliza el modelo paralelo, donde la corriente es la fuerza y la tensión la velocidad.

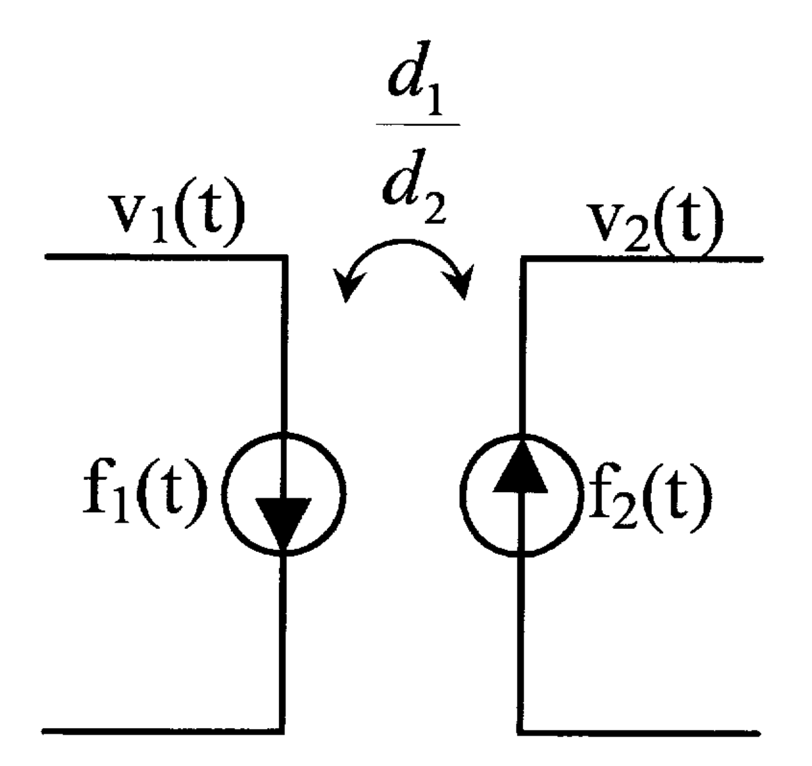


Figura 2.23: Modelo de la palanca en término de generadores de corriente controlados.

El sistema de engranajes

Para que dos engranajes giren solidarios, es necesario que el número de dientes de cada uno sea proporcional al radio del engranaje, ya que el paso de los dientes debe ser el mismo para ambos. De esta forma esquematizamos el sistema de acoplamiento mecánico en la figura 2.24.

En este caso supondremos que cada engranaje posee un momento de inercia propio J_1 y J_2 respectivamente. El desplazamiento lineal de cada engranaje es el ángulo girado por el radio [4].

$$x(t) = \theta(t).r$$

derivando ambos miembros, y con $\omega(t) = \theta'(t)$, la velocidad lineal en el punto de contacto es:

$$v_{el}(t) = \omega(t).r$$

Como esta velocidad es compartida para ambos engranajes, las igualamos obteniendo la primera relación:

$$\omega_1(t).r_1 = \omega_2(t).r_2$$

[4] Si el engranaje gira una vuelta completa recorre un perímetro: $2\pi.r$

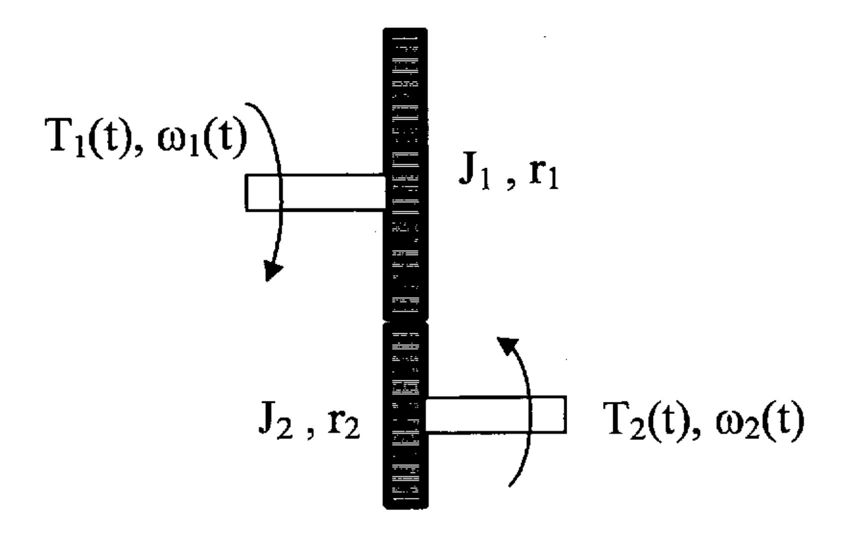


Figura 2.24: Sistema de acoplamiento mecánico con engranajes.

La ley de conservación de energía establece que:

$$T_1(t).\omega_1(t) = T_2(t).\omega_2(t)$$

y por lo tanto llegamos a la relación final como:

$$\frac{T_1(t)}{T_2(t)} = \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

donde r es radio y N número de dientes.

El esquema para el circuito eléctrico-mecánico con generadores controlados es:

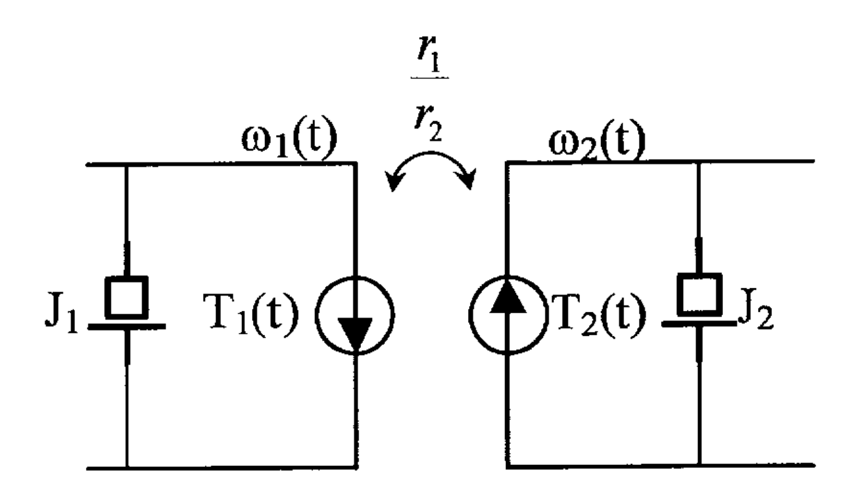


Figura 2.25: Modelo eléctrico análogo del sistema de engranajes.

donde en este caso se tuvieron en cuenta los momentos de inercia de ambos engranajes

La cremallera

La cremallera es un elemento mecánico que relaciona sistemas traslacionales y rotacionales. Esto quedará evidenciado en las ecuaciones de manera evidente. Note que en el circuito eléctrico-mecánico seguimos utilizando generadores de corriente controlados.

Un esquema gráfico del sistema de cremallera se observa en la figura 2.26.

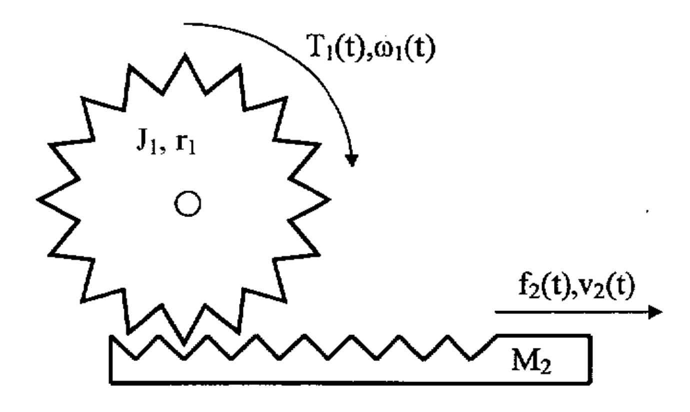


Figura 2.26: Sistema de cremallera.

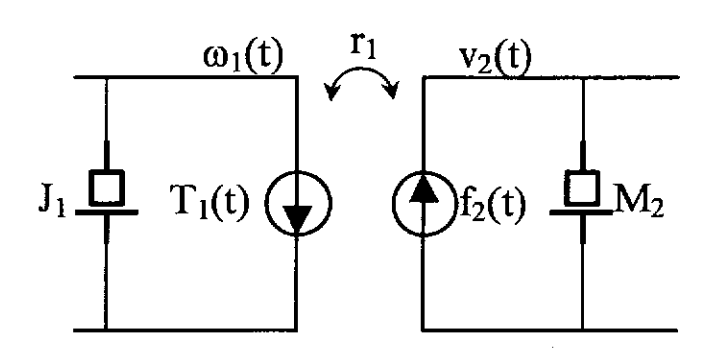


Figura 2.27: Modelo eléctrico del sistema de cremallera.

donde no se despreció ni el momento de inercia del engranaje ni el de la propia cremallera. Preste especial atención a las variables intervinientes. El torque es fuerza por distancia, por lo tanto:

$$T_1(t) = f_2(t).r_1$$

y el desplazamiento lineal sobre el punto de contacto es:

$$x(t) = \theta(t).r_1$$

que derivando en ambos miembros nos brinda la segunda relación:

$$v_2(t) = \omega_1(t).r_1$$

De esta forma tenemos todas las ecuaciones para realizar el esquema eléctrico-mecánico como muestra la figura 2.27.

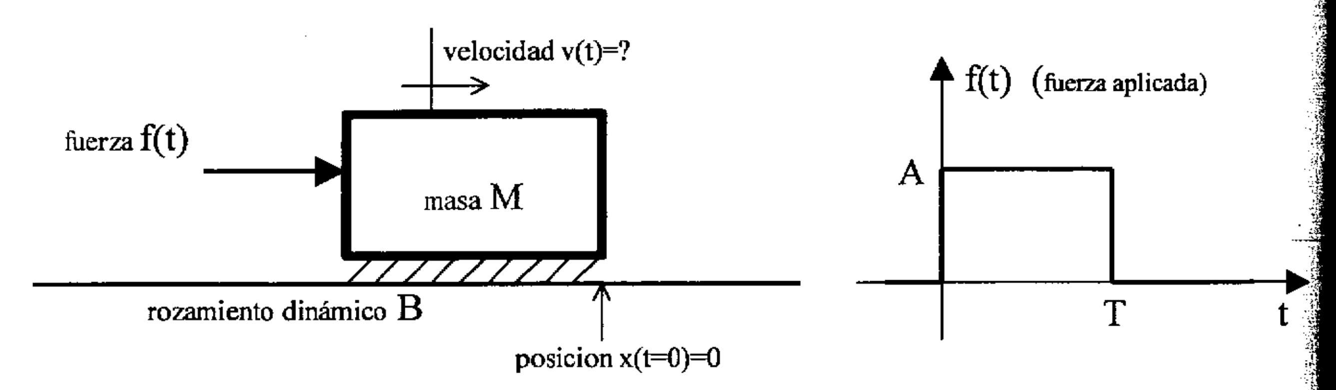
ajes.

2.10. Un ejemplo simple

A continuación se propone la modelización de un sistema mecánico traslacional simple. Este ejemplos servirá para mostrar los pasos a seguir en la modelización y los métodos de resolución de la ecuación diferencial.

Además calcularemos la respuesta indicial y la impulsional del sistema y verificaremos, utilizando convolución, las salidas encontradas.

El esquema que se analizará es el de la figura 2.10.



Donde se dispone de una masa $M[Kg]$ sobre una superficie con rozamiento viscoso $B[N.s/m]$ y se le aplica una fuerza $f(t)[N]$ como la graficada. El sistema estaba inicialmente en reposo $v(t=0)=0m/s$.

Se desea:

1. Hallar la ecuación diferencial que relacione a la fuerza aplicada en función de la velocidad de la masa.

2. Hallar el modelo equivalente eléctrico y dibujar los circuitos electro-mecánico y eléctrico indicando los valores de cada componente en función de los datos suministrados.

3. Resolver la ecuación diferencial para obtener la velocidad $v(t)$ y la posición $x(t)$.

4. Hallar la respuesta impulsional e indicial.

5. Calcular mediante convolución la salida $v(t)$ y comparar la respuesta con la hallada en el punto 3.

6. Concluir acerca de la causalidad del sistema en base a la respuesta impulsional.

1. Comencemos planteando la ecuación diferencial del sistema mecánico. La fuerza debe vencer a la inercia de la masa y a la fuerza de rozamiento. Por lo tanto planteamos:

$$f(t) = M.v'(t) + B.v(t) \quad (2.$$

Los valores de M y B serán siempre positivos. Para normalizar esta ecuación diferencial ordinaria a coeficientes constantes de primer orden, dividimos ambos miembros por M, dejando el término con la mayor derivada multiplicado por uno:

$$\frac{f(t)}{M} = v'(t) + \frac{B}{M}.v(t)$$

2. La masa es un elemento que, al no deformarse, debe mantener en todos sus puntos la misma velocidad. Como el observador está parado a velocidad cero, la masa estará colocada entre un punto de velocidad cero y otro de velocidad incógnita $v(t)$. Como la fuerza es la variable que fluye, y parte se utiliza para vencer la inercia y parte para vencer el rozamiento, la **corriente análoga** debe dividirse en dos ramas. De esta manera determinamos que solo habrá un nodo (una única velocidad), y dos ramas. La fuerza aplicada será un generador de corriente, y la incógnita será la única tensión del circuito. La masa es un capacitor en su modelo análogo, y el rozamiento una resistencia. Recuerde que hay una relación inversa entre B y R.

   Grafiquemos ambos esquemas en la figura 2.28.

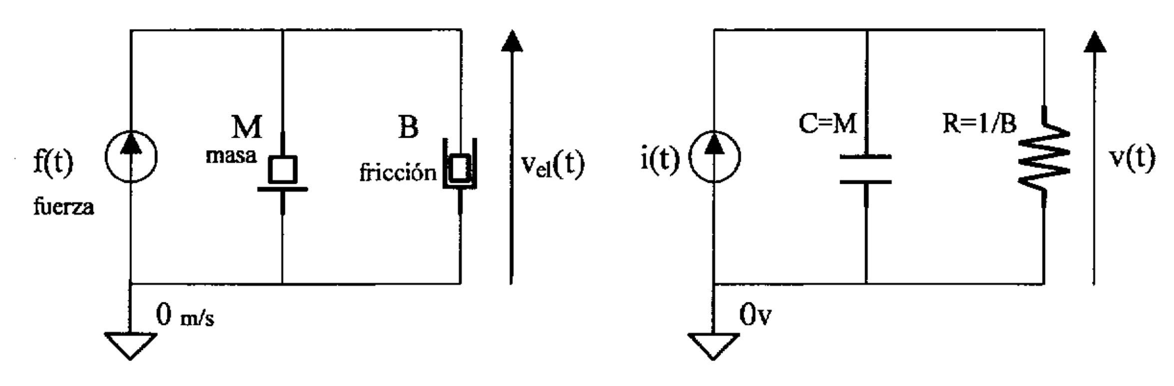


Figura 2.28: Circuitos electromecánico y eléctrico.

   La corriente por el capacitor es proporcional a la fuerza de inercia, y la corriente a través de la resistencia es proporcional a la fuerza de rozamiento.

3. Para resolver la ecuación diferencial es necesario introducir la entrada (fuerza). Como la entrada es una función discontinua, plantearemos la resolución en dos tramos. El primer tramo para $T > t > 0$ y el segundo para $t > T$. Al comenzar las condiciones iniciales son nulas, sin embargo para el segundo tramo habrá que analizar la velocidad que adquirió la masa en $t = T$ para colocarla como condición inicial.

   Primer tramo $T > t > 0$.-

   La solución de la ecuación diferencial es la suma de la homogénea más la particular: $v(t) = v_h(t) + v_p(t)$. La solución homogénea de la ecuación no depende de la entrada, y es la solución al colocar $f(t) = 0$:

$$0 = v'(t) + \frac{B}{M}.v(t)$$

Hemos demostrado en el apéndice B que la solución homogénea, llamando $a = B/M$, es

$$v_h(t) = K.e^{-a.t}u(t) = K.e^{-\frac{B}{M}.t}u(t)$$

donde K es la única constante arbitraria a determinar. A la solución homogénea se la suele llamar parte transitoria de la respuesta. Su comportamiento es independiente de la entrada y por lo tanto es muy característico del sistema.

La solución particular depende exclusivamente de la entrada. Como en este caso, y para el intervalo de t analizado, la entrada es una constante $f(t) = A$, proponemos como salida una constante $v_p(t) = K_p$. Derivando obtenemos $v_p'(t) = 0$,e introduciendo la entrada y estas funciones en la ecuación diferencial, obtenemos:

$$\frac{f(t)}{M} = \frac{A}{M} = 0 + \frac{B}{M}K_p \qquad \Longrightarrow \qquad K_p = \frac{A}{B}$$

Por lo tanto la solución particular es :

$$v_p(t) = K_p = \frac{A}{B}$$

Sumando la homogénea más la particular, obtenemos la solución general como:

$$v(t) = v_h + v_p(t) = K.e^{-\frac{B}{M}t} + \frac{A}{B}$$

donde aún resta hallar la única constante arbitraria K. Como las condiciones iniciales son nulas:

$$v(t=0) = 0 = K.\underbrace{e^{-\frac{B}{M}.0}}_{=1} + \frac{A}{B} \qquad \Longrightarrow \qquad K = -\frac{A}{B}$$

y escribimos la solución como

$$v(t) = \frac{A}{B}\left(1 - e^{-\frac{B}{M}.t}\right)$$

La respuesta hasta el momento se dibuja en la figura 2.29.

Note que la velocidad tiende a un valor máximo dado por $v(t \to \infty) = A/B$. A es la fuerza constante de entrada, y B el rozamiento. Esto quiere decir que la velocidad máxima está impuesta por el rozamiento. Esto es congruente con el siguiente análisis. En la ecuación diferencial 2.5, la entrada $f(t)$ es una constante, y la suma de los dos términos del lado derecho deben sumar esa constante. Inicialmente el término derivado (inercia) es el preponderante. Esto se debe a que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad e inicialmente la velocidad es cero. Por lo tanto en nuestro circuito eléctrico, toda la corriente se deriva por la rama del capacitor que inicialmente

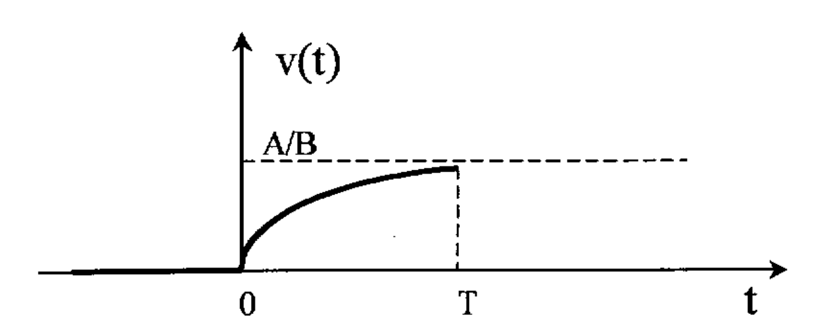


Figura 2.29: Respuesta aproximada.

estaba descargado. A medida que el capacitor se carga, o la masa se mueve, la fuerza de rozamiento empieza a tomar importancia. (observe que en el gráfico la pendiente de la exponencial, que es proporcional a la derivada de la velocidad, va tendiendo a cero). Finalmente el término de inercia (derivado) tiende a cero, el capacitor se carga al valor de tensión de entrada, y toda la corriente se deriva por la resistencia.

Como se observa gráficamente, la exponencial no alcanza nunca la velocidad teórica máxima dada por $v_{max}(t) = A/B$. Sin embargo existe un criterio muy utilizado que permite aproximar el tiempo en el que la cercanía a la asíntota es despreciable. Para esto definiremos a la constante de tiempo τ como

$$\tau = \frac{M}{B} = R.C$$

La constante de tiempo es la que maneja el tiempo de crecimiento de la exponencial. Si el τ es grande, la exponencial crecerá lentamente, si el τ es pequeño lo hará rápidamente. Este concepto será muy útil en futuros capítulos.

Si el valor de t es cinco veces el de la constante de tiempo : $t = 5.\tau$, la exponencial tiene un valor de e^{-5}, por lo cual se considera que ya alcanzó a la asíntota. Esta consideración es aproximada y se utiliza habitualmente como criterio en ingeniería.

Como el valor de T se desconoce, la velocidad final será:

$$v(t = T) = \frac{A}{B}\left(1 - e^{-\frac{B}{M}.T}\right)$$

Segundo tramo $t > T$.-

La solución es la suma de la homogénea más la particular. Como en este caso la señal de entrada baja a cero a partir de $t = T$ **es necesario desplazar la respuesta homogénea**. De esta forma:

$$v(t) = K.e^{-\frac{B}{M}(t-T)}u(t-T)$$

Como la entrada es cero, no hay respuesta particular, y la salida es directamente la homogénea. Para determinar la única constante arbitraria, es necesario utilizar la

velocidad final del primer tramo. Por lo tanto obtenemos:

$$v(t=T)=\frac{A}{B}\left(1-e^{-\frac{B}{M}.T}\right)=K.\underbrace{e^{-\frac{B}{M}(T-T)}}_{=1}$$

finalmente:

$$v(t)=\frac{A}{B}\left(1-e^{-\frac{B}{M}.T}\right).e^{-\frac{B}{M}(t-T)} \qquad t>T$$

La respuesta final es la graficada en la figura 2.30

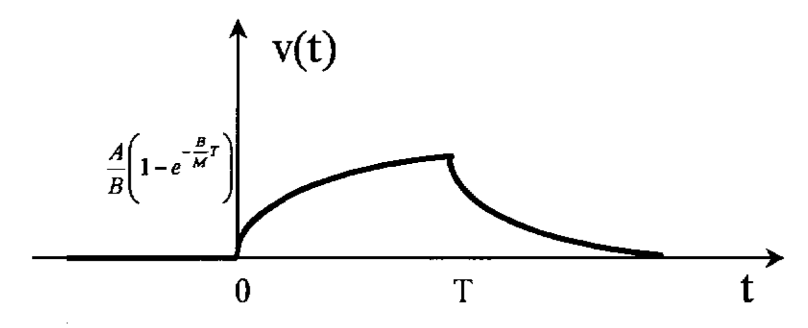


Figura 2.30: Respuesta final aproximada.

Para obtener la posición debemos calcular:

$$x(t)=\int_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

que queda a cargo del lector. La posición debe ser siempre creciente, ya que la masa se debe desplazar hacia adelante.

4. La respuesta indicial se halla colocando un escalón en la entrada. La ecuación diferencial con $f(t)=u(t)$ es:

$$\frac{1}{M}=v'(t)+\frac{B}{M}v(t) \qquad t>0$$

y su solución en base a lo visto es

$$v(t)=\frac{1}{B}\left(1-e^{-\frac{B}{M}t}\right)$$

que llamamos respuesta indicial:

$$s(t)=\frac{1}{B}\left(1-e^{-\frac{B}{M}t}\right)$$

Para hallar la respuesta impulsional debemos derivar:

$$h(t)=\frac{\partial s(t)}{\partial t}=\frac{1}{M}e^{-\frac{B}{M}t}$$

Observe la respuesta impulsional $h(t)$ en la figura 2.31.

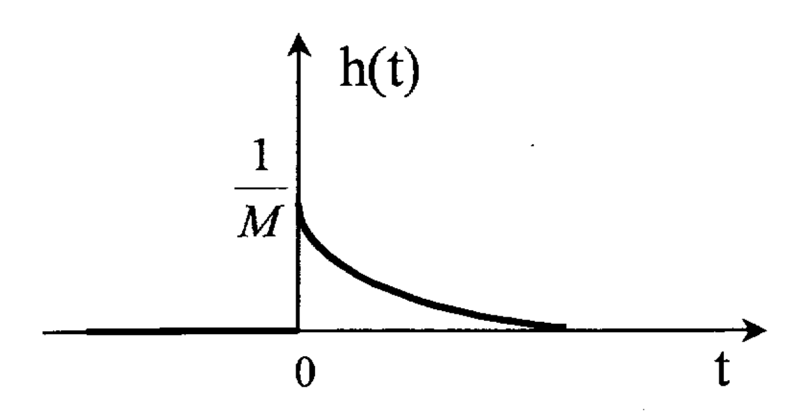


Figura 2.31: Respuesta impulsional.

5. Una forma alternativa de calcular la salida de un sistema es utilizando la convolución:

$$v(t) = f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

donde se espejó la respuesta impulsional. La convolución gráfica requiere tres tramos. Para $t < 0$ no hay solapamiento y por lo tanto $v(t) = 0, t < 0$. Para $T > t > 0$ la integral es:

$$v(t) = \int_{\tau=0}^{t} A.\frac{1}{M}e^{-\frac{B}{M}(t-\tau)}d\tau = \frac{A}{B}\left(1 - e^{-\frac{B}{M}t}\right)$$

y para $t > T$ la integral es

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{\tau=0}^{T} A.\frac{1}{M}e^{-\frac{B}{M}(t-\tau)}d\tau = \frac{A}{B}\left(e^{-\frac{B}{M}(t-T)} - e^{-\frac{B}{M}t}\right) \\ v(t) &= \frac{A}{B}e^{-\frac{B}{M}(t-T)}\left(1 - e^{-\frac{B}{M}T}\right) \end{aligned}$$

que verifica lo hallado en el punto 3.

6. Del análisis de la respuesta impulsional $h(t)$ se pueden obtener las siguientes conclusiones:

   - Como el $h(t)$ es causal y $h(t) = 0, t < 0$, al realizar la convolución con cualquier señal causal, nunca aparecerá salida antes que aparezca la entrada (espeje el $h(t)$ y verifíquelo gráficamente). De esta forma podemos asegurar que si el $h(t) = 0, t < 0$, entonces el sistema es causal.

- En cuestión de estabilidad es más complicado hacer aseveraciones, aunque si el $h(t)$ posee un área finita, la convolución con otra función acotada de área finita, será finita. Por lo tanto si el área del $h(t)$ es finita podemos decir que el sistema es estable.

2.11. Resumen del capítulo

Definimos las características principales de los sistemas con los que trabajaremos a lo largo del libro: los sistema lineales invariantes en el tiempo (LTI). Los sistemas lineales cumplen con el principio de superposición: la suma de entradas escaladas se traduce en la suma de las salidas individuales escaladas. La invariancia en el tiempo impone que desplazamientos temporales de las señales de entrada inducen desplazamientos temporales equivalentes a la salida.

Introdujimos conceptos de memoria, causalidad y estabilidad. Estudiamos la relación temporal entre la entrada y la salida de un sistema LTI mediante la operación de convolución. Dedujimos la respuesta de la conexión de sistemas en serie y en paralelo. Definimos la respuesta impulsional y la indicial, que caracterizan por completo al sistema. Estudiamos la modelización de sistemas físicos simples mediante ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes. Aplicamos analogías entre distintos modelos para poder traducir sistemas físicos a un circuito eléctrico-mecánico equivalente. Finalmente, mostramos la aplicación de la modelización para hallar circuitos equivalentes de engranajes, palancas y cremalleras utilizando generadores de corriente controlados.

2.12. Problemas propuestos

1. Dado un sistema discreto con una relación entrada($x[n]$)-salida($y[n]$) dada por

$$y[n] = T\left[x[n]\right] = x[k_0 n] \qquad k_0 = cte$$

   indique si el mismo es lineal y si es invariante en el tiempo. Justifique.

2. Dado un sistema continuo con una relación entrada($x(t)$)-salida($y(t)$) dada por

$$y(t) = T\left[x(t)\right] = x^2(t)$$

   indique si el mismo es lineal, causal, estable y si es invariante en el tiempo. Justifique.

3. Un sistema LTI discreto posee la siguiente respuesta impulsional : $h[n] = \alpha^n u[n]$. Indique si el sistema es causal y si es estable. Justifique.

4. En un sistema LTI se cumple que la salida es la convolución de la entrada con la respuesta impulsional: $y[n] = x[n] * h[n]$. Demuestre la siguiente igualdad:

$$x[n - n_1] * h[n - n_2] = y[n - n_1 - n_2]$$

5. Observe las señales graficadas en la figura 2.32.

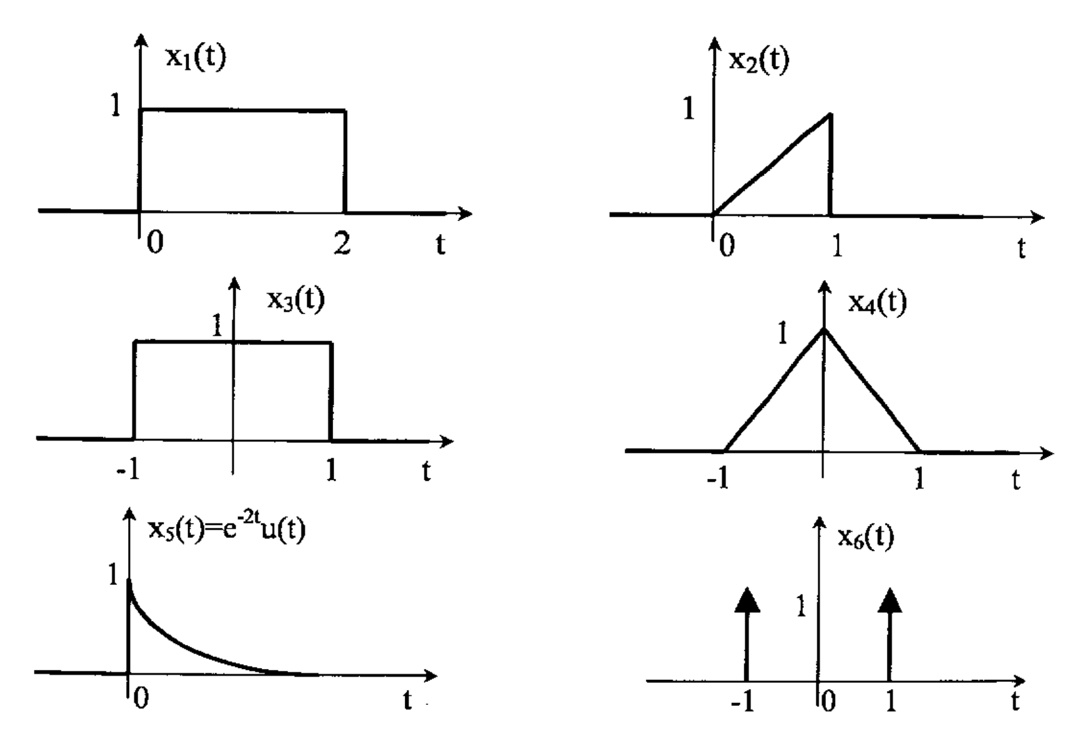


Figura 2.32: Señales para convolucionar.

Calcule las siguientes convoluciones gráfica y analíticamente:

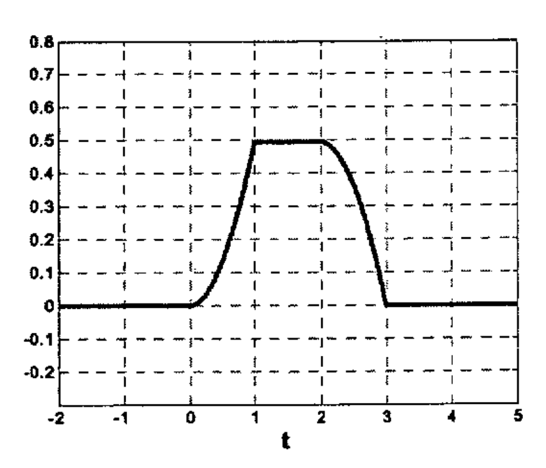


Figura 2.33: Rta: $x_1(t) * x_2(t)$

a) $x_1(t) * x_2(t)$.

b) $x_1(t) * x_3(t)$.

c) $x_1(t) * x_4(t)$.

d) $x_1(t) * x_5(t)$.

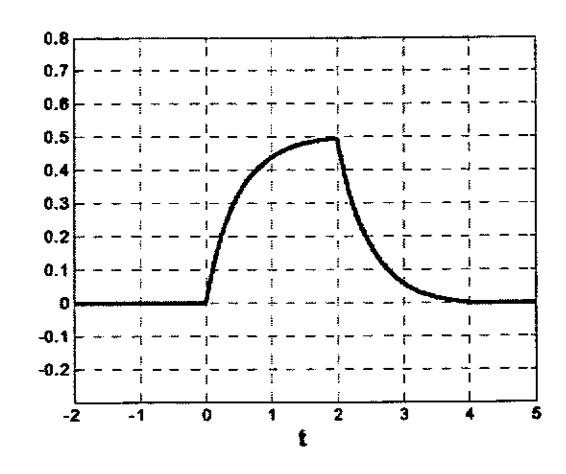


Figura 2.34: Rta: $x_1(t) * x_5(t)$

e) $x_1(t) * x_6(t)$.

Rta: $u(t+1) - u(t-3)$

f) $x_1(t) * [x_1(t) + x_2(t)]$.

g) $x_4(t) * x_6(t)$.

Rta: $y(t) = \rho(t+2) - \rho(t+1) - \rho(t-1) + \rho(t-2)$

h) $x_6(t) * x_2(t)$.

Rta: $y(t) = x_2(t+1) + x_2(t-1)$

i) $x_1(t) * x_6(t) * x_3(t)$.

j) $x_2(t) * x_2(t)$.

Rta: $y(t) = 0$ para $t < 0$. $y(t) = \frac{1}{6}t^3$ para $0 \leq t < 1$. $y(t) = -\frac{1}{6}t^3 + t - \frac{2}{3}$ para $1 \leq 0 < 2$. $y(t) = 0$ para $t \geq 2$.

6. Definimos las siguientes señales discretas: $x_1[n] = u[n] - u[n-5]$, $x_2[n] = n.u[n] - 2(n-3)u[n-3] + (n-6)u[n-6]$, $x_3[n] = \delta[n-5] - \delta[n+5]$, $x_4[n] = (1/2)^n u[n]$. Grafique cada una y realice las siguientes convoluciones:

   a) $x_1[n] * x_1[n]$ (autoconvolución).

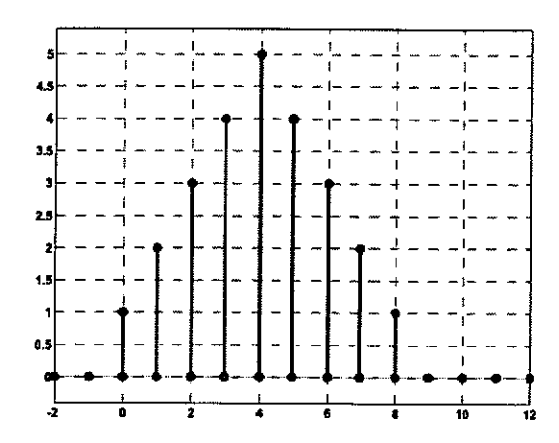


Figura 2.35: Rta: $x_1[n] * x_1[n]$

   b) $x_1[n] * x_3[n]$.

   c) $x_1[n] * x_4[n]$.

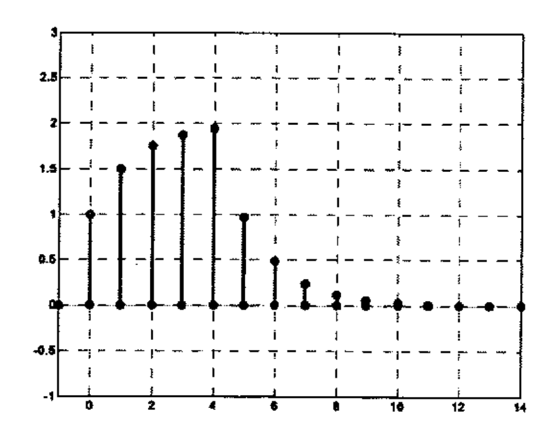


Figura 2.36: Rta: $x_1[n] * x_4[n]$

   d) $x_4[n] * x_4[n]$(autoconvolución).

   e) $x_3[n] * x_4[n]$.

   f) $x_2[n] * x_3[n]$.

Figura 2.37: Rta: $x_2[n] * x_3[n]$

g) $x_2[n] * x_2[n]$.

7. Considere el circuito RC serie mostrado en la figura 2.38. Se pide:

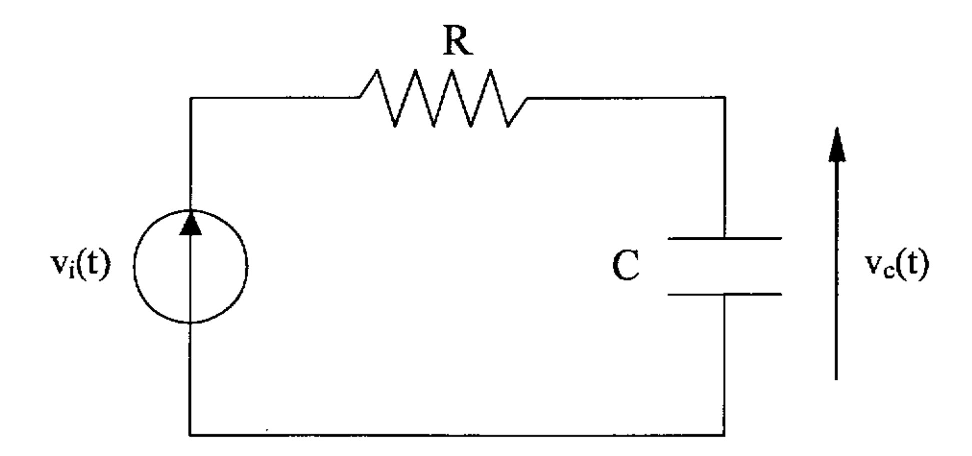


Figura 2.38: Circuito R-C serie.

a) Encuentre la ecuación diferencial que relaciona a la tensión de entrada $v_i(t)$ con la tensión sobre el capacitor como salida $v_c(t)$.

b) Si $R = 2\Omega$ y $C = 0{,}1F$, calcule la tensión de salida $v_c(t)$ si la entrada es $v_i(t) = u(t) - u(t-1)$ en Volt. Calcule además la corriente del circuito $i(t), \forall t$.

Rta: $v_c(t) = 1 - e^{-5t}$ para $0 \leq t \leq 1$. $v_c(t) = (1 - e^{-5})e^{-5(t-1)}$ para $t > 1$.

c) Indique y justifique si el sistema es estable, es causal y si tiene o no memoria.

Rta: El sistema es causal porque su respuesta al impulso es una señal causal con $h(t) = 0$ para $t < 0$. Es estable porque la respuesta al impulso tiene energía finita. El sistema tiene memoria.

d) Si $R = 2\Omega$ y $C = 0{,}1F$, calcule la tensión de salida $v_c(t)$ si la entrada es ahora $v_i(t) = t.[u(t) - u(t-1)]$ en Volt. Calcule además la corriente del circuito $i(t), \forall t$.

Rta: $v_c(t) = \frac{1}{5}(e^{-5t} - 1)$ para $0 \leq t \leq 1$. $v_c(t) = \frac{1}{5}(4 - e^{-5})e^{-5(t-1)}$ para $t > 1$.

e) Si $R = 2\Omega$ y $C = 0{,}1F$, calcule la tensión de salida $v_c(t)$ si la entrada es ahora $v_i(t) = cos(2t)u(t)$ en Volt. Calcule además la corriente del circuito $i(t), \forall t$.

Rta: $v_c(t) = -\frac{25}{9}e^{-5t} + \frac{25}{9}cos(2t) + \frac{10}{9}sen(2t)$ para $t > 0$.

f) Si $R = 2\Omega$ y $C = 0{,}1F$, calcule la tensión de salida $v_c(t)$ si la entrada es ahora $v_i(t) = e^{-t/2}u(t)$ en Volt. Calcule además la corriente del circuito $i(t), \forall t$.

Rta: $v_c(t) = \frac{10}{9}(e^{-t/2} - e^{-5t}$ para $t > 0$.

g) Si $R = 2\Omega$ y $C = 0{,}1F$, calcule la tensión de salida $v_c(t)$ si la entrada es ahora $v_i(t) = u(t)$ en Volt y las condiciones iniciales son $v_c(0) = 0{,}5V$. Calcule además la corriente del circuito $i(t), \forall t$.

Rta: $v_c(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-5t}$ para $t > 0$.

8. La entrada de un sistema LTI es $x(t) = u(t)$ y su respuesta impulsional es $h(t) = A.e^{-bt}u(t), b > 0$. Se pide:

a) Halle la respuesta indicial (al escalón).

Rta: $s(t) = A.e^{-bt}$ para $b > 0$.

b) Halle la salida $y(t)$ si la entrada es ahora $x(t) = u(t+2) - 2.u(t) + u(t-3)$ sin realizar la convolución.(Utilice el primer punto).

Rta: $y(t) = s(t+2) - 2s(t) + s(t-3)$.

c) Halle la salida $y(t)$ si la entrada es ahora $x(t) = 2.\delta(t+3) - \delta(t-1)$ sin realizar la convolución.

Rta: $y(t) = 2h(t+3) - h(t-1)$.

9. La entrada de un sistema LTI es $x(t) = e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$ y su respuesta impulsional es $h(t) = e^{\alpha t}u(-t)$. Halle la salida $y(t)$.

10. La respuesta impulsional de un sistema LTI es $h(t) = e^{-5t}u(t)$ mientras que la entrada es un peine de deltas dado por:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \qquad T = cte$$

Halle analítica y gráficamente la salida $y(t)$.

Rta: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$.

11. El siguiente sistema está compuesto por una resistencia que proporciona una cantidad de calor $Q(t)$ dentro de la cámara interna como muestra la figura 2.39.

La resistencia térmica entre las cámaras es R_{th1}. La resistencia térmica de la cámara exterior con el medio ambiente es R_{th2}. Las capacidades térmicas de las cámaras son C_{th1} y C_{th2}. La temperatura ambiente exterior es θ_a. Se pide:

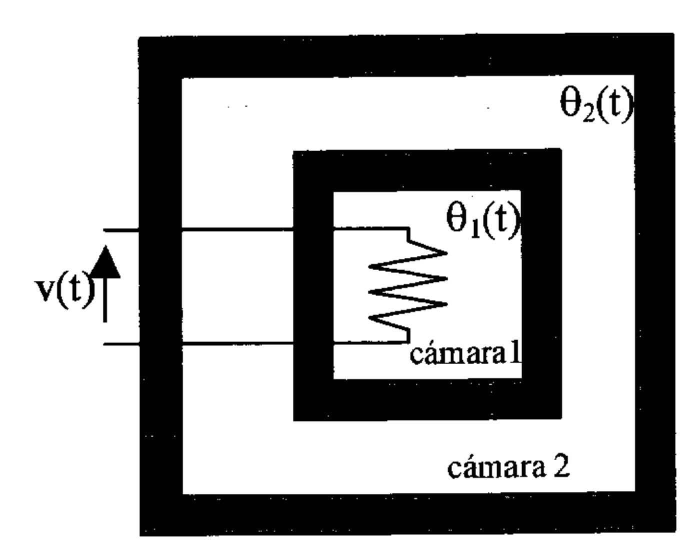


Figura 2.39: Esquema del sistema térmico a analizar.

a) Halle la ecuación diferencial que relaciona $Q(t)$ con la temperatura de la cámara externa $\theta_2(t)$.

Rta: $\frac{P}{C_{th1}C_{th2}R_{th1}} + \frac{\theta_A}{C_{th1}C_{th2}R_{th1}R_{th2}} = \theta_2'' + \frac{C_{th1}(R_{th1}+R_{th2})+C_{th2}R_{th2}}{C_{th1}C_{th2}R_{th1}R_{th2}}\theta_2' + \frac{\theta_2}{C_{th1}C_{th2}R_{th1}R_{th2}}$

b) Halle la temperatura de la cámara externa $\theta_2(t)$ si la entrada es $Q(t) = A.\rho(t) - \rho(t - T_0)$ en Joules si de considera despreciable la capacidad térmica de la cámara 1 : $C_{th1} = 0$.

Rta: $\theta_2(t) = A.R_2(\tau.e^{-t/\tau} + t - \tau) + \theta_A$ para $0 \leq t \leq T$. $\theta_2(t) = A.R_2.\tau(e^{-T/\tau-1})e^{-(t-T)/}$ $A.T.R_2 + \theta_A$ para $t > T$. Con $\tau = R_2.C_2$

12. El sistema de amortiguación de un automóvil se puede representar básicamente con tres elementos. La masa del automóvil M, un amortiguador viscoso B y un resorte de constante elástica K, como muestra el esquema de la figura 2.40.

    a) Encuentre la ecuación diferencial que relaciona la fuerza aplicada $f(t)$ con el desplazamiento $x(t)$ de la masa con respecto a un punto origen $x(0) = 0$ en metros.

    b) Encuentre la solución homogénea de la ecuación diferencial para los tres posibles casos: subamortiguado, sobreamortiguado y crítico. Indique como se relacionan las variables M, B, K en cada caso.

    c) Si el sistema encuentra un pozo que impone una fuerza $f(t) = u(t)$ dibuje esquemáticamente las señales de posición $x(t)$ y velocidad $v(t)$ de la masa del automóvil para el caso de sistema subamortiguado. Coloque valores ejemplo de parámetros M, B, K que generen una solución de ese estilo.

    d) Halle la respuesta impulsional para los valores de M, B, K del punto anterior.

    e) Encuentre el desplazamiento máximo $x_{max}(t)$ en función de las variable M, B, K para el caso subamortiguado, siempre conservando la entrada como $f(t) = u(t)$.

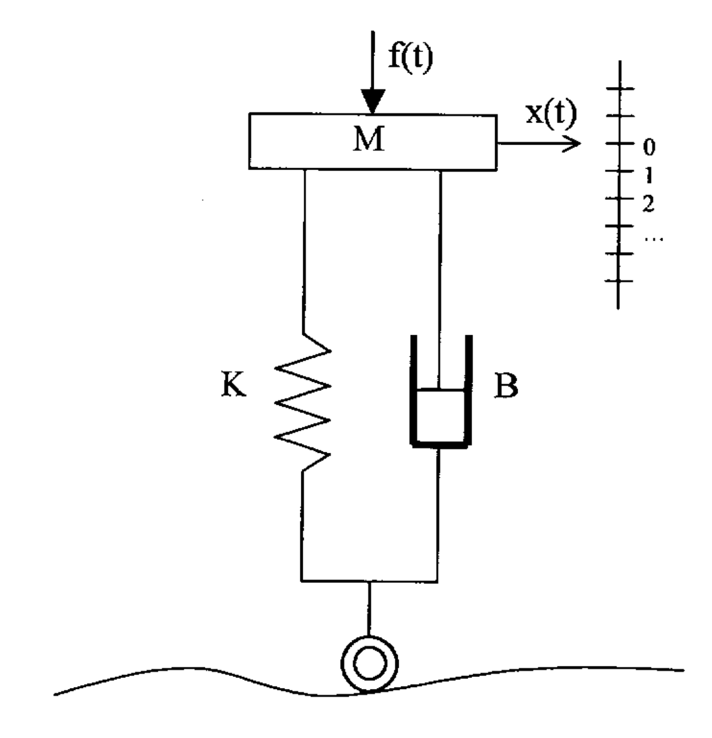


Figura 2.40: Esquema del sistema de amortiguación.

f) Si los efectos de los pozos son muy notorios en el automóvil, indique qué parámetros modificaría para atenuarlos. Justifique.

Realice un modelo eléctrico análogo al mecánico indicando claramente la relación entre los valores de los componentes y los parámetros M, B, K.

13. Halle las ecuaciones integro-diferenciales que modelizan el sistema de la figura 2.41.

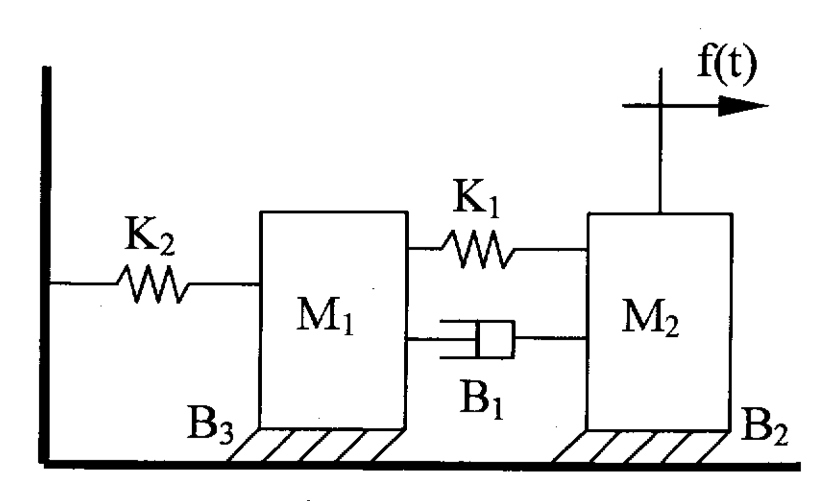


Figura 2.41: Esquema del sistema.

donde la entrada es la fuerza $f(t)$ y la salida es:

a) La velocidad de la masa M_1 $v_1(t)$.

b) La velocidad de la masa M_2 $v_2(t)$.

c) La posición de la masa M_1 $x_1(t)$.

Considere condiciones iniciales nulas en todos los casos.

Rta: Las ecuaciones del sistema son: EQ1) $F = M_1.v_1' + B_1.v_1 + k_1\int(v_1 - v_2)d\tau + b_2(v_1 - v_2)$. EQ2) $B_2(v_1 - v_2) + k_1\int(v_1 - v_2)d\tau = m_2.v_2' + B2.v_2 + k_2\int v_2 d\tau$.

14. El siguiente sistema mecánico (figura 2.42) utiliza una cremallera para arrastrar la masa M.

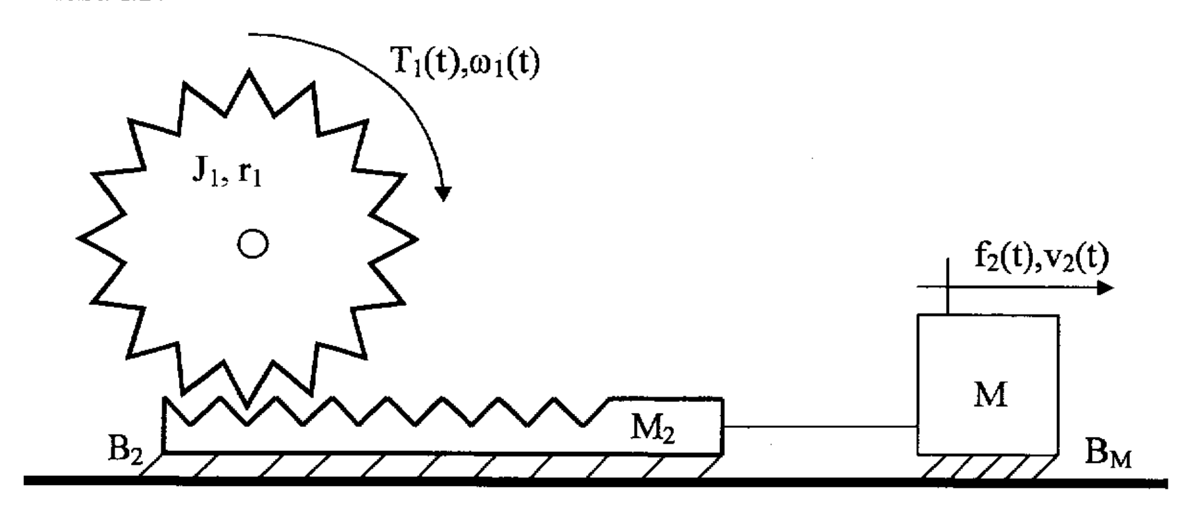


Figura 2.42: Esquema de un sistema a cremallera.

a) Dibuje un diagrama electro-mecánico equivalente que modelice el sistema.

b) Halle una única ecuación diferencial que relacione el torque de entrada $T_1(t)$ con la velocidad angular $\omega_1(t)$.

Rta: $T_1 = (J_1 + \frac{M+M_2}{n^2})\omega_1' + \frac{B_2+B_M}{n^2}\omega_1$ con $n = \frac{1}{r_1}$.

c) Utilice la ecuación diferencial del punto anterior para confeccionar otro sistema mecánico rotacional que cumpla con esa ecuación, y que posea solo dos elementos: un momento de inercia J_{eq} y un rozamiento B_{eq}.

d) Trabajando nuevamente sobre el sistema original, halle una única ecuación diferencial que relacione el torque de entrada $T_1(t)$ con la velocidad $v_2(t)$ de la masa M.

Rta: $T_1 = (n.J_1 + \frac{M_2+M}{n})v_2' + \frac{B_2+B_M}{n}v_2$

e) Estudie el efecto que produce el radio del engranaje sobre las relaciones de entrada-salida analizadas en el punto b y en el punto d.

15. Un sistema LTI con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ está descripto por la siguiente ecuación diferencial:

$$x(t) = y'(t) + \frac{1}{2}.y(t)$$

a) Halle la salida $y(t)$ si la entrada es $x(t) = cos(t) + e^{-3t} + 1, t > 0$. Asuma condiciones iniciales nulas.

b) Halle la respuesta indicial del sistema $s(t)$.

16. Un sistema LTI discreto de entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ está descripto por la siguiente ecuación en diferencias:

$$x[n] = y[n] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

Calcule la salida $y[n]$ si la entrada es $x[n] = u[n] - u[n-4]$. Realice un diagrama en bloques del sistema utilizando sumadores y bloques de retraso (*delay*).

17. Encuentre un circuito electromecánico que modelice el sistema de la figura 2.43. Halle las ecuaciones diferenciales correspondientes. Encuentre el circuito eléctrico equivalente.

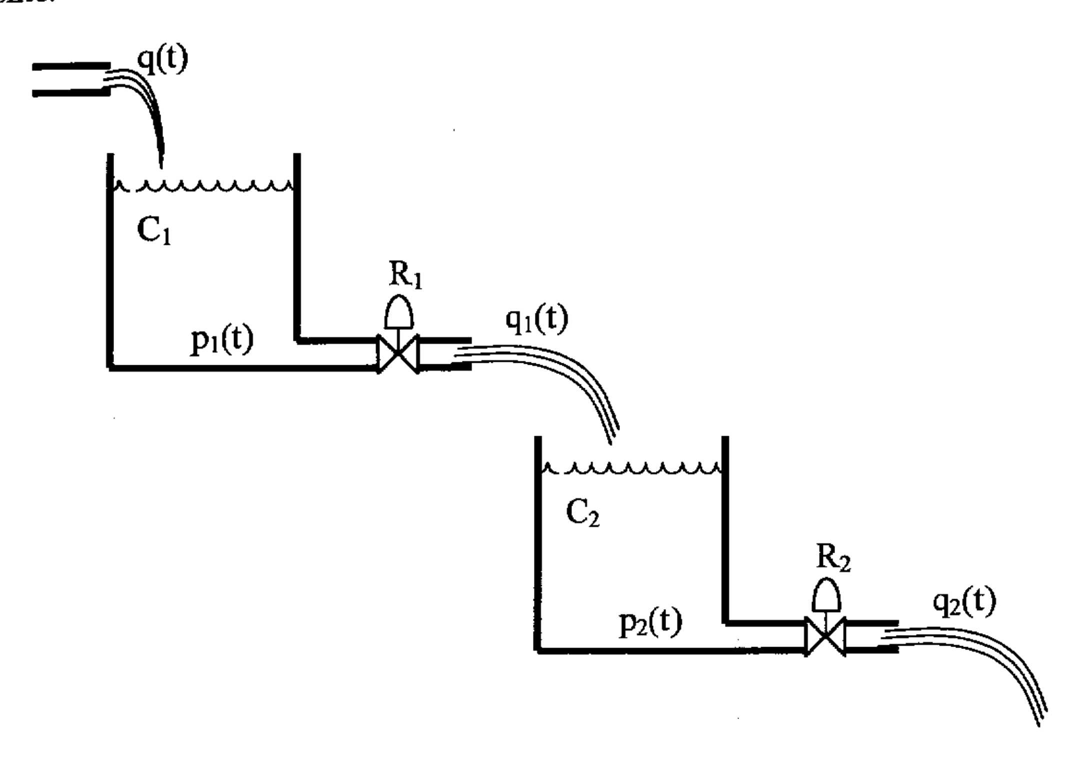


Figura 2.43: Modelo hidráulico a modelizar.

Rta: EQ1) $q_1 = C_1P_1' + \frac{P_1-P_2}{R_1}$. EQ2) $\frac{P_1-P_2}{R_1} = C_2P_2' + \frac{P_2}{R_2}$.

18. Se utilizan dos engranajes para alivianar la carga de un motor. El sistema se esquematiza en la figura 2.44.

donde J es el momento de inercia de la carga. Suponga además que existen rozamientos dinámicos B_1 y B_2 para cada engranaje. Se pide:

a) Halle el circuito electromecánico equivalente.

$T_1(t)$, $\omega_1(t)$
J_1 , r_1
J_2 , r_2
$T_2(t)$, $\omega_2(t)$
$\omega_2(t)$
Carga: Momento de inercia J
D

Figura 2.44: Sistema mecánico con engranajes

b) Halle el circuito eléctrico análogo aclarando cómo modelizó cada componente.

c) Encuentre una única ecuación diferencial que relacione a $T_1(t)$ con $\omega_1(t)$.

d) Encuentre una única ecuación diferencial que relacione a $T_1(t)$ con $\omega_2(t)$.

e) Para el punto c halle un modelo mecánico equivalente con un único momento de inercia J_{eq} y un rozamiento B_{eq}. Indique claramente cómo utilizar la relación r_1/r_2.

19. Describir las ecuaciones de movimiento que modelan el sistema de la figure 2.45. Considerarlo en equilibro. Graficar el circuito eléctrico equivalente.

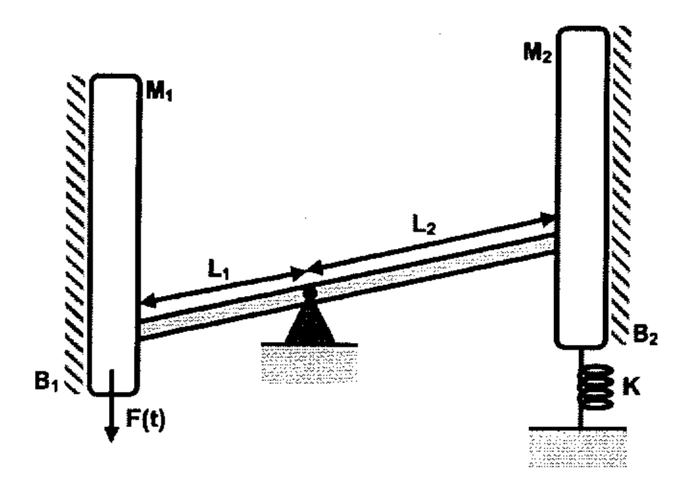


Figura 2.45: Sistema de palanca

Rta: EQ1) $F = M_1 v_1' + B_1 v_1 + F_1$. EQ2) $F_2 = M_2 v_2' + B_2 v_2 + k \int v_2 d\tau$. EQ3) $n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{L_1}{L_2}$

20. En el sistema de la figura 2.46 se libera la masa M de peso P en $t = 0$. Determinar la expresión de la velocidad y el desplazamiento de la misma si $M = 2kg$, $B = 2Ns/m$ y $K = 5N/m$

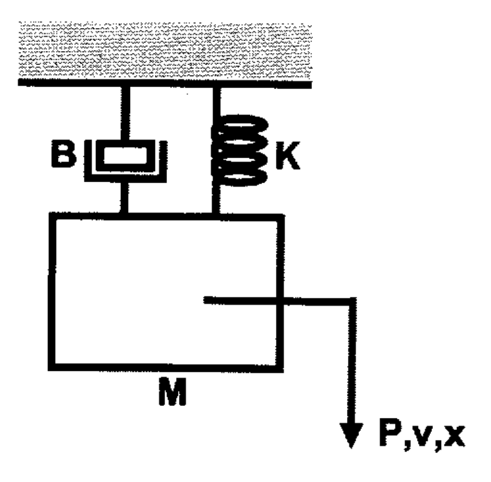


Figura 2.46: Sistema de palanca

Rta: $x(t) = \frac{P}{K}\left[1 - e^{-t/2}(cos(t) + \frac{1}{3}sen(t)\right]$, $t > 0$

Aplicación en MatLab

```
%CONVOLUCION DE SEÑALES CONTINUAS
%Se utiliza el mismo concepto que en la simulación de señales
continuas:

%Generación de un vector temporal
%Incremento diferencial
dt=0.01

%Vectores temporales
t1_ini=-1
t1_fin=3
t1=t1_ini:dt:t1_fin
t2_ini=-1
t2_fin=2
t2=t2_ini:dt:t2_fin

%Señales a convolucionar
x1=esc(t1)-esc(t1-2)
x2=ramp(t2)-ramp(t2-1)-esc(t2-1)
%Visualización
subplot(311),plot(t1,x1),axis([-1 3 -0.5 1.5]),grid
subplot(312),plot(t2,x2),axis([-1 2 -0.5 1.5]),grid

%Implementación del algoritmo de convolución: Se utiliza la función CONV(v1,v2)
%provista por MatLab
y=conv(x1,x2)*dt
%Para la visualización se debe generar un nuevo vector temporal del tamaño del
%resultante de la convolución (L1+L2-1). Recordar que la convolución comienza en la
%suma de los inicios (t1_ini+t2_ini) y finaliza en la suma de los finales
%(t1_fin+t2_fin)
t=t1_ini+t2_ini:dt:t1_fin+t2_fin
%Visualización
subplot(313),plot(t,y),([t(1) t(end) -0.5 1.5]),grid
```

Aplicación en MatLab

```
%CONVOLUCION DE SEÑALES DISCRETAS
%Se utiliza la misma metodología que para la convolución contínua
%(caso particular dt=1)

%Vectores discretos
n1_ini=-1
n1_fin=6
n1=n1_ini:n1_fin
n2_ini=-1
n2_fin=7
n2=n2_ini:n2_fin

%Señales a convolucionar
x1=esc(n1)-esc(n1-5)
x2=ramp(n2)-2*ramp(n2-3)+ramp(n2-6)
%Visualización
subplot(311),stem(n1,x1),axis([-1 6 -1 2]),grid
subplot(312),stem(n2,x2),axis([-1 7 -1 3]),grid

%Implementación del algoritmo de convolución: Se utiliza la función CONV(v1,v2)
%provista por MatLab
y=conv(x1,x2)
%Para la visualización se debe generar un nuevo vector discreto del tamaño del
%resultante de la convolución (L1+L2-1). Recordar que la convolución comienza en la
%suma de los inicios (n1_ini+n2_ini) y finaliza en la suma de los finales
%(n1_fin+n2_fin)
n=n1_ini+n2_ini:n1_fin+n2_fin
%Visualización
subplot(313),stem(n,y),([n(1) n(end) -1 2]),grid
```

Aplicación en MatLab

```
%RESOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1er ORDEN
%Para la resolución de ecuaciones diferenciales en forma numérica
%se pueden utilizar las funciones ODE23() y ODE45() que implementan el
%método Runge-Kutta de 2/3 orden y 4/5 orden respectivamente. Deben
%definirse un intervalo temporal, una función que contenga la expresión de
%la ecuación a resolver y otra que proporcione la señal de entrada:

%Incremento diferencial
dt=0.01
%Condición inicial de la ecuación diferencial
vc0=0
%Rango de evaluación temporal de la ecuación diferencial
tspan=[0:dt:5]
%Constantes del sistema
global R C
R=2, C=0.1

%Visualización de la función de entrada f(t)=u(t)-u(t-1) en el rango temporal
%seleccionado
subplot(311),plot(tspan,FUN_vel(tspan)),grid
title('vel(t)=u(t)-u(t-1)'); xlabel('t');ylabel('ve(t)')
axis([0 3 0 1.5])

%Resolucion de la ODE. El algoritmo que genera la solución ejecuta la función
%ODE_vcl (donde se almacena la expresión de la ecuación diferencial) en forma
%recursiva.
[t vcn]=ode23('ODE_vcl',tspan,vc0)

%Visualización de la solución
subplot(312),plot(t,vcn),grid
title('Resol. ec dif vcp=(1/R*C)*(ve-vc)'); xlabel('t');ylabel('vc(t)')
axis([0 3 0 1.5])

%Calculo de la corriente en el capacitor: i(t)=c*dvc(t)/dt
ic=C*diff(vcn)/dt
%Visualización de la corriente en el capacitor
subplot(313),plot(t(1:length(ic)),ic),grid
title('Corriente del circuito ic=C*dVc/dt'),xlabel('t'),ylabel('i(t)')
axis([0 3 -0.5 0.5])
```

```
%ECUACION DIFERENCIAL ODE_VC1:
%Sistema Masa-Resorte: vc'+vc/RC=ve/RC -> vc'=1/(RC)*(ve-vc)
function vcp=ODE_vcl(t,vc)
global R C;
vcp=(1/(R*C))*(FUN_vel(t)- vc);
```

```
%FUNCION DE ENTRADA FUN_vel
function f=FUN_vel(t)
f=esc(t)-esc(t-1);
```

Aplicación en MatLab

```
%RESOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDEN SUPERIOR
%Al igual que para las de primer orden, se utilizan las funciones
%ODE23() y ODE45(). Consecuentemente, deberá conformarse un sistema
de ecuaciones diferenciales de primer orden que se resolverá en
forma matricial:

%Resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden:
%Estructura x= y''+a*y'+b*y con f=y'

%Formación del sistema
% x = f' + a f + b y
% f = y'

%[ y'] = [  0   1 ] [ y ] + [0]
%[ f'] = [ -b  -a ] [ f ] + [x]

%Constantes (globales)
C=2,R=1/2,L=1/5,g=9.8
global C R L g
%Incremento diferencial temporal
dt=0.01
%Condiciones iniciales de la ecuación diferencial de segundo orden (vector)
vci=[0 0]'
%Rango de evaluación temporal de la ecuación diferencial
tf=15;
tspan=[0:dt:tf]

%Resolucion de ED2 de t=0 hasta t=tf con condiciones iniciales
[T,X]=ode23('ODE_VC2',tspan,vci)

%Visualización de la funciones de entrada y salida
subplot(211),plot(tspan,X(:,1),'b')
xlabel('t'),ylabel('x(t)')
axis([0 tf 0 6])

%Comparacion con la solución analitica
X_an=(C*g*L)*(1-(exp(-0.5*tspan).*(cos(1.5*tspan)+(1/3)*sin(1.5*tspan))))
subplot(212),plot(tspan,X_an,'r')
xlabel('t'),ylabel('x__analitica(t)')
axis([0 tf 0 6])
```

```
%ECUACION DIFERENCIAL ODE_VC2:
function xp= ODE_VC2(t,x)
%Sistema Masa-Amortiguador-Resorte: P/C = x''+(1/RC)x'+(1/LC)x
global R C L;
%Sistema de ecuaciones
Matriz=[0 1;-1/(L*C) -1/(R*C)];
Vector=[0 FUN_Ve2(t)/C]';
%Ecuación de salida
xp=Matriz*x+Vector;
```

```
%FUNCION DE ENTRADA FUN_ve2
function f=FUN_ve2(t)
global C g;
f=C*g*esc(t);
```

Capítulo 3

Variable compleja

3.1. Introducción

Comenzamos este capítulo presentando el análisis de funciones de variable compleja. Los conocimientos sobre números complejos, estudiados en álgebra, pueden ser aplicados a la solución de problemas reales de ingeniería. Para esto debemos recorrer un largo camino, desde la definición de conceptos como límites y derivadas en el campo complejo, hasta los de integración y desarrollo en serie. En el presente capítulo se describirán las funciones de variable compleja, destacando la definición de **función analítica**. Utilizaremos estas últimas para introducir la noción de **mapeo conforme**, transformando un conjunto de puntos desde un plano dominio hasta un plano imagen. Las aplicaciones de esta transformación de regiones abarcan campos de la física y la ingeniería. Recomendamos consultar la teoría de números complejos, la cual se encuentra resumida en el apéndice A.

3.2. Función de variable compleja

Todo número complejo es un par ordenado de la forma $z \in \mathbb{C}, z = (x, y)_\wedge x \in I\!R, y \in I\!R$, donde x es la parte real e y la imaginaria. La representación binómica del número complejo es $z = x + i.y$, donde $i = \sqrt{(-1)}$ es la unidad compleja. Los números complejos se pueden representar en un plano denominado *Plano Complejo*. Es fácil demostrar que su representación polar (como si se tratara de un vector) es $z = \rho.e^{i\varphi}$ donde ρ es el módulo o distancia al origen, y φ la fase o ángulo en radianes desde el semieje positivo de las x.

Para definir una función de variable compleja, es necesario seleccionar un conjunto S de puntos del plano y aplicarles alguna regla de cálculo para obtener otro conjunto de puntos. Tanto el dominio (puntos de partida de la función) como la imagen (puntos destino) serán siempre pertenecientes a los complejos. Podemos escribir entonces una función como sigue:

$$\omega = f(z)$$

donde aceptaremos la nomenclatura siguiente: Los puntos pertenecientes al dominio serán,

en representación binómica y exponencial, respectivamente:

$$z = x + i.y = \rho.e^{i\varphi}$$

Estos puntos estarán en el **plano Z**. La función que transforma los puntos será $f(z)$ y dará como resultado un conjunto de puntos en el **plano** ω, donde:

$$\omega = u + i.v = R.e^{i\phi}$$

En forma genérica, la función transformará cada punto del dominio dependiendo de su parte real y su parte imaginaria, por lo tanto:

$$\omega = f(z) = u(x, y) + i.v(x, y)$$

donde vemos que tanto la parte real como la imaginaria de ω pueden depender de la parte real e imaginaria del conjunto de puntos S en el plano z. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.2.1 *Analice la parte real e imaginaria de la función $\omega = f(z) = z^2 + 1$. Calcule la imagen del punto $z = 1 - 2i$. Grafique en planos separados el efecto de la transformada sobre el punto.*

Como no poseemos el conjunto S de puntos del dominio, calcularemos la transformación para todo el plano z y luego analizaremos si existe alguna restricción (puntos que no se puedan transformar). Colocando $z = x + i.y$ y separando en parte real e imaginaria, obtenemos:

$$\begin{aligned} \omega = u(x, y) + i.v(x, y) &= f(z = x + i.y) \\ &= (x + i.y)^2 + 1 = (x^2 - y^2 + i{,}2xy) + 1 \\ &= \underbrace{(x^2 - y^2 + 1)}_{u(x,y)} + i.\underbrace{(2xy)}_{v(x,y)} \end{aligned}$$

por lo tanto separamos la parte real e imaginaria como:

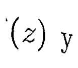
$$\omega = f(z) = \begin{cases} u = x^2 - y^2 + 1 \\ v = 2xy \end{cases}$$

Aquí comprobamos que tanto u como v dependen ambas de x y de y. Por ejemplo, al calcular la imagen de $z = 1 - 2i$ ($x = 1$,$y = -2$) obtenemos $w = -3 - 4i$:

$$\omega = f(z = 1 - 2i) = \begin{cases} u = 1^2 - (-2)^2 + 1 = -3 \\ v = 2 \cdot 1 \cdot (-2) = -4 \end{cases}$$

que gráficamente se dibuja en la figura 3.1.

Ningún punto del dominio sufre restricciones para el cálculo de la función. Esta función es un polinomio que, como veremos a continuación, cumple con todos los requisitos de continuidad y derivabilidad requeridos para que esto último sea posible.



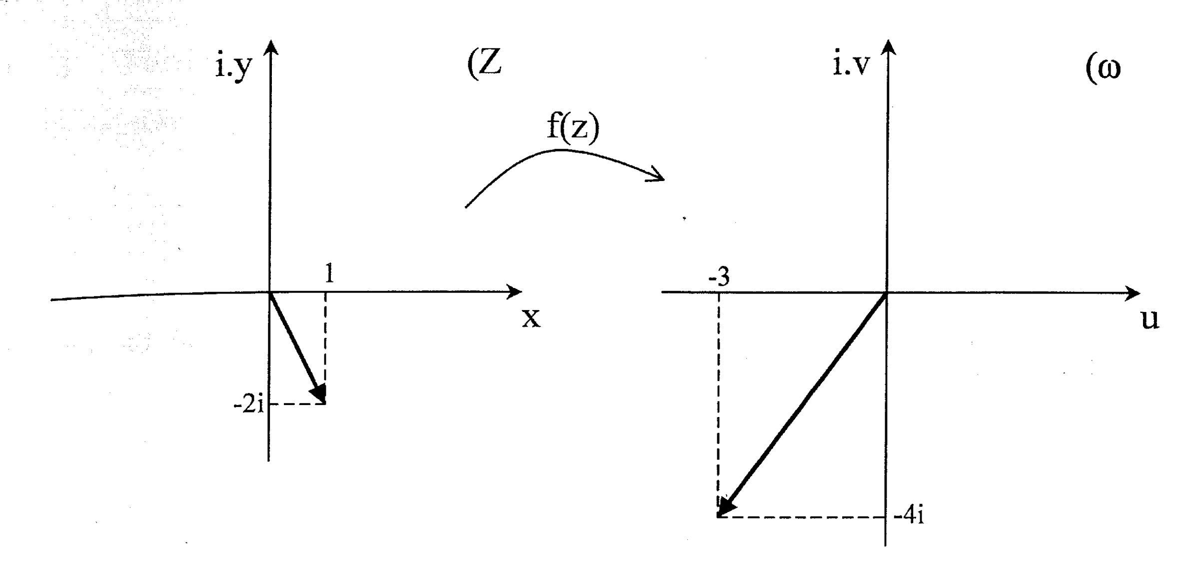


Figura 3.1: Mapeo de un punto z a través de $f(z)$.

Se define como **función unívoca** a aquella para la cual *para cada punto del dominio corresponde uno y solo un punto en la imagen.* Si para un punto del dominio corresponde más de un punto de la imagen la función es *multiforme.* Ejemplos de funciones multiformes se observaron cuando se analizaron la radicación y el logaritmo en el apéndice A.

Enumeremos a continuación un conjunto de funciones elementales, junto con algunas identidades que pueden ser demostradas separando la parte real y la parte imaginaria de cada función.

3.2.1. Funciones polinomiales

Estas funciones son del tipo

$$\omega = f(z) = a_0 + a_1.z + a_2.z^2 + \cdots + a_n.z^n$$

donde n es el grado del polinomio siempre que $a_n \neq 0$. Todas las contantes pueden ser complejas.

3.2.2. Funciones racionales

Estas funciones son el cociente entre un numerador $N(z)$ y un denominador $D(z)$:

$$\omega = f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

donde el numerador y el denominador son funciones polinomiales.

3.2.3. Funciones exponenciales

Analizamos esta función en el apéndice A:

$$\omega = f(z) = e^z$$

Las propiedades de las exponenciales se cumplen al igual que para variable real. La operación inversa es el logaritmo natural.

3.2.4. Funciones trigonométricas

Utilizando la igualdad de *Euler* : $e^{ix} = cos(x) + i.sen(x)$ se pueden demostrar inmediatamente las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
sen(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
sec(z) &= \frac{1}{cos(z)} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \\
csc(z) &= \frac{1}{sen(z)} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}} \\
tan(z) &= \frac{sen(z)}{cos(z)} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)} \\
cot(z) &= \frac{cos(z)}{sen(z)} = \frac{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{e^{iz} - e^{-iz}}
\end{aligned}$$

Junto con estas igualdades agregamos algunas conocidas que se verifican en el campo complejo:

$$sen^2(z) + cos^2(z) = 1 \qquad 1 + tan^2(z) = sec^2(z) \qquad 1 + cot^2(z) = csc^2(z)$$
$$sen(-z) = -sen(z) \qquad cos(-z) = cos(z) \qquad tan(-z) = -tan(z)$$

$$\begin{aligned}
sen(z_1 \pm z_2) &= sen(z_1)cos(z_2) \mp cos(z_1)sen(z_2) \\
cos(z_1 \pm z_2) &= cos(z_1)cos(z_2) \mp sen(z_1)sen(z_2)
\end{aligned}$$

3.2.5. Funciones hiperbólicas

Se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
senh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\
cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\
sech(z) &= \frac{1}{cosh(z)} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} \\
csch(z) &= \frac{1}{senh(z)} = \frac{2}{e^z - e^{-z}} \\
tanh(z) &= \frac{senh(z)}{cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{(e^z + e^{-z})} \\
coth(z) &= \frac{cosh(z)}{senh(z)} = \frac{(e^z + e^{-z})}{e^z - e^{-z}}
\end{aligned}$$

donde se cumplen las siguientes igualdades

$$cosh^2(z) - senh^2(z) = 1 \qquad 1 - tanh^2(z) = sech^2(z) \qquad coth^2(z) - 1 = csch^2(z)$$
$$senh(-z) = -senh(z) \qquad cosh(-z) = cosh(z) \qquad tanh(-z) = -tanh(z)$$

$$\begin{aligned}
senh(z_1 \pm z_2) &= senh(z_1)cosh(z_2) \pm cosh(z_1)senh(z_2) \\
cosh(z_1 \pm z_2) &= cosh(z_1)cosh(z_2) \pm senh(z_1)senh(z_2)
\end{aligned}$$

3.2.6. Funciones logarítmicas

Como analizamos en el apéndice A la función logarítmica posee infinitas imágenes para un solo punto de partida:

$$\omega = f(z) = ln(z) = ln(\rho) + i(\varphi + 2.k.\pi) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

3.2.7. Funciones trigonométricas inversas

Se expresan en función de logaritmos, para los cuales siempre los resultados son multívocos para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$\begin{aligned}
sen^{-1}(z) &= ln\left(i.z + \sqrt{1 - z^2}\right) \\
cos^{-1}(z) &= \frac{1}{i}.ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \\
tan^{-1}(z) &= \frac{1}{2i}ln\left(\frac{1 + i.z}{1 - i.z}\right)
\end{aligned}$$

3.2.8. Funciones hiperbólicas inversas

$$
\begin{aligned}
senh^{-1}(z) &= ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) \\
cosh^{-1}(z) &= ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) \\
tanh^{-1}(z) &= \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)
\end{aligned}
$$

3.3. Límite y Continuidad

Se dice que una función $f(z)$ tiene límite L cuando z tiende a z_0, si $f(z)$ está definida en una vecindad de z_0 :$V(z_0, \delta)$ (entorno reducido de centro z_0 y radio δ) y si para todo número real ϵ positivo puede hallarse un número real positivo δ, tal que para todos los puntos de la vecindad $|z - z_0| < \delta$ (excluyendo a z_0) se cumple

$$|f(z) - L| < \epsilon$$

no importa que tan chico sea el valor de ϵ. Esto se puede ver gráficamente en la figura 3.2

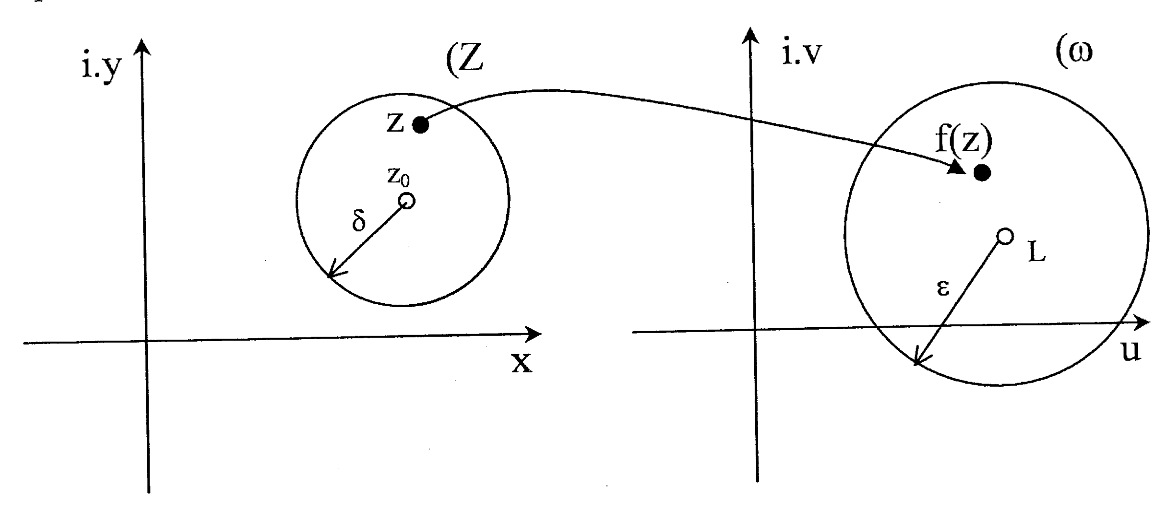


Figura 3.2: Plano dominio e imagen y el concepto de límite.

donde notamos que a medida que nos acercamos a z_0 en el dominio, la imagen $f(z)$ se acerca a L. Además, como si se tratara de un campo vectorial, las posibilidades de acercarse a z_0 pueden ser desde diferentes direcciones.

Si un límite existe, el mismo es único.

Demostración:

$(\Longrightarrow)$

Debemos demostrar que si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L_1 \quad \wedge \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = L_2$$

entonces $L_1 = L_2$. Por hipótesis, dado que para cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - L_1| < \epsilon/2 \qquad 0 < |z - z_0| < \delta$$
$$|f(z) - L_2| < \epsilon/2 \qquad 0 < |z - z_0| < \delta$$

entonces

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(z) + f(z) - L_2| \leq |L_1 - f(z)| + |f(z) - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

o sea $|L_1 - L_2| < \epsilon$ y como ϵ se puede elegir tan pequeño como se desee, $L_1 = L_2$
$(\Longleftarrow)$

3.3.1. Teoremas sobre límites

Si $\lim_{z \to z_0} f(z) = L_1$ y $\lim_{z \to z_0} g(z) = L_2$, entonces se cumplen los siguientes puntos:

1.

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z) = L_1 + L_2$$

2.

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) - \lim_{z \to z_0} g(z) = L_1 - L_2$$

3.

$$\lim_{z \to z_0} [f(z).g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z). \lim_{z \to z_0} g(z) = L_1.L_2$$

4.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} = \frac{L_1}{L_2} \quad L_2 \neq 0$$

3.3.2. Continuidad

Definición 3.3.1 *Se dice que una función unívoca $f(z)$ en una vecindad $V(z_0)$ es continua en un punto $z = z_0$ si $f(z_0)$ está definida y*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{3.1}$$

Esto implica que se deben cumplir los siguientes tres puntos:

1. *El límite debe existir*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

2. *La función en el punto debe existir, o sea $f(z_0)$ debe existir*

3. *La función en el punto y el límite deben coincidir $L = f(z_0)$*

Si una función es continua en z_0 entonces además se cumple que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f\left(\lim_{z \to z_0} z\right)$$

Los puntos para los cuales $f(z)$ no es continua se denominan *discontinuidades*. Si $f(z_0)$ existe pero no coincide con el límite la discontinuidad es *evitable*, y redefiniendo a $f(z)$ en z_0 como $f(z_0) = L$ la función será continua.

Una función es continua en una región, si lo es para todos los puntos de esa región.

3.3.3. Teoremas sobre continuidad

- Si $f(z)$ y $g(z)$ son continuas en $z = z_0$, entonces se cumple que $f(z) \pm g(z), f(z).g(z)$ y $f(z)/g(z), g(z_0) \neq 0$ son continuas también.

- Las funciones polinomiales, exponenciales e^z y $sen(z), cos(z)$ son continuas para todo z.

- La función compuesta de dos funciones continuas, es continua.

- Si $f(z)$ es continua en una región, entonces su parte real y su parte imaginaria también lo son.

- **Continuidad Uniforme**: Sea $f(z)$ continua en una región. Para cada punto z_0 de la región se cumple que eligiendo arbitrariamente un $\epsilon > 0$, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ cuando $|z - z_0| < \delta$. Si el δ depende del ϵ **pero no del punto particular z_0 de la región, se dice que $f(z)$ es uniformemente continua en la región.**

3.4. Función analítica

Se dice que una función $f(z)$ es diferenciable en un punto $z = z_0$ (punto interior) si existe el siguiente límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{3.2}$$

Este límite se conoce como derivada de $f(z)$ en el punto $z = z_0$. Como la definición de límite implica que la función esté definida en una vecindad del punto, la aproximación hacia z_0 puede realizarse por cualquier dirección. Esto implica que para que $f(z)$ sea diferenciable, el límite 3.2 debe ser el mismo sin importar por qué trayectoria nos acerquemos a z_0.

Ejemplo 3.4.1 *Calcule la derivada de $f(z) = z^2$ para cualquier z y verifique que es $f'(z) = 2z$.*

Utilizando la definición 3.2 pero con $z_0 = z$:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + (\Delta z)^2 + 2.z.\Delta z - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z + 2.z = 2z \end{aligned}$$

Para calcular este límite puede utilizar todas las reglas estudiadas para el campo real, la regla de la cadena y hasta el Teorema de L'Hopital. Además si $f(z)$ es diferenciable en z_0 también es continua en ese punto. Esto se cumple ya que, aplicando la definición de límite y derivabilidad, obtenemos

$$\forall \epsilon > 0; \exists \delta(\epsilon) > 0 / 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon$$

por lo tanto la diferencia

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = \omega(z)$$

es un infinitésimo o tiende a cero cuando $z \to 0$. Por lo tanto despejando $f(z)$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0).(z - z_0) + \omega(z).(z - z_0)$$

y aplicando el límite, obtenemos

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

verificando la continuidad de $f(z)$

Las reglas de derivación para la suma, resta, producto y cociente son las mismas que para variable real, así como la derivación de funciones compuestas.

Para probar la derivabilidad de una función es necesario probar que la derivada es única sin importar la trayectoria por la cual nos acerquemos al punto en cuestión. Esto puede llegar a ser engorroso para algunas funciones, por lo cual presentaremos un grupo de funciones que cumplen con característica *análogas* a las de diferenciabilidad en variable real, y que llamaremos *funciones analíticas.*

La interpretación geométrica de la derivada se puede mostrar mediante el gráfico de la figura 3.3.

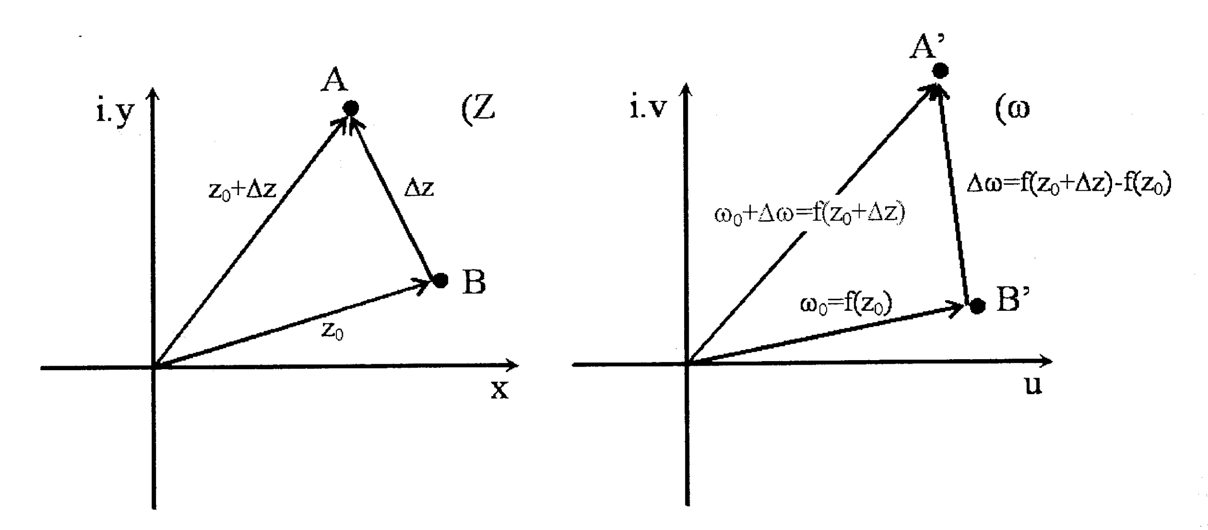


Figura 3.3: Plano dominio e imagen y el concepto de derivada.

Si incrementamos z_0 (punto B) en un Δz obtenemos el punto A a la izquierda. Esto implica en el plano imagen un vector $\Delta\omega = A' - B'$. La derivada es el límite de la razón cuando $z \to z_0$:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{A \to B} \frac{A'B'}{AB}$$

El mismo razonamiento puede hacerse al reemplazar z_0 por un punto cualquiera z.

3.4.1. Analiticidad

Se dice que una función es analítica en un dominio D [1], si $f(z)$ está definida y es diferenciable en todos los puntos de D. Si $f(z)$ es derivable en una vecindad de z_0, $V(z_0) \subset D$, se la denomina **analítica** en z_0. Donde aclaramos que debe existir la derivada en la vecindad de z_0 y sobre el propio z_0.

[1]Busque la definición de dominio en el apéndice A.

Nuestro análisis de variable compleja se centrará en las funciones analíticas. Una función puede ser analítica dentro de una región del plano. Los polinomios, la función exponencial y $sen(z), cos(z)$ son analíticas para todo z. Existe un gran interés teórico en encontrar un método práctico que permita asegurar que una función es analítica. Este método se analizará en la próxima sección.

3.5. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sea una función de variable compleja definida por

$$\omega = f(z) = u(x, y) + i.v(x, y)$$

Demostraremos que si $f(z)$ es analítica en un dominio D, entonces cumple las condiciones de *Cauchy-Riemann* en todo punto perteneciente a D. Esto es una condición necesaria pero no suficiente. Pero más aún, si $f(z)$ cumple las condiciones de *Cauchy-Riemann* y la parte real e imaginaria, $u(x, y), v(x, y)$ son continuas y derivables, entonces $f(z)$ es analítica. Esto último nos permite, mediante una sencilla demostración, saber si $f(z)$ es o no analítica utilizando una condición necesaria y suficiente.

Para deducir la ecuaciones supongamos tener una función $f(z)$ que está definida y es continua en una vecindad de un punto fijo arbitrario z, y diferenciable en ese punto. De esta forma la derivada

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

en ese punto z existe. Para hacer tender a Δz a cero lo podemos hacer por diferentes trayectorias. Si descomponemos el incremento en el dominio como $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, evaluemos las trayectorias planteadas en la figura 3.4.

- **Trayectoria I:** Primero hacemos $\Delta y \to 0$ y luego $\Delta x \to 0$. Planteamos el límite como

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x + i.y + \Delta x + i\Delta y) - f(x + i.y)}{\Delta x + i.\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + i.y + \Delta x) - f(x + i.y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + i.v(x + \Delta x, y) - [u(x, y) + i.v(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}}_{u'_x} + i. \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}}_{v'_x} \end{aligned}$$

Por lo tanto la derivada queda:

$$f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i. \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

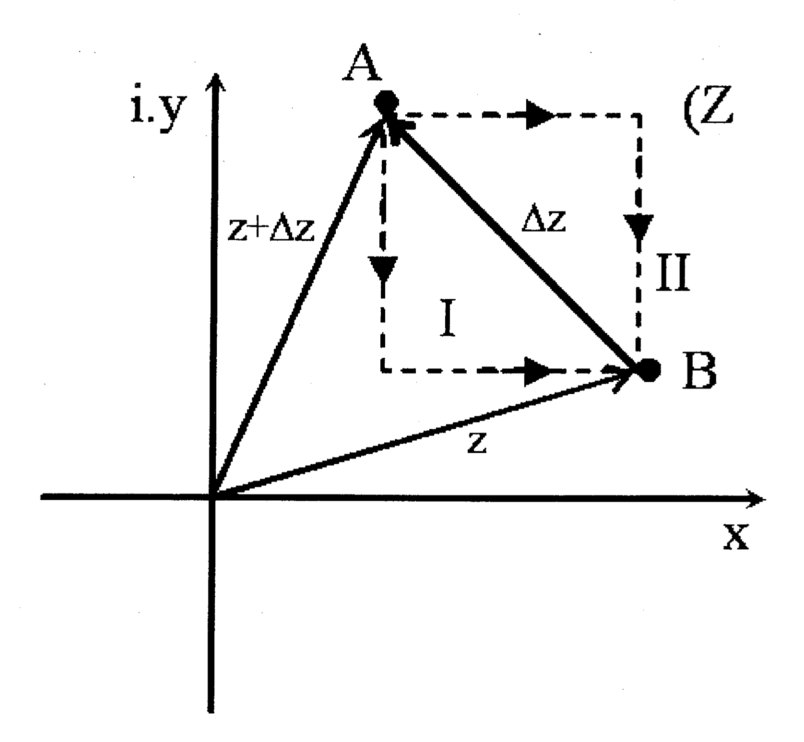


Figura 3.4: Diferentes trayectorias desde el punto A al B.

- **Trayectoria II:** Primero hacemos $\Delta x \to 0$ y luego $\Delta y \to 0$. Planteamos el límite como

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+i.y+\Delta x+i\Delta y)-f(x+i.y)}{\Delta x+i.\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x+i.y+i\Delta y)-f(x+i.y)}{i.\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x,y+\Delta y)+i.v(x,y+\Delta y)-[u(x,y)+i.v(x,y)]}{i.\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i.\Delta y} + i. \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i.\Delta y} \\
&= -i. \underbrace{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i.\Delta y}}_{u'_y} + \underbrace{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}}_{v'_y}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la derivada por esta trayectoria es:

$$f'(z) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

Como ambas derivadas deben coincidir ya que se trata del mismo cálculo pero por dos

trayectorias diferentes, obtenemos finalmente las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\boxed{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}} \tag{3.3}$$

o escrito en forma simplificada

$$\boxed{u'_x = v'_y \qquad u'_y = -v'_x}$$

Como hemos mencionado, si tanto $u(x,y)$ como $v(x,y)$ son además continuas y derivables, y $f(z)$ cumple las condiciones de Cauchy-Riemann, entonces podemos asegurar que $f(z)$ es analítica.

Ejemplo 3.5.1 *Verifique que la función $f(z) = sen(z)$ es analítica para todo z.*

Para aplicar las condiciones de C-R (Cauchy-Riemann) es necesario primero separar la parte real y la imaginaria de $f(z)$. Utilizando la descomposición del seno en exponenciales obtenemos:

$$\begin{aligned}
sen(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{-y)} - e^{-ix}e^{y)}}{2i} \\
&= \frac{[cos(x) + i.sen(x)]\, e^{-y} - [cos(x) - i.sen(x)]\, e^{y}}{2i} \\
&= \frac{cos(x)\,[e^{-y} - e^{y}] + i.sen(x)\,[e^{-y} + e^{y}]}{2i} \\
&= -i.cos(x).\frac{e^{-y} - e^{y}}{2} + sen(x)\frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \\
&= \underbrace{sen(x)cosh(y)}_{u(x,y)} + i.\underbrace{cos(x)senh(y)}_{v(x,y)}
\end{aligned}$$

por lo tanto calculamos todas las derivadas parciales correspondientes:

$$\begin{aligned}
u &= sen(x)cosh(y) \qquad u'_x = cos(x)cosh(y) \qquad u'_y = sen(x)senh(y) \\
v &= cos(x)senh(y) \qquad v'_x = -sen(x)senh(y) \qquad v'_y = cos(x)cosh(y)
\end{aligned}$$

donde se observa claramente que se cumplen las condiciones de C-R para todo (x,y). Además tanto $u(x,y)$ como $v(x,y)$ son continuas y derivables, verificándose la analiticidad de $f(z) = sen(z), \forall z$.

3.5.1. Ecuaciones de C-R en coordenadas polares

Para aplicar las condiciones de C-R es necesario, como se ve en el ejemplo, separar la parte real y la parte imaginaria de la función $f(z)$ a estudiar en función de x e y. Existe un gran número de funciones para las cuales esta separación no es trivial, sin embargo su discriminación en función de ρ y φ es más sencilla. Es por eso que podemos deducir las condiciones de C-R en coordenadas polares, donde se requiere que la función sea expresada como:

$$f(z) = u(\rho,\varphi) + i.v(\rho,\varphi)$$

Como la variable independiente es $z = \rho.e^{i\varphi} = x+i.y$ podemos plantear la siguiente relación:

$$\begin{cases} x = \rho.cos(\varphi) \\ y = \rho.sen(\varphi) \end{cases}$$

para luego utilizar la regla de la cadena de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u'_\rho &= u'_x.\underbrace{x'_\rho}_{cos(\varphi)} + u'_y.\underbrace{y'_\rho}_{sen(\varphi)} \\ u'_\rho &= u'_x.cos(\varphi) + u'_y.sen(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_\varphi &= u'_x.\underbrace{x'_\varphi}_{-\rho sen(\varphi)} + u'_y.\underbrace{y'_\varphi}_{\rho cos(\varphi)} \\ u'_\varphi &= -u'_x \rho sen(\varphi) + u'_y.\rho cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'_\rho &= v'_x.\underbrace{x'_\rho}_{cos(\varphi)} + v'_y.\underbrace{y'_\rho}_{sen(\varphi)} \\ v'_\rho &= v'_x.cos(\varphi) + v'_y.sen(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'_\varphi &= u'_x.\underbrace{x'_\varphi}_{-\rho sen(\varphi)} + v'_y.\underbrace{y'_\varphi}_{\rho cos(\varphi)} \\ v'_\varphi &= -u'_x \rho sen(\varphi) + v'_y.\rho cos(\varphi) \end{aligned}$$

donde utilizando las condiciones de C-R (3.3)

$$\begin{aligned} u'_x &= v'_y \\ u'_y &= -v'_x \end{aligned}$$

sustituyendo e igualando se consiguen las ecuaciones de C-R para coordenadas polares:

$$\boxed{u'_\rho = \frac{v'_\varphi}{\rho} \qquad v'_\rho = -\frac{u'_\varphi}{\rho}} \tag{3.4}$$

Ejemplo 3.5.2 *Verifique que la función $f(z) = z^4$ es analítica para todo z.*

Para aplicar las condiciones de C-R (Cauchy-Riemann) es necesario primero separa la parte real y la imaginaria de $f(z)$.

$$f(z) = z^4 = \left(\rho.e^{i\varphi}\right)^4 = \rho^4.e^{i4\varphi} = \underbrace{\rho^4.cos(4\varphi)}_{u(\rho,\varphi)} + i.\underbrace{\rho^4 sen(4\varphi)}_{v(\rho,\varphi)}$$

por lo tanto calculamos todas las derivadas parciales correspondientes:

$$u'_\rho = 4\rho^3.cos(4\varphi) \qquad u'_\varphi = -4.\rho^4.sen(4\varphi)$$

$$v'_\rho = 4\rho^3.sen(4\varphi) \qquad v'_\varphi = 4.\rho^4.cos(4\varphi)$$

donde se observa claramente que se cumplen las condiciones de C-R para coordenadas polares 3.4 para todo (ρ, φ).

3.6. Ecuación de Laplace

Las funciones complejas analíticas poseen una característica práctica más que es muy interesante. Tanto la parte real como la parte imaginaria de una función analítica $f(z) = u(x, y) + i.v(x, y)$ cumplen la ecuación de *Laplace*:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0 \\ \nabla^2 v &= \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} = 0 \end{aligned}$$

Una solución de la ecuación de *Laplace* cuyas derivadas parciales segundas sean continuas se conoce como función armónica. **Por lo tanto tanto la parte real como la parte imaginaria de una función analítica son funciones armónicas**. El lector puede verificar, planteando las ecuaciones de C-R y derivando en ambos miembros, que tanto la parte real como la imaginaria verifican la ecuación de *Laplace*.

La parte real y la parte imaginaria de una misma función analítica, además de ser armónicas, se denominan entre sí armónicas conjugadas. De esta forma si $f(z) = u(x, y) + i.v(x, y)$ $u(x, y)$ es la conjugada armónica de $v(x, y)$ y viceversa. Es importante aclarar que no cualquier par de funciones armónicas conforman una función analítica, sin embargo la inversa es cierta. Se cumple además que las curvas de nivel de las funciones armónicas conjugadas son

ortogonales en todo punto del plano (x, y). La aplicación física de la ecuación de Laplace es comúnmente analizada, por ejemplo, para los campos eléctricos y la distribución de potencial. De esta forma si la parte real de una función analítica se asimila, por ejemplo, a la línea de campo eléctrico que rodea una superficie, la parte imaginaria forma su función de potencial. Esto se puede verificar como sigue. Si la función analítica se escribe como $f(z) = P(x, y) + i.Q(x, y)$ donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son armónicas conjugadas, las curvas de nivel se pueden hallar como:

$$P(x, y) = K_1 \qquad Q(x, y) = K_2$$

donde K_1 y K_2 son constantes. Las pendientes de las rectas tangentes en cada punto del plano se hallan como

$$m_1 = \frac{P'_y}{P'_x} \qquad m_2 = \frac{Q'_y}{Q'_x}$$

donde aplicando las condiciones de C-R $P'_x = Q'_y \wedge P'_y = -Q'_x$ resulta

$$m_1 = \frac{P'_y}{P'_x} \qquad m_2 = \frac{Q'_y}{Q'_x} = \frac{P'_x}{-P'_y} = -\frac{1}{m_1}$$

que verifica la ortogonalidad de las curvas de nivel para todo punto donde la función sea analítica y $m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.6.1 *Encontrar la función armónica conjugada de $v(x, y) = 2xy$.*

Tenemos $v'_x = 2y$ y $v'_y = 2x$. Utilizando las ecuaciones de C-R: $u'_x = v'_y \wedge u'_y = -v'_x$ obtenemos:

$$\begin{aligned} u'_y &= -v'_x = -2y \\ \int u'_y dy &= u(x, y) = \int (-2y) dy = -y^2 + C(x) \end{aligned}$$

donde se integró con respecto a y en ambos miembros y se incluyó una constante en función de x: $C(x)$. Utilizando la otra igualdad:

$$\begin{aligned} u'_x &= v'_y = 2x \\ \int u'_x dx &= u(x, y) = \int (2x) dx = x^2 + C(y) \end{aligned}$$

Como la $u(x, y) = -y^2 + C(x) = x^2 + C(y)$ se deduce que $u(x, y) = x^2 - y^2 + C$ donde C es una constante que no depende ni de x ni de y. El lector puede verificar que la función analítica $f(z) = z^2$ es la que posee esa parte real y esa imaginaria. Además el conjunto de hipérbolas de la parte real y de la parte imaginaria forman curvas de nivel ortogonales (figura 3.5).

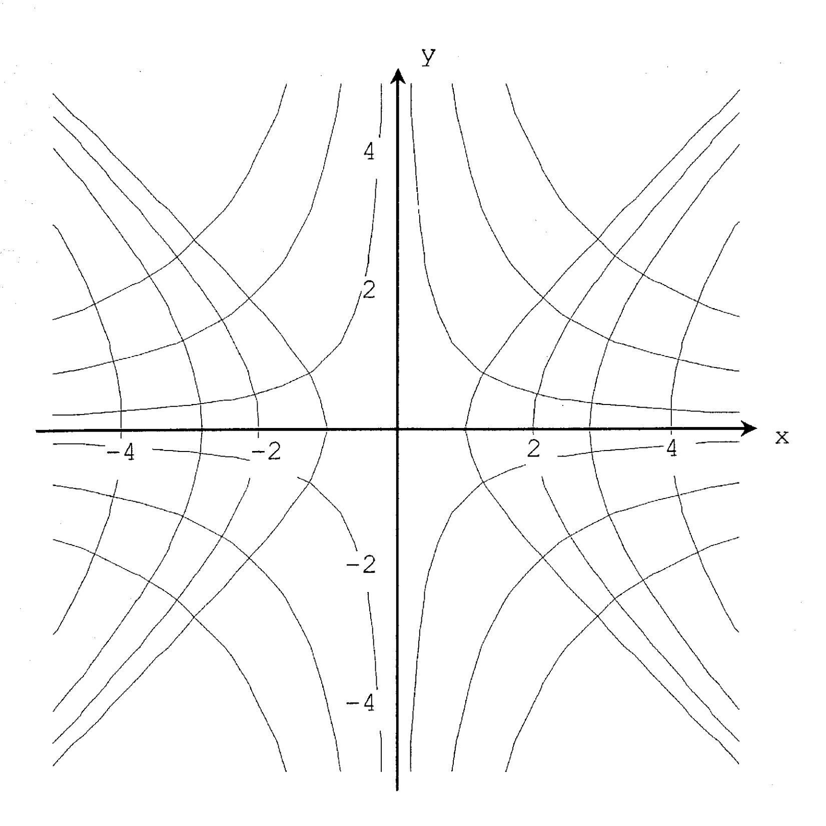


Figura 3.5: La parte real y la parte imaginaria del ejemplo(3.6.1).

3.7. Mapeo Conforme

3.7.1. Introducción

Como ya analizamos en secciones anteriores, las funciones de variable compleja analíticas poseen características interesantes desde el punto de vista de sus aplicaciones prácticas. Reforzaremos esta idea a lo largo de esta sección y proseguiremos en el capítulo de Series. Veremos a continuación como si definimos un conjunto de puntos sobre un par de curvas que se cruzan en el dominio dentro del plano z y le aplicamos la función analítica $\omega = f(z)$ a cada punto, podemos encontrar un nuevo par de curvas imagen en el plano $\omega = f(z)$ donde se **conservan los ángulos** de intersección excepto en los puntos en que $f'(z) = 0$. Transformaremos, no solo curvas, sino conjunto de puntos o regiones. Esta transformación a través de una función analítica se conoce como **mapeo conforme**. El mapeo conforme se utiliza para resolver problemas con valor frontera en un campo bidimensional, transformando una región complicada en otra más sencilla. Para estas aplicaciones es fundamental que se respeten los ángulos de intersección de las curvas en un plano y en el otro. Analizaremos a continuación algunas funciones analíticas elementales y estudiaremos en detalle qué tipo de transformación provocan sobre los puntos. Como convención utilizaremos el plano dominio a $z = x + i.y$ y al plano imagen como $\omega = u + i.v$ donde la función analítica de mapeo será $\omega = f(z)$.

3.7.2. Mapeo o transformación Conforme

Una transformación se llama conforme cuando a través de ella se mantienen los ángulos en valor y sentido de disposición. Cuando solo se mantienen los valores pero no los sentidos se denomina *isogonal.*

Si una función $\omega = f(z)$ es analítica en z_0 toda transformación de puntos es conforme excepto en los puntos en que $f'(z_0) = 0$. Dibujemos dos curvas en el plano dominio z y sus correspondientes imágenes en el plano ω

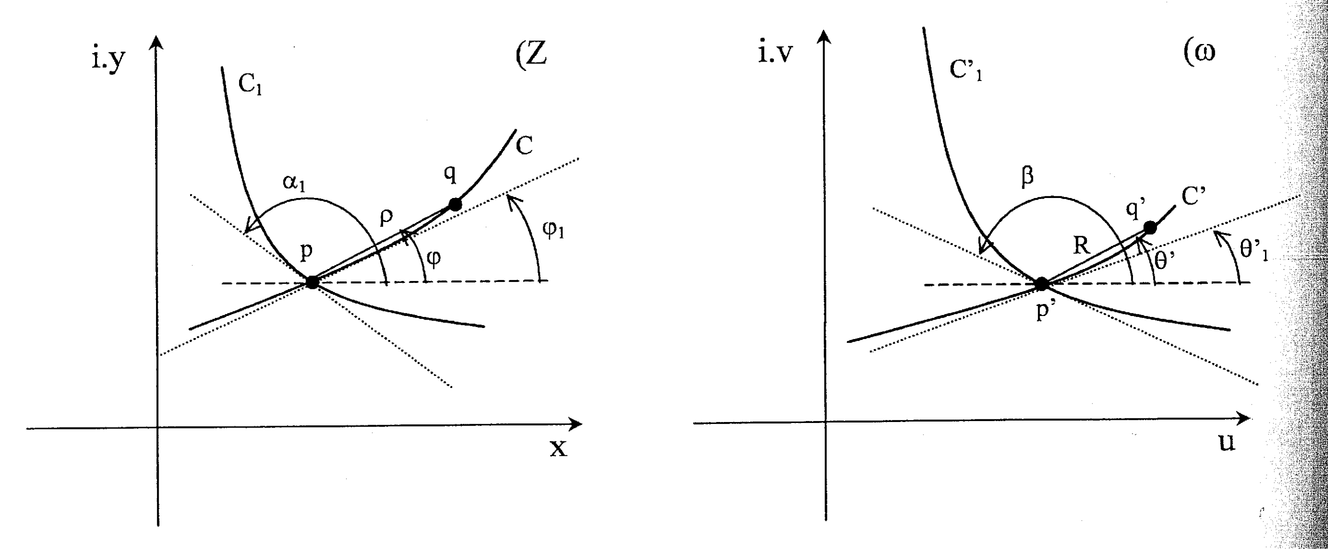


Figura 3.6: Ejemplo de mapeo de curvas a través de una función conforme.

Sean p y p' dos puntos correspondientes a través de la función analítica $\omega = f(z)$ y C y C' dos curvas correspondientes que pasan por aquellos puntos. Sobre la curva C producimos un incremento $\Delta z = \rho.e^{i\varphi}$ obteniéndose el punto q. El incremento correspondiente $\Delta\omega = R.e^{i.\theta}$ queda registrado por q'. Se efectúa el cociente de incrementos:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \frac{R}{\rho}e^{i(\theta-\varphi)} = \frac{R}{\rho}\left[cos(\theta-\varphi) + i.sen(\theta-\varphi)\right]$$

tomando límite para $\Delta z \to 0$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z} &= \frac{d\omega}{dz}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{R}{\rho}\left[cos(\theta-\varphi) + i.sen(\theta-\varphi)\right]\end{aligned}$$

donde la derivada existe, ya que la función es analítica. Si al cociente entre infinitésimos R/ρ lo denominamos r y como tanto el seno como el coseno son funciones continuas ingresamos el límite de la siguiente manera

$$f'(z) = r.\left[cos\left(\lim_{\Delta z\to 0}\theta-\varphi\right) + i.sen\left(\lim_{\Delta z\to 0}\theta-\varphi\right)\right]$$

pero los límites angulares transforman los ángulos de las secantes θ, φ en los ángulos de las tangentes θ_1, φ_1, por lo tanto

$$f'(z) = r.\left[cos(\theta_1 - \varphi_1) + i.sen(\theta_1 - \varphi_1)\right] = r.e^{i.(\theta_1 - \varphi_1)}$$

la diferencia $\theta_1 - \varphi_1$ es constante y la denominaremos $\gamma = \theta_1 - \varphi_1$. Podemos decir que $\theta_1 = \gamma + \varphi_1$. Esto significa que para obtener el ángulo θ_1 del plano ω de la tangente, basta con sumar la constante γ al ángulo φ_1 de la tangente en el plano z.

Sean ahora dos curvas correspondientes a C_1 y C_1' que pasan por p y por p' respectivamente; los ángulos de sus tangentes en los puntos mencionados son α y β. Utilizando la misma relación:

$$\beta = \alpha + \gamma$$

y sumándola con $\gamma = \theta_1 - \varphi_1$ obtenemos

$$\alpha - \varphi_1 = \beta - \theta_1$$

Como por construcción se conserva el sentido de la disposición de los ángulos y estos resultaron tener igual valor entonces la transformación es conforme. Además debe ser $f'(z) \neq 0$ y por lo tanto $r \neq 0$, esto es, al relación entre ángulos debe ser distinta de cero.

3.7.3. Transformación lineal

El primer ejemplo que analizaremos es la función lineal $f(z) = \alpha.z + \beta$ donde $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}$. Esta función puede ser descompuesta en un producto y un desplazamiento. La función es analítica $(\forall z)$ así como cualquier polinomio en z. El producto $\alpha.z$ se puede analizar de la siguiente forma. Si al número α lo descomponemos en módulo y fase $\alpha = \rho_1.e^{i\varphi_1}$ y $z = \rho.e^{i\varphi}$ hallamos la imagen como

$$\omega = f(z) = \alpha.z = \left(\rho_1.e^{i\varphi_1}\right)\left(\rho.e^{i\varphi}\right) = \underbrace{\rho\rho_1}_{R}.e^{i\overbrace{(\varphi + \varphi_1)}^{\theta}}$$

Dado un conjunto de puntos en el plano z, esto provocaría una expansión (los puntos se alejan del origen) si $\rho_1 > 1$ o una contracción si $\rho_1 < 1$ y una rotación de un ángulo φ_1 en sentido antihorario [2]. Tomemos como ejemplo dos redes, una rectangular y otra polar. Analicemos qué sucede para cada caso con las siguientes regiones.

Red Rectangular

Dibujemos un conjunto de puntos delimitado por las rectas $x = 1$, $y = 1$, $x = 2$ e $y = 2$ (figura 3.7).

[2] Recuerde que el valor del módulo ρ es siempre mayor que cero: $|\rho| > 0$.

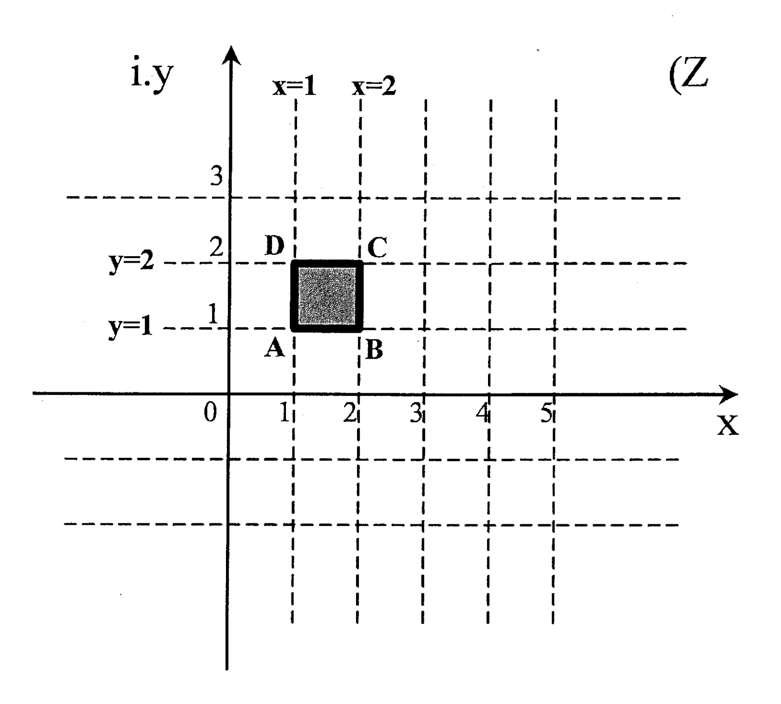


Figura 3.7: Mapeo de la red rectangular.

Además se marcaron los siguientes puntos: $A = (1+i)$, $B = (2+i)$, $C = (2+2i)$ y $D = (1+2i)$.

Utilicemos como ejemplo la función $f(z) = (1+i)z$, donde $\alpha = 1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Como $\rho_1 = \sqrt{2} > 1$ esto provocará una expansión y una rotación de $\varphi_1 = \pi/4$ radianes en sentido antihorario. Veamos el efecto analíticamente transformando cada recta que delimita la zona.

Separemos la parte real y la parte imaginaria de $f(z)$:

$$f(z) = (1+i)z = (1+i)(x+i.y) = \omega = \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \tag{3.5}$$

Con esta expresión podemos hallar la imagen de cualquier punto. Por ejemplo, la imagen del punto $A = 1+i$ es $A' = 2i$.

$$A' = f(1+i) = \begin{cases} u = 1 - 1 = 0 \\ v = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

Para poder hallar la imagen de todos los puntos rayados es necesario transformar las curvas que delimitan al conjunto de puntos y luego verificar cómo esas curvas delimitan al nuevo conjunto en el plano imagen. Recuerde que si la función es analítica la transformación es conforme, y en este caso las curvas deben cortarse a 90 grados.

El segmento AB está contenido en la recta $y = 1$. Utilizando 3.5 con $y = 1$ (y $x = x$) e intentando despejar u en función de v obtenemos:

$$\boxed{v - u = 2}$$

esto es la ecuación de una recta en el plano ω. Note que la recta se transformó en otra recta pero hubo una rotación de 45 grados. Además puede verificar que los puntos se alejaron del

origen en un factor de $\sqrt{2}$. Para el segmento BC la recta que lo contiene es $x = 2$. Sumando ahora en 3.5 para dejar a $v = f(u)$ obtenemos:

$$\boxed{u + v = 4}$$

Para el segmento CD $y = 2$ y la recta transformada es

$$\boxed{v - u = 4}$$

finalmente el segmento AD está contenido en $x = 1$ y su transformada es

$$\boxed{u + v = 2}$$

Note que no es conveniente transformar los puntos de intersección sino las curvas que delimitan la región. Los puntos en el plano transformado se hallaran por simple inspección. Dibujemos el resultado en la figura 3.8.

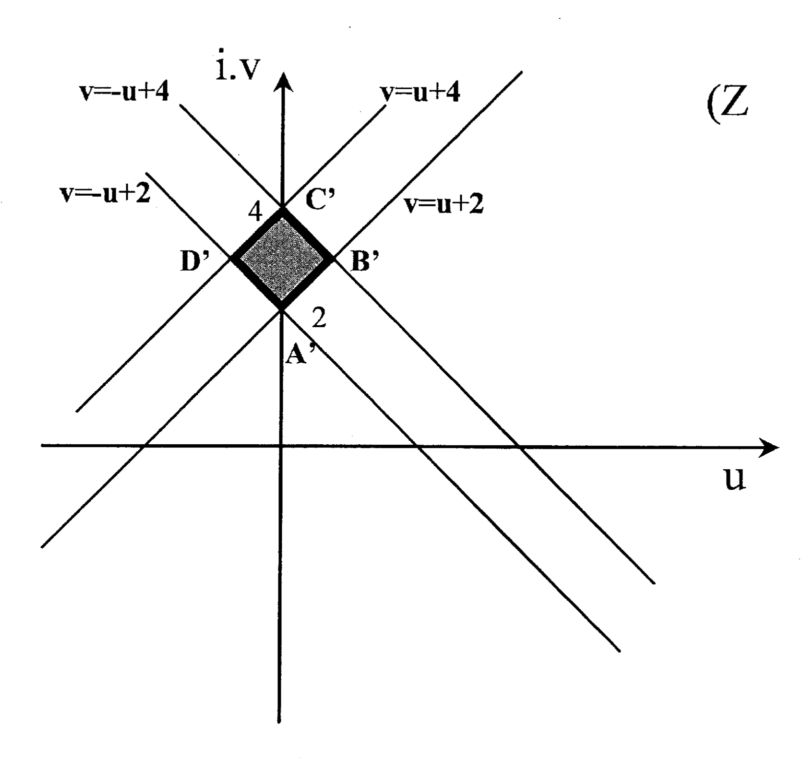


Figura 3.8: Resultado del mapeo a través de $f(z) = (1 + i)z$.

Verifique en el gráfico como no solo se conservaron los ángulos de cruce entre las curvas sino el sentido de aparición de los puntos.

Red Polar

Para la red polar, el conjunto de puntos a estudiar será el de la figura 3.9.

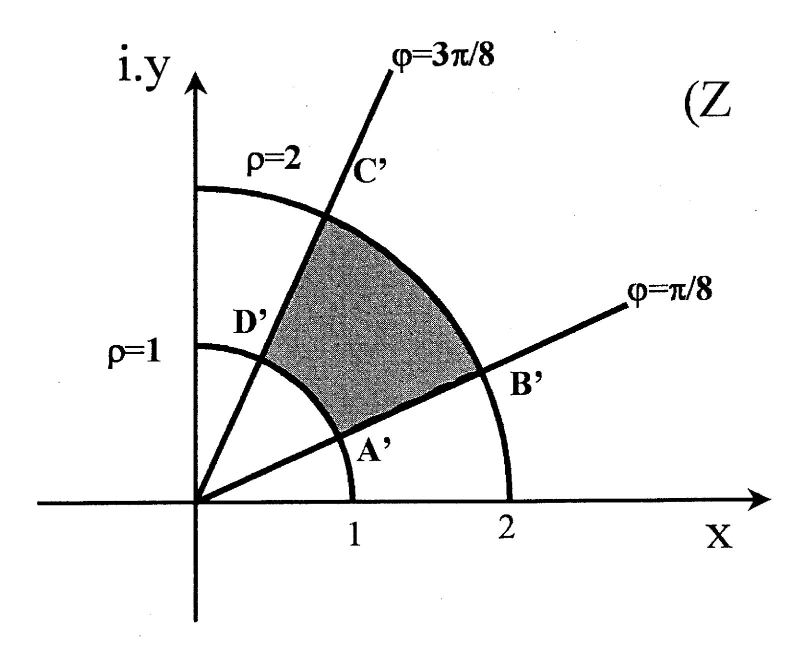


Figura 3.9: Mapeo a través de la red polar.

delimitado por las curvas $\rho = 1$, $\rho = 2$, $\varphi = \pi/8$ y $\varphi = 3\pi/8$. La función en estudio es:

$$f(z) = (1+i)z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\rho.e^{i\varphi}\right) = \omega = \begin{cases} R = \sqrt{2}\rho \\ \theta = \frac{\pi}{4} + \varphi \end{cases} \tag{3.6}$$

Nuevamente analizamos la transformación de las curvas que delimitan al conjunto de puntos. Para la curva $\rho = 1$ hallamos que la curva transformada es:

$$\boxed{R = \sqrt{2}}$$

Para la curva $\rho = 2$ tenemos

$$\boxed{R = 2.\sqrt{2}}$$

Para $\varphi = \pi/8$ obtenemos

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{4} + \pi/8 = \frac{3\pi}{8}}$$

y finalmente para $\varphi = 3\pi/8$ obtenemos

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{4} + 3\pi/8 = \frac{5\pi}{8}}$$

Dibujemos la región resultante en la figura 3.10 donde veremos claramente la expansión y la rotación mencionadas.

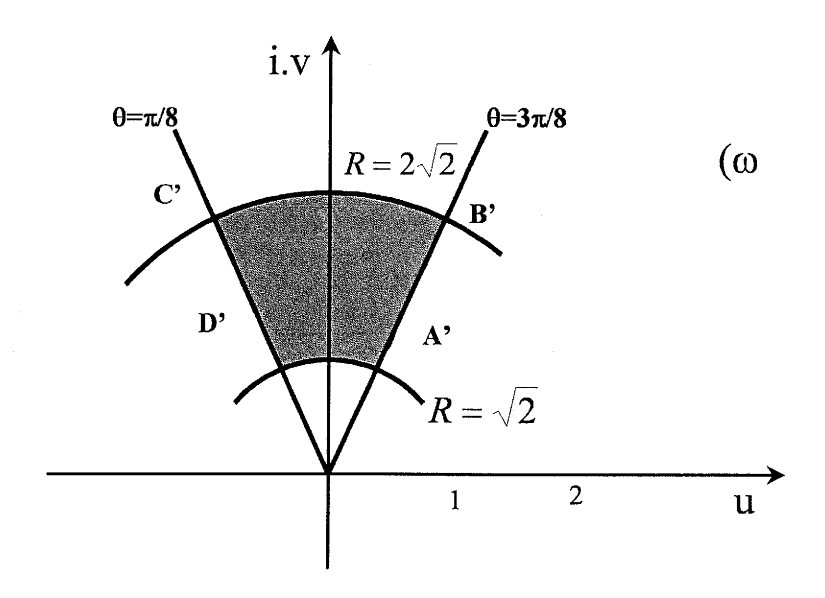


Figura 3.10: Resultado del mapeo de $f(z) = (1+i)z$.

La segunda parte de la transformación lineal $f(z) = \alpha.z + \beta$ donde $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}$ es un desplazamiento de la forma $f(z) = z + \beta$ [3]. Siempre mantendremos como dominio a $z = x + i.y = \rho.e^{i\varphi}$ y como imagen a $f(z) = \omega = u + i.v = R.e^{i\theta}$. El desplazamiento es una función muy simple que podemos analizar separando parte real de parte imaginaria, si llamamos $\beta = a + i.b$:

$$f(z) = z + \beta = (x + i.y) + (a + i.b) = (x + a) + i.(y + b) \begin{cases} u = x + a \\ v = y + b \end{cases}$$

El conjunto de puntos se desplaza sobre el eje real (horizontalmente) en función del valor de a y sobre el eje imaginario (verticalmente) en función de b. Veamos qué sucede con el conjunto de puntos utilizado anteriormente si le aplicamos la transformación:

$$f(z) = z + 1 - 3i$$

Gráficamente obtendremos el efecto observado en la figura 3.11.

El lector puede verificar el resultado transformando cada curva (los segmentos que delimitan al conjunto de puntos) analíticamente. Esta transformación es conveniente siempre realizarla en coordenadas rectangulares y no en polares. Es innecesario aclarar que, como la función lineal es analítica, todas las estas transformaciones son conformes y, por lo tanto, se respetan los ángulos de cruce de las curvas y su sentido en ambos planos.

En este sección se analizaron por separado el producto $\alpha.z$ y el desplazamiento $z + \beta$. Si se desea analizar la transformación completa $f(z) = \alpha.z + \beta$ primero hay que realizar el producto, y a los puntos resultado (imagen) aplicarles el desplazamiento.

[3] Se supone que ya se realizó el producto $\alpha.z$ y ahora se trabaja solo sobre el conjunto de puntos resultante.

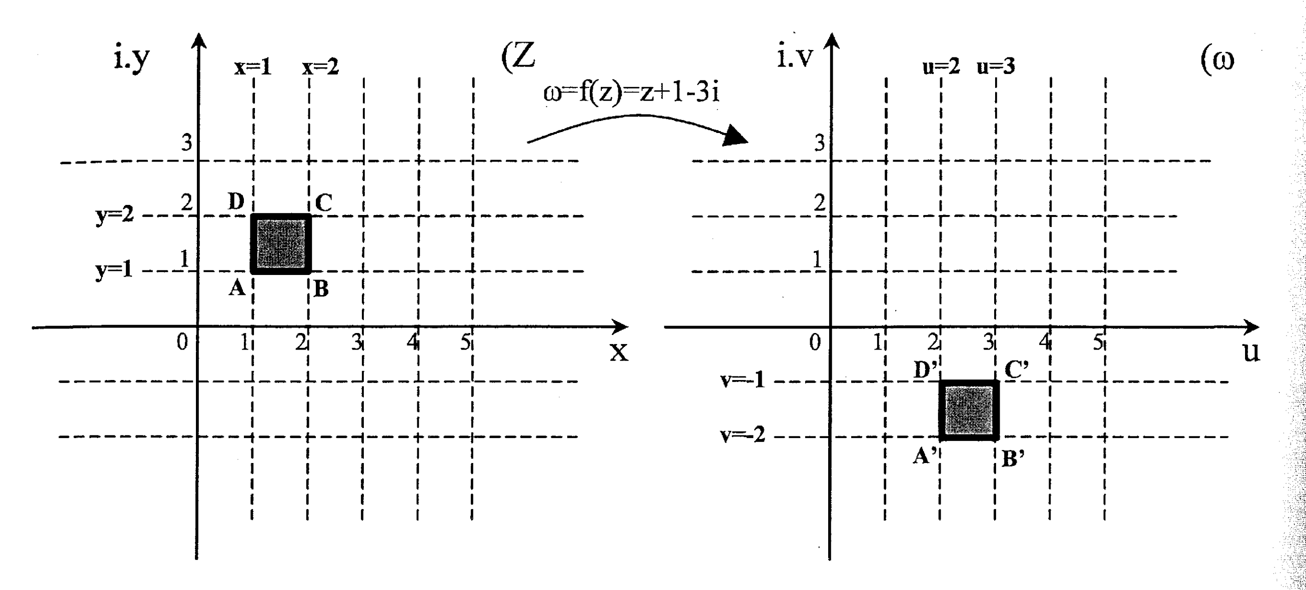


Figura 3.11: El efecto de desplazamiento sobre la red rectangular.

3.7.4. Transformación cuadrática

La transformación cuadrática es de la forma $f(z) = z^2$. Esta operación, como se analizó en el apéndice A de números complejos, implica que un punto del dominio $z_0 = \rho_0.e^{i\varphi_0}$ se transforme a $w_0 = f(z_0) = \rho_0^2.e^{i2\varphi_0}$. Vemos que la distancia al origen se elevó al cuadrado y la fase se multiplicó por dos. Para comprender este efecto analicemos qué sucede con las redes rectangulares y polares por separado.

Red Rectangular

Veamos la parte real y la parte imaginaria de la transformación cuadrática:

$$f(z) = z^2 = (x + i.y)^2 = x^2 - y^2 + i,2.x.y \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} \tag{3.7}$$

Por ejemplo, un punto $z = 1 + 2i$ se transformaría en el punto $w = -3 + i4$ como vemos a continuación:

$$f(z) = z^2 = \begin{cases} u = x^2 - y^2 = 1 - 4 = -3 \\ v = 2xy = 2,1,2 = 4 \end{cases}$$

Es difícil observar el efecto geométrico de la transformación en coordenadas rectangulares, esto se facilitará en polares. Sin embargo, calculemos la transformación de la zona rectangular delimitada por $x = 1, x = 2, y = 1, y = 2$ que reproducimos a continuación por comodidad

Transformemos el segmento AB colocando $y = 1$ en la ecuación 3.7:

$$f(z) = z^2 = \begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = 2x \end{cases}$$

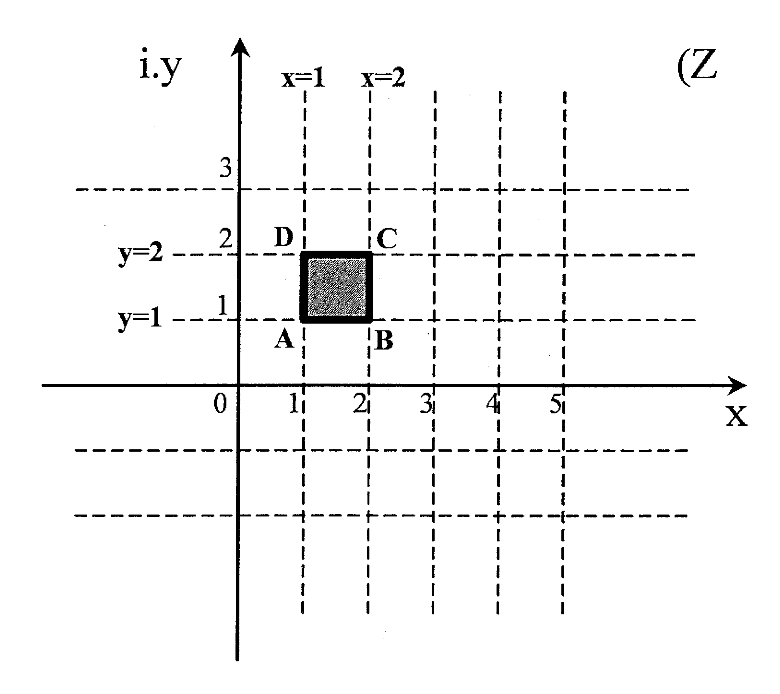


Figura 3.12: Red rectangular.

Despejando u en función de v obtenemos:

$$\boxed{u = \frac{v^2}{4} - 1}$$

Esta curva representa una parábola con eje focal u y cóncava hacia las u positivas. El vértice es $(u, v) = (-1, 0)$. Para el segmento CD reemplazamos $y = 2$ en 3.7 y obtenemos

$$f(z) = z^2 = \begin{cases} u = x^2 - 4 \\ v = 4x \end{cases}$$

nuevamente despejando u en función de v

$$\boxed{u = \frac{v^2}{16} - 4}$$

Esta curva representa otra parábola con eje focal u y cóncava hacia las u positivas. El vértice es $(u, v) = (-4, 0)$. Análogamente para el segmento BC $(x = 2)$ podemos despejar:

$$\boxed{u = 4 - \frac{v^2}{16}}$$

Que consiste en una parábola de eje focal u pero cóncava hacia las u negativas. El vértice es $(u, v) = (4, 0)$. El último segmento DA $(x = 1)$ queda

$$\boxed{u = 1 - \frac{v^2}{4}}$$

y es una parábola de eje focal u y cóncava hacia las u negativas. El vértice es $(u, v) = (1, 0)$. Grafiquemos la zona resultante en la figura 3.13.

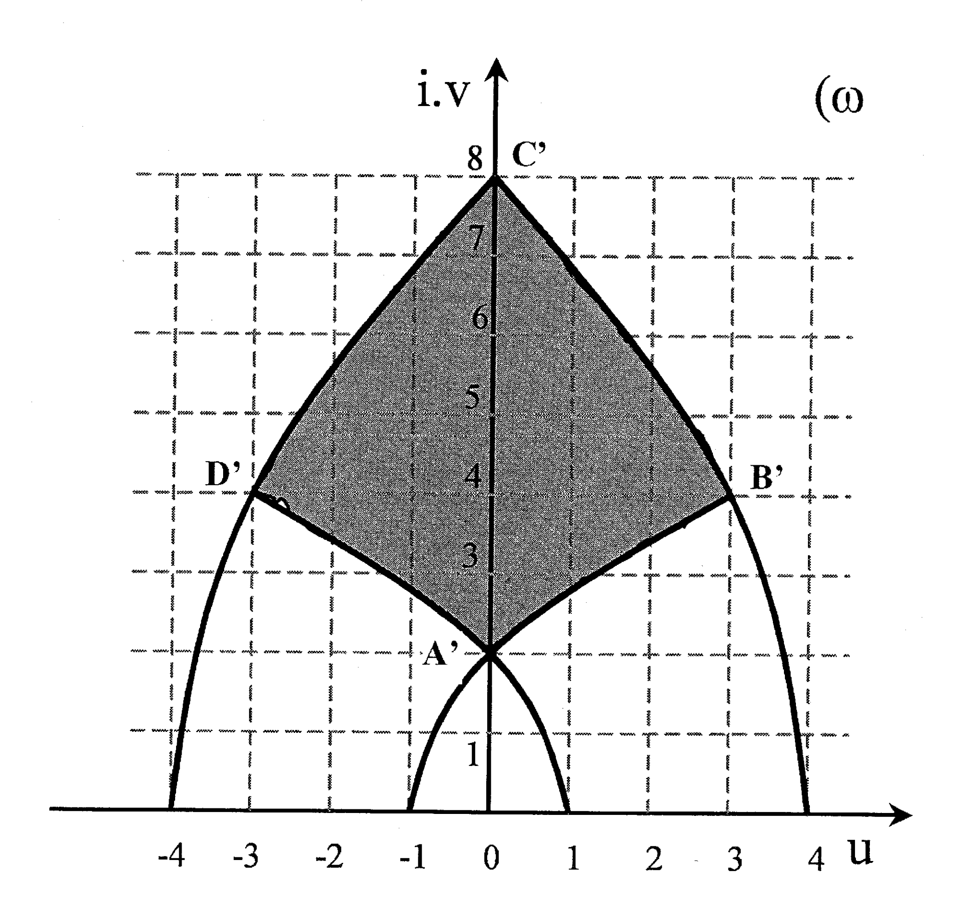


Figura 3.13: Mapeo de la red rectangular a través de la función cuadrática.

Los mapeos son utilizados para llevar un conjunto de puntos desde una zona relativamente complicada a otra más simple. En este caso observe que esta transformación convirtió las rectas en parábolas. Si mira detenidamente la descomposición en parte real y parte imaginaria puede deducir que solo en la presencia de hipérbolas en el dominio, obtendremos rectas en la imagen:

$$f(z) = z^2 = \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

por ejemplo la hipérbola $x^2 - y^2 = 2$ se transforma en la recta $u = 2$. Otro ejemplo podría ser la hipérbola $x.y = 1$ que se transforma en la recta $v = 2$. Es por eso que la transformación cuadrática se aplicará si se desea simplificar una zona delimitada por hipérbolas.

Red Polar

Para deducir qué sucede con la red polar, despejamos el módulo y la fase de la transformada:

$$f(z) = z^2 = \left(\rho.e^{i\varphi}\right)^2 = \rho^2.e^{i2\varphi} = \begin{cases} R = \rho^2 \\ \theta = 2\varphi \end{cases} \tag{3.8}$$

El efecto sobre el módulo es elevarlo al cuadrado. Tenga en cuenta que esto puede alejar los puntos o acercarlos dependiendo si el módulo del punto dominio es mayor o menor que 1. Además se produce una rotación y una duplicación del ángulo. Observemos el efecto en la figura 3.14.

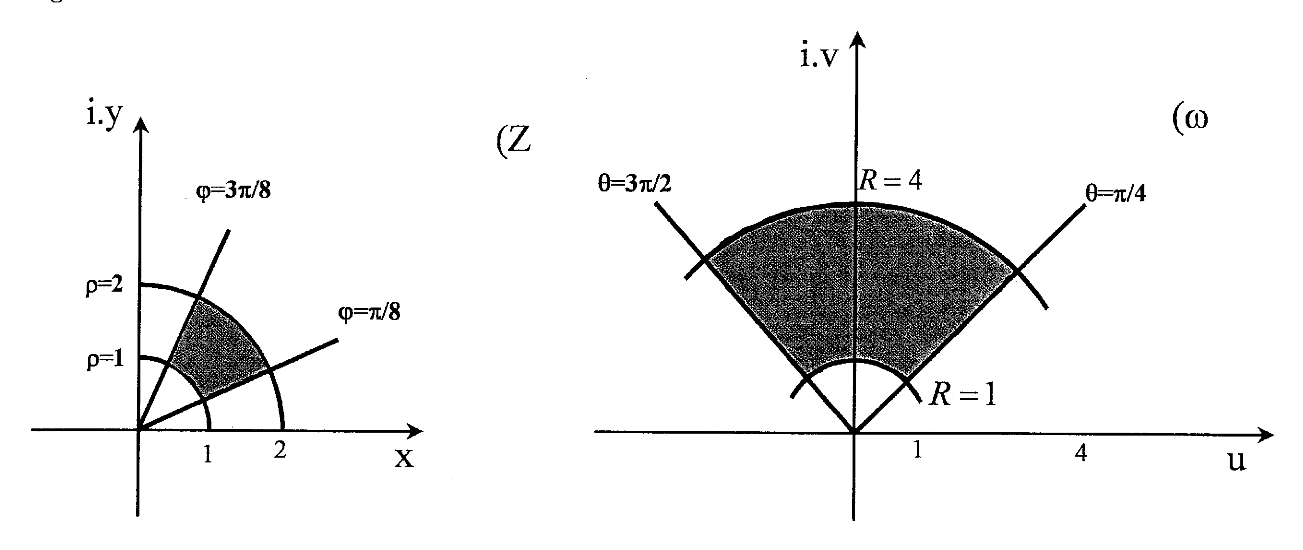


Figura 3.14: Mapeo de la red polar a través de la función cuadrática.

Se recomienda al lector realizar los cálculos analíticos que verifican este resultado.

3.7.5. Inversión

La transformación inversión es muy particular debido a que sus aplicaciones son muy habituales en el campo de la ingeniería. Esta transformación, como veremos, nos permitirá transformar circunferencias en rectas y viceversa. Como mencionamos anteriormente, los mapeos buscan simplificar determinados cálculos de valor frontera en zonas complicadas. Por esta razón es que plantearemos inicialmente la transformación bilineal en la red rectangular y luego en la polar, y analizaremos un método específico que permite transformar una recta o una circunferencia genérica a través de la inversión.

Red Rectangular

La inversión se define de la siguiente forma:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + i.y} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i.\frac{y}{x^2 + y^2} = \begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \tag{3.9}$$

donde se halló la parte real y la parte imaginaria de la transformación [4].

Es así como por ejemplo el número $z = 1 + i2$ se transforma en $\omega = \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}$:

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{1^2+2^2} = \frac{1}{5} \\ v = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{2}{1^2+2^2} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Utilizaremos la red polar para hacer el análisis geométrico de este resultado.

Red Polar

En coordenadas polares, la transformación resulta:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho.e^{i\varphi}} = \frac{1}{\rho}.e^{-i\varphi} = \omega = \begin{cases} R = \frac{1}{\rho} \\ \theta = -\varphi \end{cases} \qquad (3.10)$$

En este momento podemos analizar el efecto geométrico de esta transformación. Observe como el módulo del punto de dominio se invierte en la imagen. Un punto que en el dominio posea un módulo de 10 poseerá un módulo de 0.1 en la imagen. Además, los ángulos se conjugan. Si la fase del punto dominio es $\varphi = \pi/3$ en la imagen será $\theta = -\pi/3$. Esta transformación produce entonces los siguientes efectos:

- Los puntos que se encuentran dentro de la circunferencia unitaria: $|z| < 1$ se ubicarán, en el plano imagen, fuera de ella.
- Los puntos que se encuentran fuera de la circunferencia unitaria: $|z| > 1$ se ubicarán, en el plano imagen, dentro de la misma.
- Los puntos que se encuentran en el semiplano inferior pasarán al inferior y viceversa. Este es el efecto de la fase.

Como se puede comprender la circunferencia unitaria debe usarse solamente como referencia para estimar la ubicación de los puntos imagen antes de realizar los cálculos analíticos. Observe además que si se transforma la circunferencia unitaria, el resultado será ella misma en el plano imagen, a pesar que los puntos cambien de semiplano.

Veamos gráficamente las diferentes zonas y sus respectivas transformaciones en la figura 3.15.

Las escalas en el plano dominio y en el plano imagen, en este caso, fueron iguales aunque esto no es normalmente así. Como los puntos muy cercanos al origen se transforman en puntos muy alejados y viceversa, las escalas juegan un papel preponderante a la hora de realizar los gráficos.

La transformación inversión es analítica excepto para el origen ($z_0 = (0,0)$) y por lo tanto genera mapeos conformes en todo el plano menos en el origen.

[4] se utilizó el método de multiplicar y dividir por el conjugado analizado en el apéndice A de número complejos

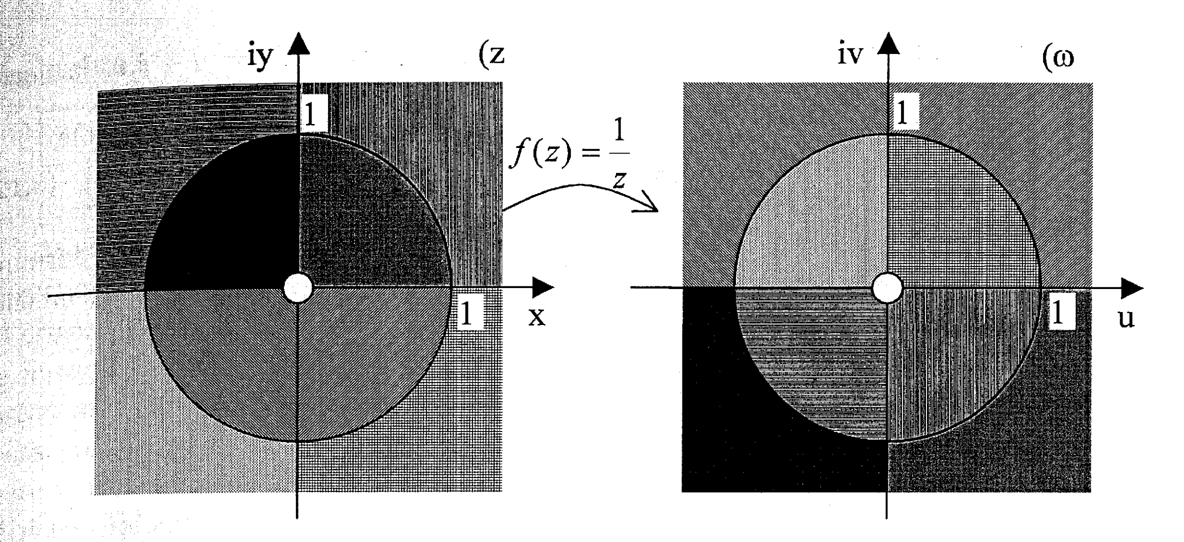


Figura 3.15: Regiones de la transformación inversión.

Para estudiar con más detalle los efectos de la inversión sobre rectas y circunferencias genéricas, planteamos la siguiente ecuación:

$$\boxed{A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0} \tag{3.11}$$

Esta ecuación posee cuatro parámetros: A, B, C, D y representa a todas las posibles rectas y circunferencias en el plano dominio $z = x + i.y$. Recordamos que la ecuación de una circunferencia de radio r centrada en (x_0, y_0) es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

que puede ser llevada de manera algebraica simple a la forma de la ecuación 3.11. Analicemos los parámetros A, B, C, D:

- El parámetro A es el que acompaña a los términos cuadráticos. Si $A = 0$, entonces la ecuación queda $Bx + Cy + D = 0$ que es la ecuación de una recta que no pasa por el origen [5].

- El parámetro D es el que establece si la curva pasa o no por el origen.

- Si $A = D = 0$ la curva es una recta que pasa por el origen.

- Si $A \neq 0$ y $D = 0$ es una circunferencia que pasa por el origen.

Solo para el caso en que se aplique la función inversión $f(z) = 1/z$ sobre curvas (rectas o circunferencias) descriptas por la ecuación 3.11 se puede simplificar el

[5] Si el parámetro independiente no es cero $D \neq 0$, el punto $(x, y) = (0, 0)$ no verifica la ecuación y por lo tanto no pertenece a la curva.

cálculo utilizando el siguiente método. En el plano transformado $\omega = u + i.v$, la curva observada es:

$$\boxed{A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0} \tag{3.12}$$

Note que el parámetro A que acompañaba al término cuadrático paso atrás a ser el término independiente, la B quedó en su lugar, la C cambió de signo y la D que era el independiente es ahora el que acompaña a los cuadráticos.

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Debemos demostrar como transformar las curvas descriptas por la ecuación genérica $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ de parámetros A, B, C, D a través de la función inversión $\omega = f(z) = 1/z$.

Utilizaremos $z = x + i.y$ y $\omega = u + i.v$. Además

$$\frac{z + z^*}{2} = x \qquad \frac{z - z^*}{2i} = y \qquad \frac{\omega + \omega^*}{2} = u \qquad \frac{\omega - \omega^*}{2i} = v$$

donde el asterisco * representa el complejo conjugado. Utilizaremos también las siguientes relaciones

$$z.z^* = |z|^2 = x^2 + y^2 \qquad \omega.\omega^* = |\omega|^2 = u^2 + v^2$$

Aplicando estas relaciones en 3.11 obtenemos

$$\begin{aligned} A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D &= 0 \\ A|z|^2 + B\frac{z + z^*}{2} + C\frac{z - z^*}{2i} + D &= 0 \end{aligned}$$

Usamos ahora la transformación $\omega = 1/z$ y reemplazamos

$$\begin{aligned} A|z|^2 + B\frac{z + z^*}{2} + C\frac{z - z^*}{2i} + D &= 0 \\ A\left|\frac{1}{\omega}\right|^2 + B\frac{\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^*}}{2} + C\frac{\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^*}}{2i} + D &= 0 \\ A\left|\frac{1}{\omega}\right|^2 + B\frac{\omega^* + \omega}{2\omega.\omega^*} + C\frac{\omega^* - \omega}{2i\omega.\omega^*} + D &= 0 \end{aligned}$$

multiplicando ambos miembros por $\omega.\omega^* = |\omega|^2$ y reagrupando,

$$\begin{aligned} A + B\frac{\omega^* + \omega}{2i} + C\frac{\omega^* - \omega}{2i} + D(\omega.\omega^*) &= 0 \\ A + Bu + C(-v) + D(u^2 + v^2) &= 0 \end{aligned}$$

finalmente

$$\boxed{A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \quad \Longrightarrow \quad D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0}$$

$(\Longleftarrow)$

Analicemos los resultados. Si la curva en el dominio es una circunferencia que no pasa por el origen $(A \neq 0 \wedge D \neq 0)$, en la imagen tendremos otra circunferencia que no pasa por el origen. Si en cambio en el dominio la circunferencia pasa por el origen $(A \neq 0 \wedge D = 0)$, la imagen será una recta que no pasa por el origen $Bu - Cv + A = 0$. Si en el dominio se presenta una recta que pasa por el origen $(A = 0 \wedge D = 0)$ la imagen será otra recta que pasa por el origen $(Bu - Cv)$. Por último, si en el dominio se describe una recta que no pasa por el origen $(A = 0 \wedge D \neq 0)$ la imagen será una circunferencia que pasa por el origen $A(u^2+v^2)+Bu-Cv=0$. Resumamos los resultados en la tabla 3.1.

Rectas que pasan por el origen: $A=0, D=0, Bx+Cy=0$	Rectas que pasan por el origen $Bu-Cv=0$
Rectas que no pasan por el origen: $A=0, D\neq 0, Bx+Cy+D=0$	Circunferencias que pasan por el origen $D(u^2+v^2)+Bu-Cv=0$
Circunferencias que pasan por el origen $A\neq 0, D=0, A(x^2+y^2)+Bx+Cy=0$	Rectas que no pasan por el origen $Bu-Cv+A=0$
Circunferencias que no pasan por el origen $A\neq 0, D\neq 0, A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$	Circunferencias que no pasan por el origen $D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0$

Cuadro 3.1: Mapeo de rectas y circunferencias

La transformación inversión tiene además la particularidad de ser la inversa de sí misma. Esto permite aplicarla sobre el conjunto de puntos en la imagen y *volver a obtener los puntos de partida*. Esto no sucede con las otras funciones vistas. Por ejemplo, si aplicamos la transformación cuadrática $(f(z)=z^2)$ a la red rectangular, obtenemos parábolas en el plano imagen. Para volver a recuperar los puntos habría que aplicar la función radicación (función inversa a la cuadrática), ya que si aplicamos la función cuadrática sobre las parábolas obtendremos un nuevo conjunto de puntos pero no la red rectangular original.

Ejemplo 3.7.1 *Transforme la región delimitada por las siguientes rectas: $x=1, x=2, y=1, y=2$ utilizando la función inversión.*

Dibujemos nuevamente la red rectangular con el conjunto de puntos solicitados en la figura 3.16.

La función inversión es :

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+i.y}=\frac{x}{x^2+y^2}-i.\frac{y}{x^2+y^2}=\begin{cases} u=\frac{x}{x^2+y^2} \\ v=-\frac{y}{x^2+y^2}\end{cases}$$

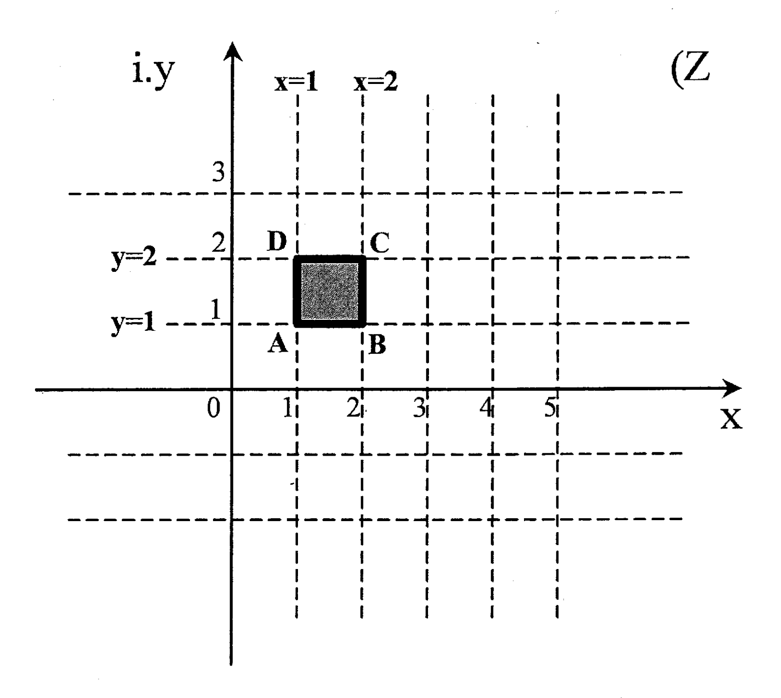


Figura 3.16: Mapeo de la red rectangular.

donde se separó en parte real e imaginaria para poder realizar la transformación de algunos puntos en forma sencilla.

Las cuatro rectas que delimitan la región de puntos del dominio, son rectas que no pasan por el origen y por lo tanto se transformarán en circunferencias que pasan por el origen. El punto A *es el más cercano al origen y por lo tanto el punto transformado* $f(A) = A'$ *será el más alejado. El punto* C *es el punto del dominio más alejado del origen y entonces* $f(C) = C'$ *será el punto más cercano. Como todos los puntos a transformar se encuentran fuera de la circunferencia de radio unitario, todos los puntos transformados residirán dentro de la misma en el plano* ω*. Como todos los puntos a transformar se encuentran en el primer cuadrante, sus ángulos al negarse los llevarán al cuarto cuadrante. Analicemos analíticamente la transformación.*

El segmento AB *está contenido en la recta* $y = 1$*, que llevada a la forma tradicional de la ecuación 3.11 es:*

$$y - 1 = 0 \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 1 \\ D = -1 \end{cases}$$

donde se hallaron por simple inspección los coeficientes A, B, C, D*. Utilizando la ecuación 3.12 hallamos la imagen como:*

$$\begin{aligned} A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad &\Longrightarrow \quad D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0 \\ y - 1 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad -(u^2 + v^2) - v = 0 \end{aligned}$$

La curva resultante es $(u^2 + v^2) + v = 0$ *que completando cuadrados se convierte en*

$$\boxed{u^2 + (v + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}}$$

Es precisamente una circunferencia que pasa por el origen con centro en $(u, v) = (0, -1/2)$ *y radio* $1/2$.

El segmento DA *está contenido en la recta* $y = 1$, *que llevada a la forma tradicional de la ecuación 3.11 es:*

$$y - 2 = 0 \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 1 \\ D = -2 \end{cases}$$

Esto resulta en la curva

$$y - 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -2(u^2 + v^2) - v = 0$$

que completando cuadrados es

$$\boxed{u^2 + (v + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}}$$

una circunferencia que pasa por el origen con centro en $(u, v) = (0, -1/4)$ *y radio* $1/4$.

El segmento BC *está contenido en la recta* $x = 2$, *que llevada a la forma tradicional de la ecuación 3.11 es:*

$$x - 2 = 0 \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 0 \\ D = -2 \end{cases}$$

Esto resulta en la curva

$$x - 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -2(u^2 + v^2) + u = 0$$

que completando cuadrados es

$$\boxed{(u - \frac{1}{4})^2 + v^2 = \frac{1}{16}}$$

una circunferencia que pasa por el origen con centro en $(u, v) = (1/4, 0)$ *y radio* $1/4$.

El último segmento es el AD *y está contenido en la recta* $x = 1$, *que llevada a la forma tradicional de la ecuación 3.11 es:*

$$x - 1 = 0 \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 0 \\ D = -1 \end{cases}$$

Esto resulta en la curva

$$x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad -(u^2 + v^2) + u = 0$$

que completando cuadrados es

$$\boxed{(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}}$$

una circunferencia que pasa por el origen con centro en $(u, v) = (1/2, 0)$ *y radio* $1/2$. *Dibujamos el resultado en una escala adecuada en la figura 3.17.*

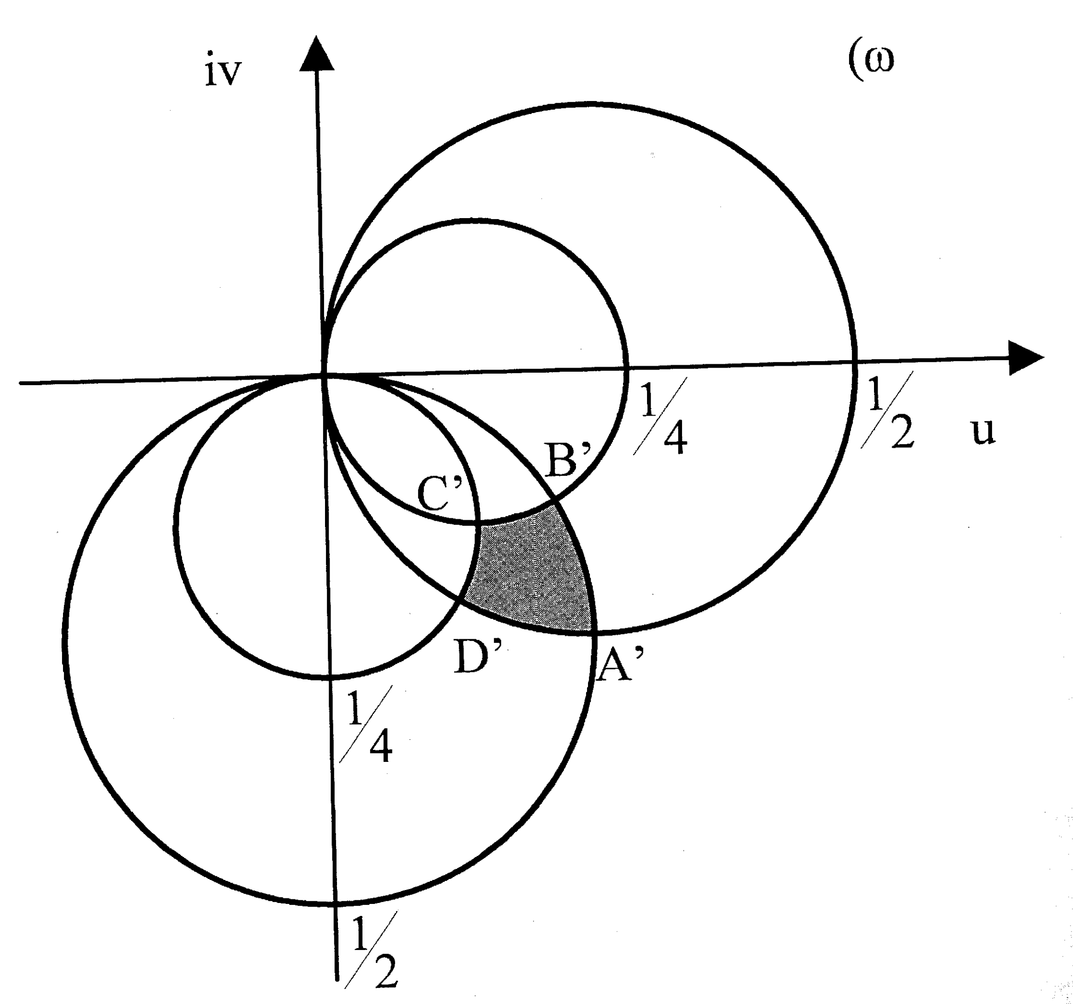


Figura 3.17: Transformación de la red rectangular a través de la función inversión.

Derivando las curvas en los puntos de intersección se puede verificar que son ortogonales en ese punto, conservándose los ángulos como lo indica la transformación conforme.

3.7.6. Transformación bilineal

Estudiaremos una aplicación de esta transformación en el capítulo de filtros digitales. Inicialmente la transformación se define como

$$\omega = f(z) = \frac{A.z+B}{C.z+D} \qquad A,B,C,D \in \mathbb{C} \tag{3.13}$$

La función bilineal no es más que una combinación de funciones lineales e inversiones. De esta forma podemos descomponerla como:

$$\begin{aligned}
\omega = f(z) &= \frac{A.z+B}{C.z+D} = \frac{A}{C}\frac{z+\frac{B}{A}}{z+\frac{D}{C}} \\
&= \frac{A}{C}\frac{z+\frac{B}{A}+\frac{D}{C}-\frac{D}{C}}{z+\frac{D}{C}} \\
&= \underbrace{\frac{A}{C}}_{\gamma}\left(1+\frac{\overbrace{\frac{B}{A}-\frac{D}{C}}^{\beta}}{z+\underbrace{\frac{D}{C}}_{\alpha}}\right) \\
&= \gamma\left(1+\frac{\beta}{z+\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Donde primero debemos realizar una traslación $\omega_1 = u_1 + i.v_1 = z + \alpha$, luego una inversión $\omega_2 = u_2 + i.v_2 = 1/\omega_1$, luego un producto $\omega_3 = \beta.\omega_2$, una nueva traslación $\omega_4 = u_4 + i.v_4 = 1 + \omega_3$ y por último un producto $\omega = u + i.v = \gamma.\omega_4$.

Las regiones fundamentales con las que se trabaja en la transformación bilineal son las delimitadas por rectas y circunferencias.

Siempre que se desee separar a una función en funciones constitutivas para transformar por pasos, es necesario que solo exista una única z es la expresión.

3.7.7. Transformación exponencial

La transformación exponencial es de la forma

$$\omega = f(z) = e^z \tag{3.14}$$

El análisis en coordenadas rectangulares es simple. Separemos la parte real de la parte imaginaria.

$$\omega = f(z) = e^z = e^{x+i.y} = e^x.e^{i.y} = e^x\left[cos(y) + i.sen(y)\right] = \underbrace{e^x cos(y)}_{u} + i.\underbrace{e^x sen(y)}_{v}$$

$$f(z) = e^z = \begin{cases} u = e^x cos(y) \\ v = e^x sen(y) \end{cases}$$

Operando algebraicamente podemos hallar las siguientes expresiones simplificadas:

$$\frac{v}{u} = tan(y) \qquad u^2 + v^2 = e^{2x}$$

De esto se desprende la utilidad de la transformación. Si se transforma una recta del tipo $y = cte$, la transformada es una recta del tipo $v/u = cte$. Si se transforma una recta del tipo $x = cte$, obtenemos una circunferencia centrada en el origen $u^2 + v^2 = cte$.

3.8. Resumen del capítulo

Definimos a las funciones de variable compleja. Introdujimos los conceptos de límite y derivada en el campo complejo. Las funciones con las que trabajamos son las denominadas analíticas. Una función es analítica en un punto si es derivable en el punto y en su entorno. Las funciones analíticas poseen parte real y parte imaginaria armónicas (cumplen con la ecuación de Laplace) y entre si se denominan conjugadas. Para verificar si una función es analítica se desarrollaron las condiciones de Cauchy-Rienman tanto para coordenadas rectangulares como polares. Si se cumplen estas condiciones y además la parte real e imaginaria de la función son derivables, entonces aseguramos la analiticidad de la función en el punto.

Las funciones analíticas pueden ser utilizadas para mapear un conjunto de puntos de un plano dominio hacia otro imagen. La transformación a través de una función analítica es conforme, lo que asegura que se conserven los ángulos y sentidos de intersección de las curvas mapeadas en ambos planos. Desarrollamos las funciones lineales, las cuadráticas, la inversión, la bilineal y la exponencial como ejemplos concretos. El objetivo práctico del mapeo es conseguir *simplificar* regiones complicadas en otras más sencillas. Cada una de las funciones analizadas cumple este objetivo con distinto tipo de regiones comentadas oportunamente.

3.9. Problemas propuestos

1. Hallar por definición la derivada de $f(z) = z^3 + 2z$ en $z = z_0$.

2. Hallar por definición la derivada de $f(z) = (1 + z)/(1 - z)$ y determinar donde la función no es analítica.

3. Demostrar que la derivada de $f(z) = z^*$, donde * implica el conjugado, no existe para ningún valor de z.

4. Determinar en qué puntos las siguientes funciones son analíticas:

    a) $f(z) = sen(z)$.
    b) $f(z) = 1/z$.
    c) $f(z) = 1/(z^2 + 1)$.
    d) $f(z) = z/sen(z)$.
    e) $f(z) = z + z^*$.
    f) $f(z) = e^{1/(z-1)}$.
    g) $f(z) = |z|^2$.
    h) $f(z) = (z - 1)/(z^2 + 2iz + 1)$.

5. Determinar si la función $f(z) = z.z^*$ es derivable y analítica en el origen.

6. Determinar si las siguientes funciones son armónicas. En el caso que lo sean halle su conjugada armónica y componga la función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ correspondiente.

    a) $u(x, y) = x^2 + 2x - y^2$.
    b) $u(x, y) = 2e^x cos(y)$.
    c) $u(x, y) = ln(x^2 + y^2)$.
    d) $v(x, y) = -y$.
    e) $u(x, y) = x^2 - y^2$.
    f) $u(x, y) = (x^2 + y^2)/x$.
    g) $v(x, y) = 2xy$.
    h) $u(x, y) = e^{-x} cos(y)$.
    i) $u(x, y) = 2x(1 - y)$.
    j) $v(x, y) = e^{-x}(x.sen(y) - y.cos(y))$.

7. Hallar la ecuación de las líneas de fuerza en una región en que la distribución de potencial es

    a) $P(x, y) = arctg(y/(x + 1))$.

b) $P(x,y) = 2x^3 - 6xy^2$.

c) $P(x,y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$.

d) $P(x,y) = e^{-2xy} sen(x^2 - y^2)$.

8. Dado el conjunto de puntos delimitado por las siguientes curvas en el primer cuadrante $2 > xy > 1$, hallar la imagen mediante la función:

   a) $f(z) = z^2 + 1$.

   b) $f(z) = iz^2$. Dibuje el plano dominio y el plano imagen en cada caso.

9. Dado el conjunto de puntos delimitado por $|z - i| < 1$, hallar la imagen a través de la función:

   a) $f(z) = (i + 1)/z$.

   b) $f(z) = 1/(z - i)$.

10. Se desea hallar la transformación de los puntos intersección entre $|z - 2i| < 2$ y $|z - i| > 1$ a través de las siguientes función $f(z) = i/z$. Dibuje el dominio y la imagen.

11. Dada la función $f(z) = z^2 + 2i - 2$ se desea hallar el conjunto de puntos transformado, siendo los puntos del dominio $9 > x^2 - y^2 > 4$ con $x > 0$.

12. Utilizando la función bilineal $f(z) = (1 + z)/(1 - z)$ mapee el semiplano izquierdo $x < 0$.

13. Dado los conjuntos de puntos rayados en la figura 3.18 se pide:

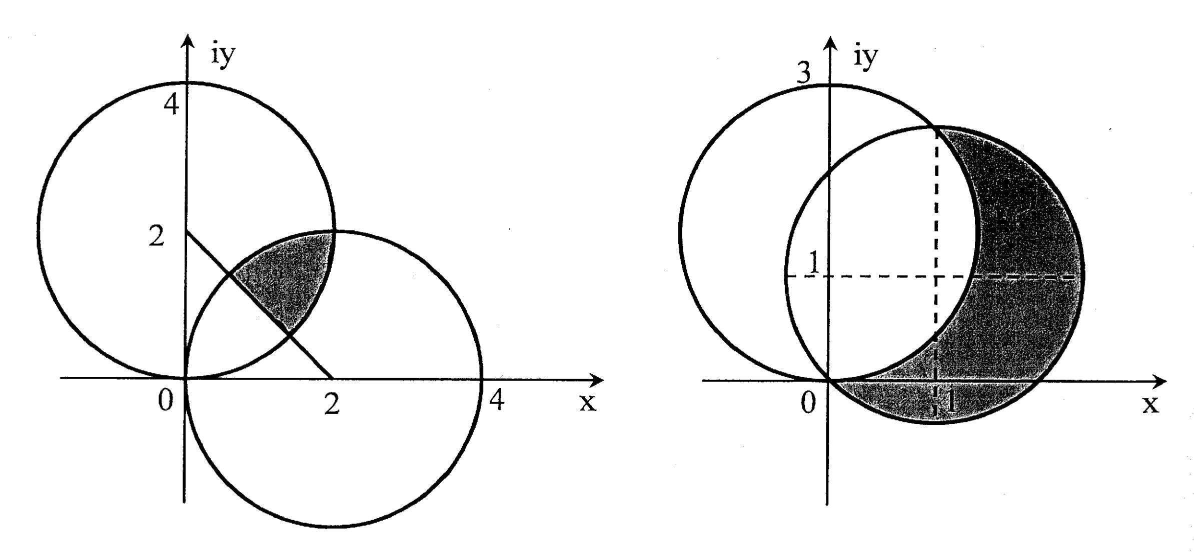


Figura 3.18: Conjunto de puntos

Halle la imagen mediante $f(z) = 2/(iz)$ para cada caso.

14. Utilice la función exponencial $f(z) = e^z$ para mapear el sistema rectangular y el polar. Elija, para cada caso, un conjunto de puntos ejemplo siguiendo como guía lo que se hizo con otras funciones.

15. Mapee el conjunto de puntos determinado por $|z| > 1$ y $Im\{z\} = y > 0$ a través de $f(z) = z + 1/z$.

16. Mapee el conjunto de puntos delimitado por $2 > |z| > 1$ a través de $f(z) = ln(z)$.

17. Observe los conjuntos de puntos definidos en la figura 3.19.Transforme el primer conjunto a través de $f(z) = z^2$ y obtenga el conjunto de puntos imagen. Para el gráfico de la derecha utilice la funcion multiforme $f(z) = \sqrt{z}$.

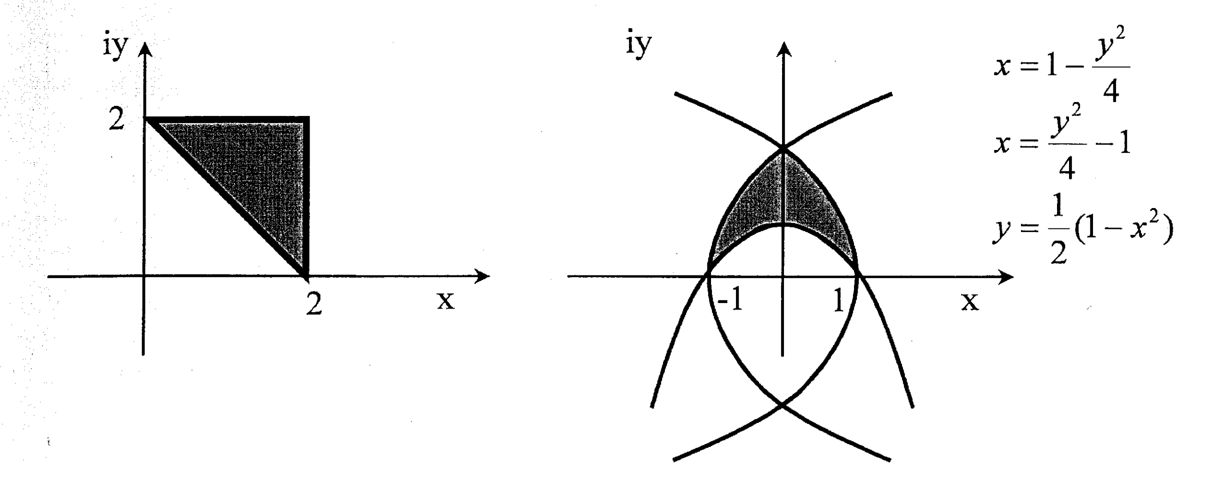


Figura 3.19: Conjunto de puntos

18. Dibujar simultáneamente las imágenes del círculo $(x-3)^2 + y^2 = 2$ y la recta $2x + 3y = 7$ con la transformación $f(z) = 1/z$. Calcule los ángulos de cruce y verifique la conformidad de la transformación.

19. Mapear el primer cuadrante $x > 0, y > 0$ a través de la transformación bilineal $f(z) = (z + i - 1)/(2z + 1)$.

Aplicación en MatLab

```
%MAPEO CONFORME
%El mapeo conforme implica transformar un dominio en R2 (plano Z complejo)
%a una imagen en R2 (plano W complejo) a partir de la ejecución de una
%función compleja W=f(Z).

%Variables locales
d_tita=0.01;

%Confección del Plano Z (ORIGEN)
figure(1);
%Z1: Circunferencia centro (0,2i) radio 2
phi=0:d_tita:2*pi;
ro=2;
centro=2*i;
z1=complex(ro*cos(phi),ro*sin(phi))+centro;
%Z2: Circunferencia centro (0,i) radio 1
phi=0:d_tita:2*pi;
ro=1;
centro=i;
z2=complex(ro.*cos(phi),ro.*sin(phi))+centro;
%Zp: Punto de verificación de zona
zp=complex(0,3);
%Visualización plano Z
figure(1),hold on;
plot(z1,'b'),plot(z2,'r'),plot(zp,'go'),xlabel('x'),ylabel('jy'),grid;
title('PLANO Z (DOMINIO)');
axis([-2 2 0 4]);

%NOTA: Aún si la variable a considerar es real, dabe generársela con la función
%complex de manera de obtener un resultado con clase compleja (sino es mal
%interpretado por la función plot). Observar el workspace, columna class.

%Confección del plano W (IMAGEN)
%Aplicacion del la función de mapeo W=f(z)=i/z
w1=i./z1;
w2=i./z2;
wp=i./zp;
%Conversión de posibles valores reales provenientes de la ejecución de la función a
%la clase compleja
w1=complex(real(w1),imag(w1));
w2=complex(real(w2),imag(w2));
wp=complex(real(wp),imag(wp));

%Visualización plano W
figure(2),hold on;
plot(w1,'b'),plot(w2,'r'),plot(wp,'go'),xlabel('u'),ylabel('jv'),grid;
title('PLANO W=f(z)=i/z (IMAGEN)');
axis([-0.1 0.7 -2 2]);
```

Capítulo 4

Integración en el campo complejo

4.1. Introducción

Las integrales en el campo complejo tienen varias aplicaciones prácticas, alguna de las cuáles analizaremos en los capítulos siguiente. Además, existe un importante número de integrales en el campo real que solo pueden resolverse en el campo complejo. Por otro lado, las funciones analíticas poseen propiedades que se basan en conceptos de integrales, por ejemplo la existencia de derivadas de orden superior. El capítulo se concentra en el Teorema de Cauchy y la fórmula de la integral de Cauchy. Veremos como una función analítica posee derivadas de cualquier orden y qué consecuencias tiene esto sobre su desarrollo en serie, que abordaremos en el próximo capítulo.

4.2. Integración compleja en un intervalo real

Este es un caso particular que analizaremos inicialmente para introducir el tema. Sea una función de variable compleja definida en un intervalo real como

$$f(t) = u(t) + i.v(t) \qquad t \in I\!R_\wedge t \in [a, b]$$

Note que $f(t)$ es una función de variable compleja donde el dominio es un número real t, y por lo tanto esto describe una curva en el campo complejo. Mantenemos la nomenclatura clásica donde llamamos $u(t)$ a la parte real y $v(t)$ a la parte imaginaria de $\omega = f(t)$. Tanto $u(t)$ como $v(t)$ son funciones reales.

La integral de f con respecto a t se define como

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i. \int_a^b v(t)dt$$

donde debemos asegurar que las integrales del segundo miembro existan. Las condiciones de existencia de la integral de $f(t)$ son por lo tanto las de existencia de las funciones reales:

Teorema 4.2.1 *Si la función $f(t) = u(t) + i.v(t)$ es continua en el intervalo finito $[a, b]$ entonces es integrable en ese intervalo. Si $f(t)$ es continua en $[a, b]$ entonces también lo son $u(t)$ y $v(t)$, y por lo tanto también son integrables individualmente en ese intervalo.*

Las restricciones sobre la continuidad de $f(t)$ no son necesarias y, como veremos más adelante, la continuidad solo debe ser seccional. Inclusive puede haber puntos aislados donde el integrando se haga infinito y sin embargo existir las integrales del lado derecho.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 4.2.1 *Observe como se calculan las siguientes integrales:*

- *La función a integrar será $f(t) = R_0.e^{it}$ que describe una circunferencia de radio R_0 y centrada en el origen. El valor de t, modificando el ángulo, permite recorrer la curva en sentido antihorario. En este caso se integrará en el intervalo $t \in [0, \pi]$:*

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi R_0.e^{it}dt &= \int_0^\pi R_0.\left[cos(t) + i.sen(t)\right]dt \\
&= \int_0^\pi R_0.cos(t)dt + i.\int_0^\pi R_0.sen(t)dt \\
&= R_0.sen(t)\Big|_0^\pi - i.R_0.cos(t)\Big|_0^\pi \\
&= i2R_0
\end{aligned}$$

donde se separó la parte real de la imaginaria y se realizaron los cálculo correspondientes. El resultado de las integrales en el campo complejo no suele tener una explicación geométrica asociada.

- *En este segundo caso la función es $f(t) = t + i.t^2$ que describe una parábola. El intervalo de integración será $t \in [0, 1]$.*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (t + i.t^2)dt &= \int_0^1 tdt + i.\int_0^1 t^2dt \\
&= \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + i.\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2} + i.\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

4.2.1. Propiedades

Sean las funciones complejas $f(t), f_1(t), f_2(t)$ integrables en el intervalo real $[a,b]$, y sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una constante, se verifican las siguientes propiedades:

1. $\int\limits_a^b [f_1(t) + f_2(t)]\, dt = \int\limits_a^b f_1(t)dt + \int\limits_a^b f_2(t)dt.$

2. $\int\limits_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int\limits_a^b f(t)dt.$

3. $\int\limits_a^b f(t)dt = -\int\limits_b^a f(t)dt.$

4. $\int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^c f(t)dt + \int\limits_c^b f(t)dt$ con $a \leq c \leq b$.

5. $\left|\int\limits_a^b f(t)dt\right| \leq \int\limits_a^b |f(t)|dt \leq M.L$, con $L = b - a \geq 0$ en $[a,b]$.

Las cuatro primeras propiedades se demuestran utilizando la integración de funciones de variable real. En la última propiedad se considera que, como $f(t)$ es integrable, entonces es una función acotada en el intervalo real, y su cota es M: $|f(t)| \leq M$. De esta forma es fácil demostrar que, sacando el $|f(t)|$ de la derecha de la desigualdad fuera de la integral, el resultado es $M.(b-a)$, donde llamamos $L = b - a$.

4.3. Integrales de línea en el campo complejo

Dibujemos un arco de curva C entre a y b, regular en todos los puntos y de longitud finita; es decir un arco rectificable (figure 4.1). Sobre el existe una función $\omega = f(z)$. Dividimos el arco arbitrariamente en un número finito n de arcos parciales: z_{k-1}, z_k. En cada arco se elige arbitrariamente un punto ε_k para el cual la función vale $f(\varepsilon_k)$.

Si restamos $z_k - z_{k-1}$, estamos calculando un vector que va desde el punto z_{k-1} hasta z_k llamado *cuerda*, como muestra la figura 4.1.

Efectuamos ahora el producto $(z_k - z_{k-1})\, f(\varepsilon_k)$ y realizamos la sumatoria. Finalmente tomamos el límite para cuando se realizan infinitas subdivisiones, o sea $n \to \infty$ o $(z_k - z_{k-1}) \to 0$ (las cuerdas tienden a cero). Si este límite existe es, por definición, la integral de línea de $f(z)$ sobre el arco C desde a hacia b:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1})\, f(\varepsilon_k) = \int\limits_a^b f(z)dz} \qquad (4.1)$$

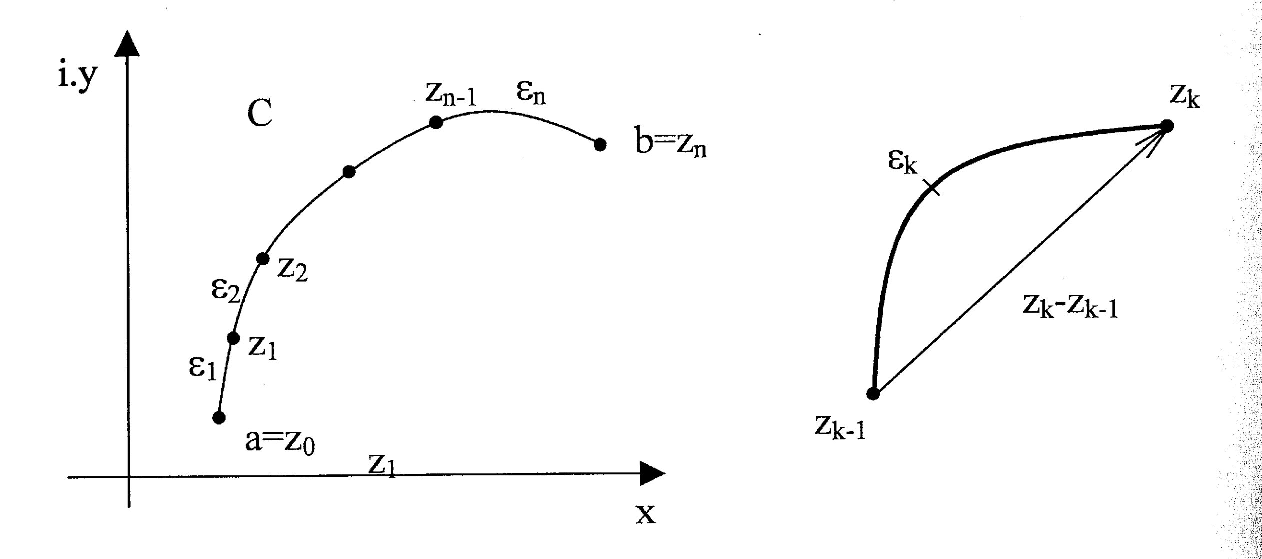


Figura 4.1: Arco de curva C rectificable.

Si la curva es cerrada, la nomenclatura es

$$\oint_C f(z)dz$$

Donde se considera positivo el sentido antihorario.

Para realizar las integrales de línea se pueden utilizar, al igual que en el campo vectorial real, dos métodos. El primero consiste en hallar la curva C en función de $t \in I\!R$ como $z(t)$ y realizar la integral como:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\left[z(t)\right] z'(t)dt$$

El segundo método consiste en parametrizar la función de manera que $f(z) = u(x,y) + i.v(x,y)$ y el diferencial $dz = dx + i.dy$. Interpretando a $f(z)dz$ como un producto obtenemos:

$$f(z)dz = \left[u(x,y) + i.v(x,y)\right]\left[dx + i.dy\right] = u(x,y)dx - v(x,y)dy + i.\left[v(x,y)dx + u(x,y)dy\right]$$

De esta forma podemos convertir la integral compleja en un par de integrales reales de la forma:

$$\int_C f(z)dz = \int_C u.dx - v.dy + i.\int_C v.dx + u.dy$$

La demostración de estos métodos puede hallarse en un libro de integración vectorial. Veamos un ejemplo ilustrativo.

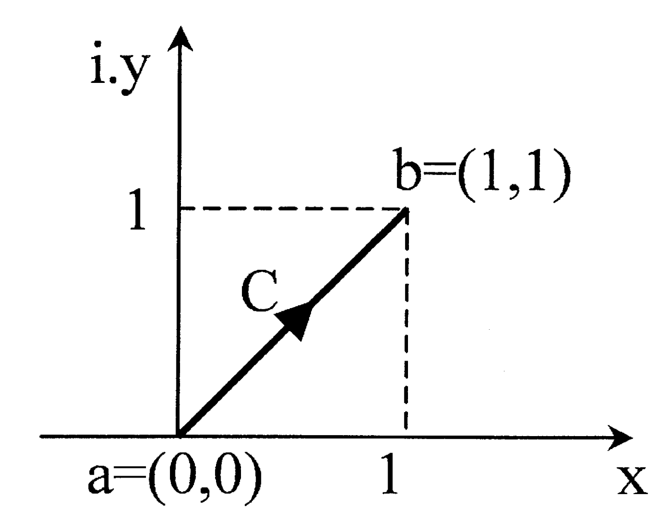


Figura 4.2: Ejemplo de integración.

Ejemplo 4.3.1 *Calcule la integral de $f(z) = z^2$ a lo largo de la curva descrita en la figura 4.2.*

Realizaremos la integral utilizando los dos métodos mencionados. Los resultados de una integral definida son números complejos. Para el primero debemos hallar la curva $z(t)$. Como se trata de una recta, simplemente proponemos: $z(t) = t + i.t$ con $t \in [0,1]$ respetando la dirección de integración impuesta en la figura. La derivada es $z'(t) = 1 + i$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int\limits_C f(z)dz &= \int\limits_a^b f\left[z(t)\right] z'(t)dt \\
\int\limits_C z^2 dz &= \int\limits_0^1 (t + i.t)^2 .(1+i)dt \\
&= \int\limits_0^1 i2t^2.(1+i)dt = (-2+i2)\int\limits_0^1 t^2 dt = (-2+i2)\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Para resolver la misma integral pero por el segundo método, debemos separar a $f(z)$ en parte real e imaginaria:

$$f(z) = f(x+i.y) = z^2 = \left(x^2 - y^2\right) + i2xy = \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

La curva para este caso en forma paramétrica es

$$C = \begin{cases} x = x \\ y = y \end{cases}$$

donde los intervalos son $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$. *Reemplazando en la ecuación de cálculo hallamos*

$$\int_C f(z)dz = \int_C u.dx - v.dy + i.\int_C v.dx + u.dy$$

$$\int_C z^2 dz = \int_C (x^2 - y^2).dx - (2xy).dy + i.\int_C (2xy).dx + (x^2 - y^2).dy$$

como $C : y = x$ *entonces la parametrización queda*

$$C = \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in [0,1]$$

y $dx = dt = dy$. *Escribimos entonces*

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C (x^2 - y^2).dx - (2xy).dy + i.\int_C (2xy).dx + (x^2 - y^2).dy \\ &= \int_0^1 (t^2 - t^2).dt - (2t^2).dt + i.\int_0^1 (2t^2).dt + (t^2 - t^2).dt \\ &= -\frac{2t^3}{3}\Big|_0^1 + i.\frac{2t^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{2}{3} + i.\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Para calcular la longitud de una curva se puede utilizar la siguiente expresión:

$$\boxed{L = \int_C |dz| = \int_C |z'(t)dt| = \int_C |z'(t)|dt}$$

Para el ejemplo anterior, donde la curva era una recta desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$ escribimos simplemente:

$$L = \int_C |z'(t)|dt = \int_0^1 |(1+i)|dt = \sqrt{2}$$

4.3.1. Propiedades

Sean las funciones $f(z), f_1(z), f_2(z)$ integrables sobre una curva C y $\alpha \in \mathbb{C}$ una constante, podemos afirmar que:

1. $\int_C [f_1(z) + f_2(z)]\, dz = \int_C f_1(z)dz + \int_C f_2(z)dz.$

2. $\int\limits_C \alpha f(z)dz = \alpha \int\limits_C f(z)dz.$

3. $\int\limits_C f(z)dz = -\int\limits_{-C} f(z)dz$ donde se recorre a la curva en sentido opuesto.

4. $\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz$, $C = C_1 \cup C_2$.

5. $\left|\int\limits_C f(z)dz\right| \leq \int\limits_C |f(z)||dz| \leq M.L(C)$ donde $f(z) \leq M$ es acotada y la longitud de la curva es $L(C)$.

Veamos un último ejemplo:

Ejemplo 4.3.2 *Calcule la siguiente integral de línea:*

$$\oint\limits_C f(z)dz = \oint\limits_C \frac{1}{z-a}dz \qquad C: a + R_0.e^{it}, t \in [0, 2\pi], a \in \mathbb{C}$$

Esta integral es muy especial y será utilizada en repetidas ocasiones a lo largo del capítulo. Note que la función que se está integrando no es analítica para el punto $z = a$. La curva de integración es una circunferencia recorrida en sentido antihorario, de radio R_0 y centro a.
Derivemos la curva $z(t) = a + R_0.e^{it}$ de manera que $z'(t) = i.R_0.e^{it}dt$, y calculemos

$$\begin{aligned}\oint\limits_C f(z)dz &= \int\limits_0^{2\pi} f\left[z(t)\right] z'(t)dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{R_0.e^{it}} i.R_0.e^{it}dt = i.\int\limits_0^{2\pi} dt = i2\pi\end{aligned}$$

4.4. Teorema de Cauchy

Teorema 4.4.1 *Si una función es analítica sobre una curva C simplemente cerrada y en todo su recinto interior R y derivable con continuidad, entonces se cumple:*

$$\boxed{\oint\limits_C f(z)dz = 0} \tag{4.2}$$

Este teorema es central en el análisis de variable compleja.

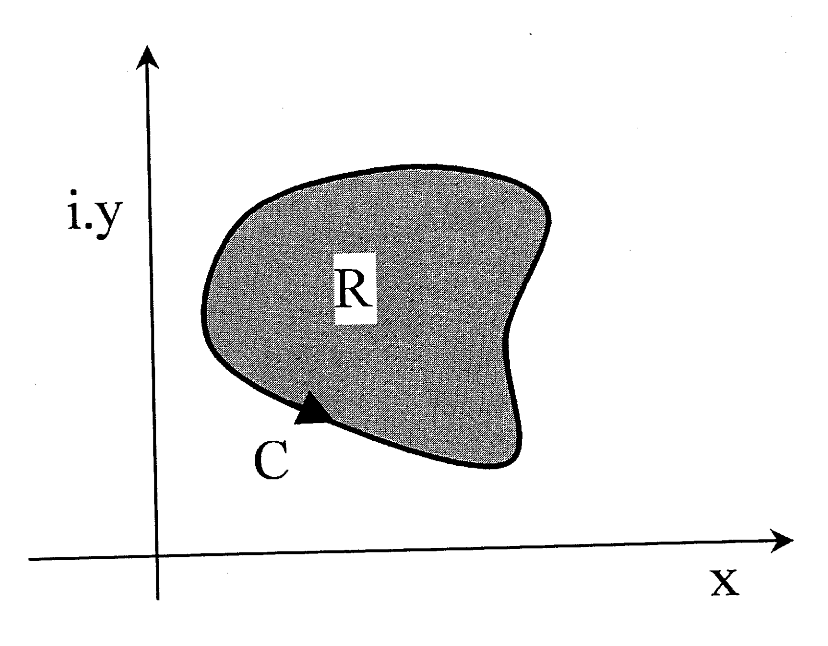


Figura 4.3: Región simplemente conexa.

Demostración:

($\Longrightarrow$)

En efecto, por ser $\omega = f(z) = u(x,y) + i.v(x,y)$, y $dz = dx + i.dy$, resulta que aplicando introduciendo estas expresiones en 4.2 obtenemos

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= \oint_C [u(x,y) + i.v(x,y)]\,[dx + i.dy] \\ &= \oint_C (u.dx - v.dy) + i.\oint_C (v.dx + u.dy) \end{aligned}$$

El teorema de *Green* asegura que si dos funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son continuas junto con sus derivadas parciales primeras en un dominio R simplemente conexo, y si C es una curva cerrada cualquiera dentro de R, se verifica:

$$\oint_C (M(x,y).dx + N(x,y).dy) = -\int\int_R \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx.dy$$

Como la función $f(z)$ es analítica, podemos aplicar este teorema en nuestro caso y escribir, con $u = M$ y $v = -N$:

$$\oint_C (u.dx - v.dy) = -\int_R\int \left(u'_y + v'_x\right) dxdy$$

y con $v = M$ y $u = N$:

$$\oint_C (v.dx + u.dy) = -\int_R\int \left(v'_y - u'_x\right) dxdy$$

Aplicando las ecuaciones de Cauchy-Rienman: $u'x = v'y$ y $u'y = -v'x$ ambas integrales dan como resultado cero, terminando la demostración del teorema:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u.dx - v.dy) + i.\oint_C (v.dx + u.dy) = 0$$

$(\Longleftarrow)$

Es necesario realizar dos observaciones muy importantes. Realicemos por ejemplo la siguiente integral:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{1}{z}dz \qquad C: z(t) = R_0.e^{it}, t \in [0, 2\pi], R_0 \in I\!R$$

donde la curva de integración es una circunferencia de radio R_0 centrada en el origen y recorrida en sentido antihorario. Como puede observar la función $f(z)$ no es analítica en $z = 0$ y por lo tanto no se puede aplicar el Teorema de Cauchy.

Realizamos la integral de línea por el método tradicional:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f\left[z(t)\right] z'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{R_0.e^{it}} i.R_0.e^{it}dt = i.\int_0^{2\pi} dt = i{,}2\pi \neq 0\end{aligned}$$

El resultado es distinto de cero y puede hallarse utilizando el ejemplo 4.3.2, donde demostramos que

$$\oint_C \frac{1}{z-a}dz = i2\pi \qquad C: a + R_0.e^{it}$$

Pero es preciso aclarar que el Teorema de Cauchy asegura que si la función es analítica dentro y sobre la curva, el resultado de la integral es cero, pero el contrario no es cierto. Esto quiere decir que no siempre que el resultado de una integral de línea de cero, eso implica que la función integrada sea analítica.

Efectuemos por ejemplo la siguiente integral:

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad C: a + R_0.e^{it}, a \in I\!R, R_0 \in I\!R, n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

donde nuevamente la función que se integra no es analítica dentro del recinto delimitado por la curva C. Resulta entonces

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{(z-a)^{n+1}}dz &= i.\int_0^{2\pi} \frac{1}{(R_0.e^{it})^{n+1}} R_0.e^{it}dt = \\ &= i.\int_0^{2\pi} \frac{1}{R_0^{n+1}.e^{i(n+1)t}} R_0.e^{it}dt = \\ &= \frac{i}{R_0^n}.\int_0^{2\pi} e^{-int}dt = \frac{i}{R_0^n}.\int_0^{2\pi} [cos(nt) - i.sen(nt)]\, dt \\ &= \frac{i}{R_0^n}\left[\frac{sen(nt)+i.cos(nt)}{n}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\boxed{\oint_C \frac{1}{(z-a)^{n+1}}dz = 0 \qquad C: a + R_0.e^{it}, n = \pm 1, \pm 2, \ldots} \tag{4.3}$$

Esto demuestra cómo el resultado de la integral puede ser cero, a pesar que la función integrada no sea analítica dentro de la curva C de integración.[1]

4.4.1. Corolario del Teorema de Cauchy

Un recinto múltiplemente conexo se puede convertir en otro simplemente conexo realizando cortes arbitrarios como los señalados en las figuras 4.4.

Mediante esta operación es cierto el siguiente corolario del Teorema de Cauchy:

Corolario 4.4.1 *La integral sobre un contorno exterior C es igual a la suma de las integrales sobre los contornos interiores si las integraciones son posibles y efectuándose la circulación en sentido positivo (antihorario)*

Tomemos un contorno múltiplemente conexo y realicemos los cortes mencionados para convertirlo en un recinto simplemente conexo, como el observado en la figura 4.5. Recuerde que para aplicar el Teorema de Cauchy, dentro de la curva la función debe ser analítica.

Como ahora al recorrer C tenemos una función analítica en el interior podemos asegurar por 4.2 que:

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

[1]Recuerde que el término **dentro de la curva** se refiere siempre, teniendo en cuenta el teorema de Green a la zona encerrada mientras el recorrido de C se realice en sentido antihorario.

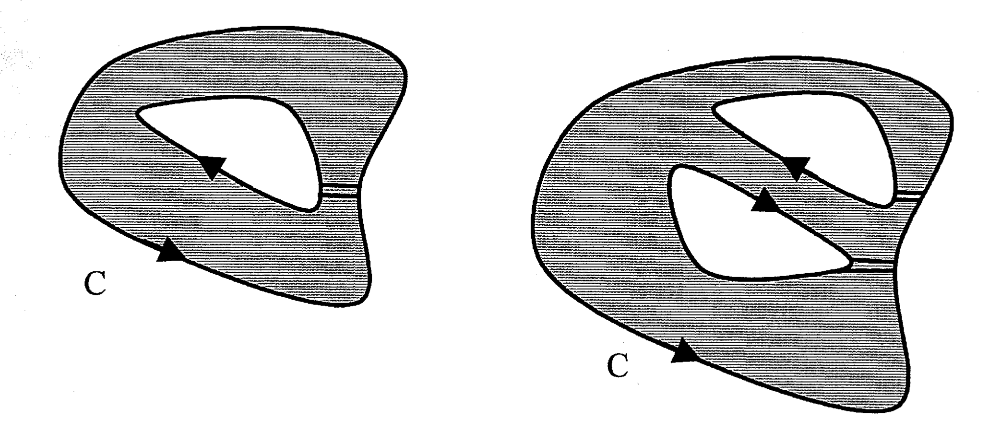


Figura 4.4: Conversión de regiones multiplemente conexas en una región simplemente conexa.

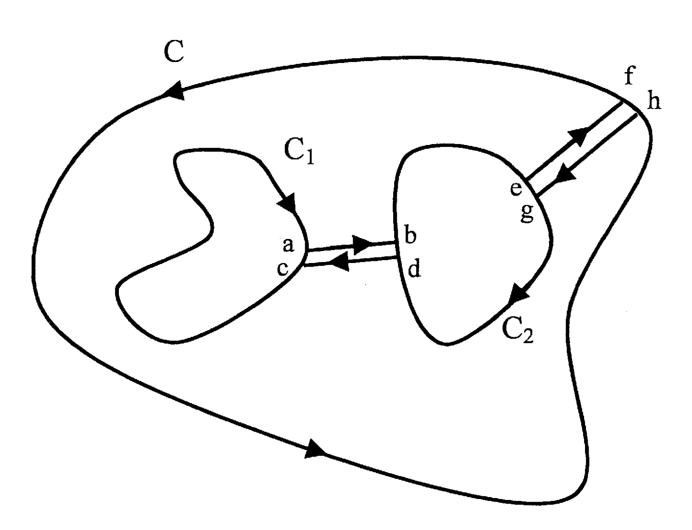


Figura 4.5: Conversión de regiones multiplemente conexas en una región simplemente conexa.

pero la curva C la podemos descomponer en los diferentes segmentos:

$$\oint_C f(z)dz = \int_{\widehat{fh}} + \int_{\bar{hg}} + \int_{\widehat{gd}} + \int_{\bar{dc}} + \int_{\widehat{ca}} + \int_{\bar{ab}} + \int_{\widehat{be}} + \int_{\bar{ef}} = 0$$

las integrales que recorren los cortes ida y vuelta se anulan ya que $\int_a^b = -\int_b^a$. Piense que los cortes se recorren sobre la misma línea (por ejemplo los puntos a y c son los mismos solo que se dibujan separados para comprender el efecto). Así queda:

$$\int_{\widehat{fh}} + \int_{\widehat{gd}} + \int_{\widehat{ca}} + \int_{\widehat{be}} = 0$$

La integral $\int\limits_{\widehat{gd}} + \int\limits_{\widehat{be}}$ forma la integral sobre C_2 pero en sentido horario, $\int\limits_{\widehat{ca}}$ es la integral sobre C_1 también en sentido horario y la integral $\int\limits_{\widehat{fh}}$ es la integral sobre C . De esta forma escribimos:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz - \oint\limits_{C_2} f(z)dz - \oint\limits_{C_1} f(z)dz = 0$$

donde los cambios de signo se deben a los sentidos analizados de recorrido.

Finalmente escribimos:

$$\boxed{\oint\limits_{C} f(z)dz = \oint\limits_{C_2} f(z)dz + \oint\limits_{C_1} f(z)dz}$$

donde vemos que **realizar la integral a través de la curva C es equivalente a realizar las integrales individuales alrededor de las curvas C_1 y C_2 internas, conservando el sentido de circulación**. Esto lo podemos graficar como muestra la figura 4.6.

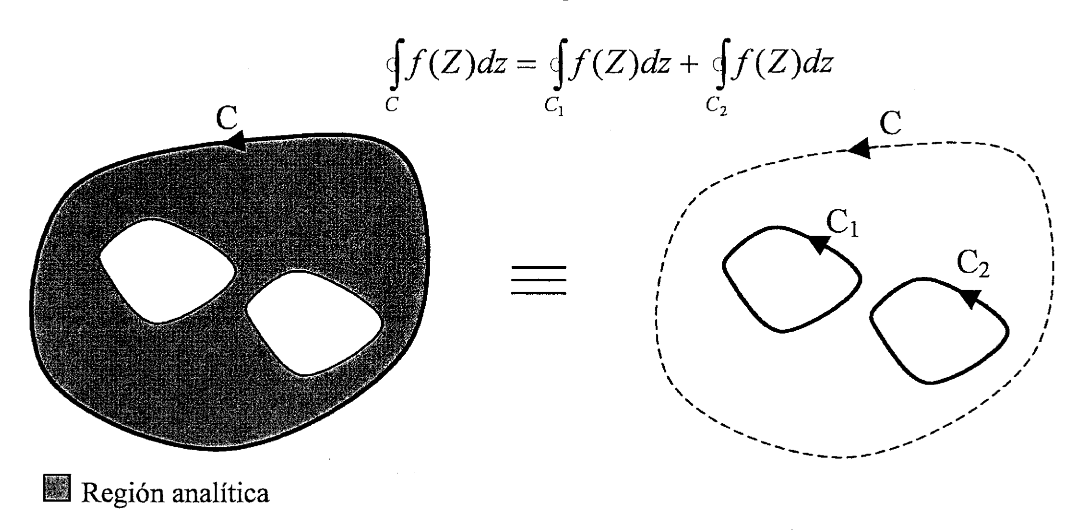


Figura 4.6: Corolario del teorema de Cauchy.

4.5. Teorema de la independencia de caminos

Si una función $f(z)$ es analítica en todo un recinto R, la integral entre dos puntos a, b es este último es independiente del camino de integración. Veamos gráficamente una curva dentro de una región analítica en la figura 4.7.

En efecto, por el Teorema de Cauchy, la integral en sentido antihorario es:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = \int\limits_{abcda} f(z)dz = 0$$

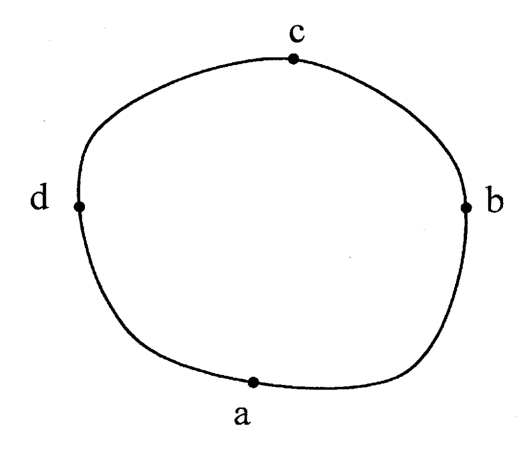


Figura 4.7: Independencia de caminos de integración.

Separando la curva C en dos vemos que:

$$\begin{aligned}\int_{abcd} f(z)dz &= \int_{abc} f(z)dz + \int_{cda} f(z)dz = 0 \\ &= \int_{abc} f(z)dz - \int_{adc} f(z)dz = 0\end{aligned}$$

por lo tanto vemos que la integral es independiente del camino elegido:

$$\int_{abc} f(z)dz = \int_{adc} f(z)dz$$

El resultado es el mismo si partimos de a hacia c por estos dos caminos diferentes. Es importante que tenga en cuenta que las curvas deben residir dentro de una zona analítica.

Se denomina *primitiva* de $f(z)$ a cualquier función $F(z)$ analítica en el dominio D donde $f(z)$ es continua, de manera que $F'(z) = f(z)$. Utilizando la independencia de caminos podemos asegurar que, si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D, y su primitiva la denominamos $F(z)$, se cumple:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

donde z_1 y z_2 son los extremos de integración y pertenecen a D. Esta propiedad se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.5.1 *Calcule la siguiente integral:*

$$\int_C (z^2+1)dz$$

donde la curva C es la mostrada en la figura 4.8.

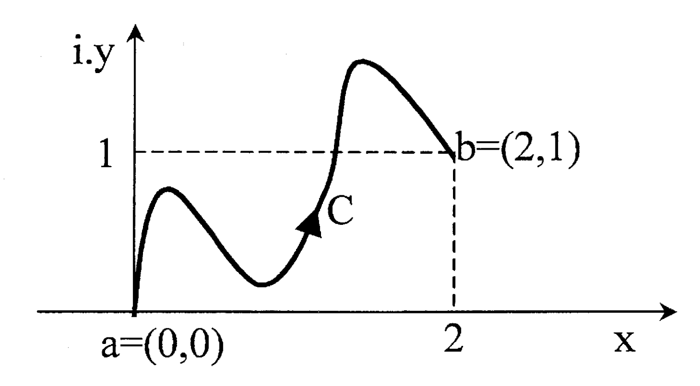


Figura 4.8: Independencia de caminos.

Como la función $f(z) = z^2 + 1$ es analítica para todo z, la integral no depende del camino, y se puede calcular directamente como

$$\int_C (z^2+1)dz = \int_a^b (z^2+1)dz = \left(\frac{z^3}{3}+z\right)\Bigg|_0^{2+i} = \frac{(2+i)^3}{3} + (2+i) = \frac{8+i14}{3}$$

4.6. Fórmula de la integral de Cauchy

Teorema 4.6.1 *Si una función $f(z)$ es analítica sobre una curva simplemente cerrada C y en todo su recinto interior y z_0 es un punto de este, se cumple:*

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz} \tag{4.4}$$

Diferenciemos claramente el siguiente concepto. La función $f(z)$ es analítica en el recinto, mientras que el integrando no lo es, ya que $f(z)/(z-z_0)$ posee una singularidad en $z = z_0$. La fórmula de la integral de Cauchy permite hallar el valor que toma una función analítica en un punto, mediante el cálculo de una integral. Esto puede parecer inicialmente complicado: ¿por qué no evaluar directamente a $f(z)$ en el punto? Lo importante del teorema es que el hecho de que el valor de una función analítica $f(z)$ pueda evaluarse en un punto a través de una integral, implica que es función es derivable en ese punto. En ese sentido,

y razonando repetidamente, avanzaremos conceptualmente en el corolario 4.6.1 sobre una idea más trascendente que una función analítica en un punto tiene infinitas derivadas en ese punto.

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Con centro en z_0 se traza una circunferencia C_1 de radio ρ tal que esté incluida totalmente en el recinto analítico R de $f(z)$ como muestra la figura 4.9.

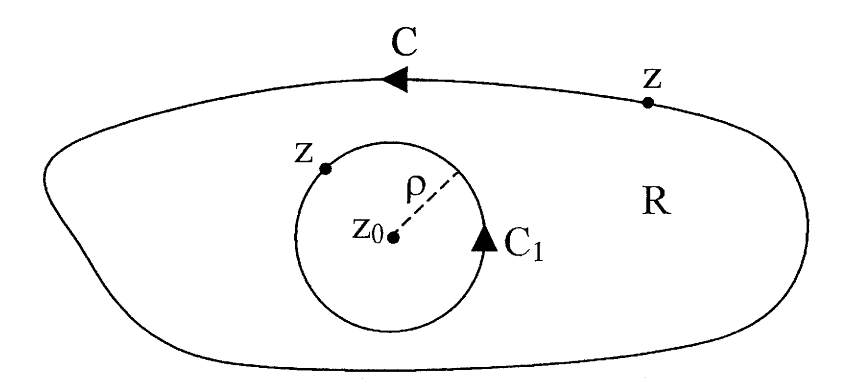


Figura 4.9: Diagrama para el planteo del teorema de la integral de Cauchy.

Por el corolario del Teorema de Cauchy, realizar la integral alrededor de la curva C es equivalente a realizarla alrededor de la curva C_1:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Si el punto z se toma sobre la circunferencia C_1, la resta $z - z_0$ puede escribirse como $z - z_0 = \rho.e^{i\varphi}$ y

$$z = z_0 + \rho.e^{i\varphi}$$

y como ρ y z_0 son constantes, el diferencial es:

$$dz = i.\rho.e^{i\varphi}d\varphi$$

por lo tanto reemplazamos

$$\begin{aligned}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho.e^{i\varphi})}{\rho.e^{i\varphi}} i.\rho.e^{i\varphi}d\varphi \\ &= i.\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho.e^{i\varphi})d\varphi\end{aligned}$$

si ahora se comienza a disminuir el radio de la circunferencia C_1 aplicando límite obtenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \to 0} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= i. \lim_{\rho \to 0} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho . e^{i\varphi}) d\varphi \\
&= i. f(z_0) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i . f(z_0)
\end{aligned}$$

donde se demuestra el teorema:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

que permite, conociendo el valor de la función en el contorno C, hallar el valor de $f(z_0)$ en un punto interior cualquiera.

($\Longleftarrow$)

En la fórmula de la integral de Cauchy, el punto z_0 puede estar en cualquier lugar dentro del recinto R, por lo que puede considerarse una variable. Derivando esta fórmula con respecto a z_0 resulta:

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \\
f''(z_0) &= \frac{1 \cdot 2}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz \\
f'''(z_0) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^4} dz
\end{aligned}$$

y generalizando se obtiene:

$$\boxed{f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz} \tag{4.5}$$

donde ahora conociendo los valores de la función analítica $f(z)$ en el contorno, se pueden conocer las derivadas de *cualquier* orden en un punto z_0 interior arbitrario.

La fórmula de la integral de Cauchy y su generalización son muy útiles para calcular integrales en el campo complejo. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 4.6.1 *Calcule la siguiente integral:*

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z-1)^4}dz \qquad C : |z| = 3$$

Para encarar este tipo de ejercicios debemos recordar que si el integrando es analítico dentro de la curva C, la integral es cero por el Teorema de Cauchy (4.2). En este caso el integrando posee una singularidad en $z_0 = 1$, y por lo tanto no es analítico dentro de C. [2]

Utilizando la generalización de la fórmula de la integral de Cauchy, planteamos para $n = 3$:

$$f'''(z_0) = \frac{3!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^4}dz$$

donde para este ejemplo $z_0 = 1$ y $f(z) = e^{2z}$. Note que $f(z)$ es analítica para todo z. Derivamos $f(z)$ tres veces: $f'''(z) = 8.e^{2z}$. Resolvemos entonces la integral como

$$\begin{aligned} f'''(1) &= \frac{6}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{2z}}{(z-1)^4}dz \\ \oint_C \frac{e^{2z}}{(z-1)^4}dz &= \frac{2\pi i.f'''(1)}{6} = \frac{2\pi i \cdot 8e^2}{6} = \frac{8\pi i.e^2}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.6.2 *Calcule la siguiente integral:*

$$\oint_C \frac{sen(3z)}{(z-1)(z+2)(z-4)}dz \qquad C : |z| = 3$$

En este caso el integrando posee tres singularidades : $z_1 = 1$, $z_2 = -2$ y $z_3 = 4$. La curva C solo encierra a dos de ellas, y aplicando el corolario del Teorema de Cauchy podemos asegurar que:

$$\oint_C \frac{sen(3z)}{(z-1)(z+2)(z-4)}dz = \oint_{C_1} \frac{sen(3z)}{(z-1)(z+2)(z-4)}dz + \oint_{C_2} \frac{sen(3z)}{(z-1)(z+2)(z-4)}dz$$

donde C_1 es una circunferencia que solo posee en su interior a $z_2 = -2$ y C_2 es una circunferencia que en su interior tiene a $z_1 = 1$. Cada una de estas integrales se resuelve utilizando la fórmula de la integral de Cauchy. Veamos cada una por separado (figura 4.10).

Para llevar la primer integral a la forma

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i.f(z_0)$$

[2] Note que la curva C es una circunferencia centrada en el origen y de radio 3. Aclaremos además que si la singularidad está sobre la curva C la integral no posee solución.

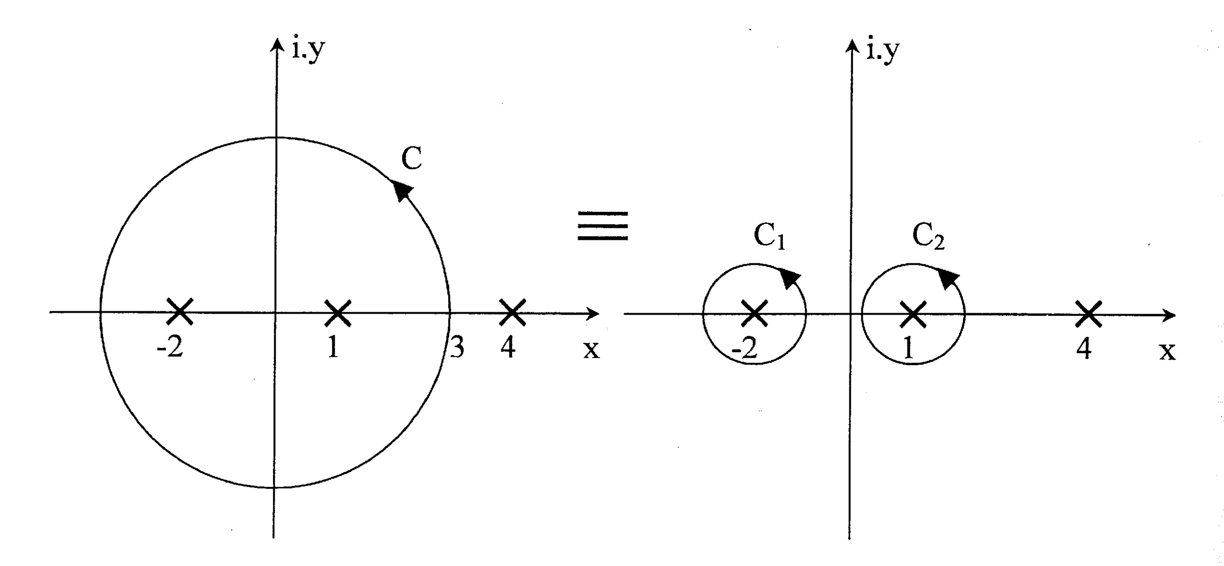


Figura 4.10: Diagrama de polos y ceros.

descomponemos el integrando de la siguiente manera:

$$\oint_{C_1} \frac{sen(3z)}{(z-1)(z+2)(z-4)}dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{sen(3z)}{(z-1)(z-4)}}{(z+2)}dz$$

En el denominador quedó la singularidad, y en el numerador tenemos una función que es analítica para puntos dentro y sobre la curva estudiada. De esta forma

$$f(z) = \frac{sen(3z)}{(z-1)(z-4)}$$

y $z_0 = -2$*, por lo tanto:*

$$f(-2) = \frac{sen(-6)}{(-3)(-6)} = \frac{sen(-6)}{18}$$

y la integral alrededor de C_1 *es*

$$\oint_{C_1} \frac{sen(3z)}{(z-1)(z+2)(z-4)}dz = \frac{2\pi i sen(-6)}{18} = \frac{\pi i sen(-6)}{9}$$

Para la segunda integral hacemos lo mismo:

$$\oint_{C_2} \frac{sen(3z)}{(z-1)(z+2)(z-4)}dz = \oint_{C_2} \frac{\frac{sen(3z)}{(z+2)(z-4)}}{(z-1)}dz$$

pero en este caso $z_0 = 1$ *y la función analítica del numerador es*

$$f(z) = \frac{sen(3z)}{(z+2)(z-4)} \Rightarrow f(1) = \frac{sen(3)}{(3)(-3)} = \frac{sen(3)}{-9}$$

La segunda integral da como resultado

$$\oint_{C_2} \frac{sen(3z)}{(z-1)(z+2)(z-4)}dz = \frac{2\pi i sen(3)}{-9}$$

Sumando ambos resultados obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}\oint_{C} \frac{sen(3z)}{(z-1)(z+2)(z-4)}dz &= \oint_{C_1} \frac{sen(3z)}{(z-1)(z+2)(z-4)}dz + \oint_{C_2} \frac{sen(3z)}{(z-1)(z+2)(z-4)}dz \\ &= \frac{\pi i sen(-6)}{9} + \frac{2\pi i sen(3)}{-9}\end{aligned}$$

Recuerde que las integrales deben dar como resultado un número. El significado del mismo se estudiará en las respectivas aplicaciones.

4.6.1. Corolarios y otros teoremas

Corolario 4.6.1 *Analiticidad de las derivadas: Sea $f(z) = u(x,y) + i.v(x,y)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces para todo z_0 de D se tiene:*

'ue es

1. *$f(z)$ posee derivadas infinitas en un entorno de z_0.*
2. *Las derivadas de $f(z)$ son funciones analíticas y por lo tanto continuas.*
3. *Las componentes u y v de $f(z)$ son infinitamente derivables y todas las derivadas son continuas*

Este corolario es de **suma importancia**, ya que presenta una ventaja asombrosa de las funciones analíticas de variable compleja frente a las funciones de variable real. Basta tomar un contorno C dentro de un recinto analítico para que la fórmula de la integral de Cauchy nos permita hallar el valor de la función en cualquier punto z_0 interior además del valor de las infinitas derivadas en ese punto.

Teorema 4.6.2 *Teorema de Morera: Si $f(z)$ es continua en un dominio D simplemente conexo y si para todo contorno cerrado C en D es nula la integral de $f(z)$ sobre C: $\oint_c f(z)dz = 0$, entonces $f(z)$ es analítica en D. Este Teorema es usualmente denominado el recíproco del Teorema de Cauchy.*

Teorema 4.6.3 *Teorema de Liouville: Si una función es analítica para todo z del plano complejo ampliado, entonces es una constante.*

4.7. Singularidades

Introduciremos en esta sección una nueva forma de clasificar a las singularidades que será empleada a lo largo de todo el texto. Se dice que en un punto $z = z_0$ de una función $\omega = f(z)$ hay una singularidad cuando en él la función no es analítica. Se trata entonces de un punto singular. Hay distintos tipos de singularidades.

1. Singularidades aisladas (SA). Un punto z_0 es una SA de una función $\omega = f(z)$ cuando en todo entorno $E(z_0, \rho)$ no hay ninguna otra singularidad. Si hubiera otra singularidad se dice que es una singularidad *no aislada*. En cambio si ni siquiera z_0 es una singularidad, se dice que z_0 es un punto regular.

2. **POLOS**. Una función $\omega = f(z)$ tiene un **polo** de orden $\underline{n}$ en un punto z_0 cuando

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

y cuando se cumple:

$$\lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^n . f(z)] = A \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

Esto es, multiplicando a $f(z)$ por un polinomio $(z - z_0)^n$ se logra *neutralizar* al polo que es el responsable de hacer tender $f(z)$ a infinito en z_0. Los polos se representan con cruces en el plano complejo. Para hallar el orden n del polo es necesario probar que el límite sea distinto de cero y distinto de infinito, comenzando con $n = 1$. Es evidente que si el límite está dando infinito, es porque el orden propuesto es aún menor al real. Por el otro lado, si el límite es cero, es porque el orden sugerido es mayor al real.

Por ejemplo, la siguiente función

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$$

posee un polo de orden 3 en $z = 2$. Es evidente que cuando $z \to 2$ la función tiende a infinito. Además:

$$\lim_{z \to 2} \left[(z-2)^3 . f(z)\right] = \lim_{z \to 2} \left[(z-2)^3 . \frac{1}{(z-2)^3}\right] = 1$$

que es distinto de cero y distinto de infinito. Hay otros casos donde la determinación del orden del polo no es tan trivial. Veamos por ejemplo la siguiente función:

$$f(z) = \frac{sen(z)}{z^3}$$

En este caso vemos que existe un polo en $z = 0$. Recuerde que puede utilizar la regla de *L'Hopital*:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{sen(z)}{z^3} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}} \lim_{z\to 0} \frac{cos(z)}{3z^2} = \infty$$

Luego para hallar el orden probamos con $n = 2$:

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} \left[(z-0)^2.f(z)\right] &= \lim_{z\to 0} \left[z^2.\frac{sen(z)}{z^3}\right] \\ &= \lim_{z\to 0} \left[\frac{sen(z)}{z}\right] = 1 \end{aligned}$$

que es distinto de cero y distinto de infinito. Esto prueba que $f(z)$ posee un polo de orden 2 en $z = 0$.

Si en un punto z_0, $f(z_0) = 0$, entonces se dice que la función posee un cero en z_0. Los ceros se representan como círculos en el plano complejo y no son estrictamente singularidades ya que la función está perfectamente definida en esos puntos.

Si una función $f(z)$ se puede escribir como $(z - z_0)^n g(z)$ siendo $g(z) \neq 0$, entonces se dice que $f(z)$ tiene un cero de orden n en z_0. En estas condiciones su inversa tiene un polo de orden n en z_0:

$$\lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)^n.\frac{1}{(z-z_0)^n g(z)}\right] = \frac{1}{g(z_0)}$$

3. Puntos de ramificación. Sea por ejemplo $\omega = f(z) = \sqrt{z}$ en polares $z = \rho.e^{i\varphi}$ y $\omega = \sqrt{\rho}.e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{2}}, k = 0, 1$. Esto genera las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} k = 0 &: \omega_1 = \sqrt{\rho}.e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ k = 1 &: \omega_2 = \sqrt{\rho}.e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)} \end{aligned}$$

Si elegimos un valor de ρ constante y realizamos un límite para $\varphi \to 0$ y para $\varphi \to 2\pi$, observamos que

$$\lim_{\varphi\to 0} \omega_1 = \lim_{\varphi\to 0} \sqrt{\rho}.e^{i\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{2} \lim_{\varphi\to 0} cos(\frac{\varphi}{2}) + i.sen(\frac{\varphi}{2}) = \sqrt{\rho}$$

pero

$$\lim_{\varphi\to 2\pi} \omega_1 = \lim_{\varphi\to 2\pi} \sqrt{\rho}.e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)} = \sqrt{2} \lim_{\varphi\to 2\pi} cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right) + i.sen\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right) = -\sqrt{\rho}$$

Esto quiere decir que en el semieje positivo de las x se produce una discontinuidad. Se dice que la función pasa de una rama a otra. Observe la figura 4.11. Lo mismo ocurre con ω_2. Este ángulo φ tiene por vértice al origen, por eso se dice que el origen es un punto de ramificación de esta función.

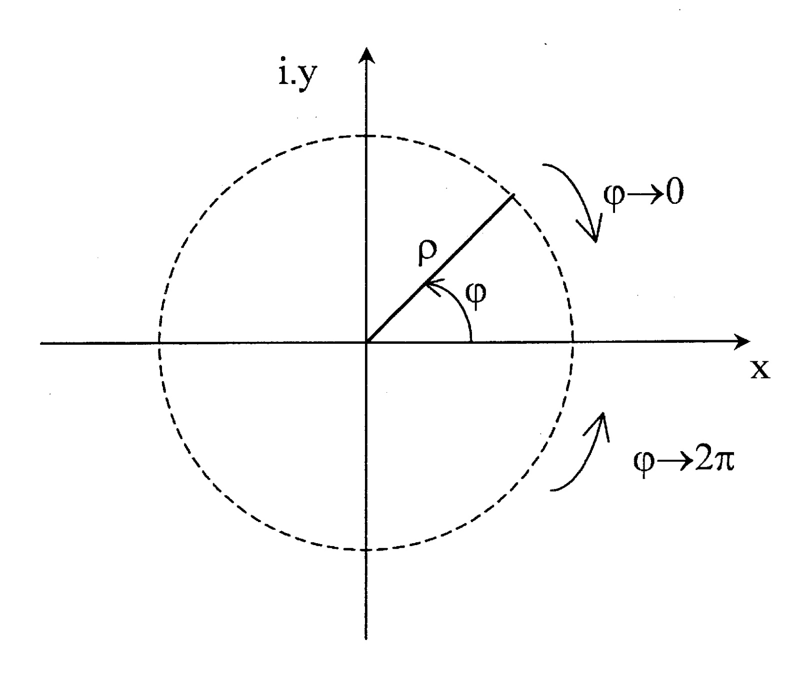


Figura 4.11: Punto de ramificación.

4. Singularidad removible. Una singularidad en z_0 es removible de $\omega = f(z)$ cuando $f(z_0) = \infty$ y existe

$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

Esto implica que en el punto la función puede no existir, pero si existe el límite se redefine la función en el punto y se remueve la singularidad.

5. Singularidad esencial (SE). Una función $\omega = f(z)$ uniforme tiene una SE en z_0 cuando en el punto la singularidad no es polo ni removible. Estas singularidades se detectan cuando al intentar encontrar el orden n del polo este tiende a infinito, esto implica que ningún polinomio del tipo $(z - z_0)^n$ puede *contrarrestar* a la singularidad.

4.8. Teorema del argumento

Si una función $f(z)$ es analítica sobre una curva simplemente cerrada C y en todo su recinto interior R a excepción del punto $z = z_1$ en el que hay un polo de orden de multiplicidad p, y del punto $z = z_2$ en el que hay un cero de orden de multiplicidad n, se cumple:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - p} \qquad (4.6)$$

Demostración:

$(\Longrightarrow)$
Dibujamos el plano complejo en la figura 4.12

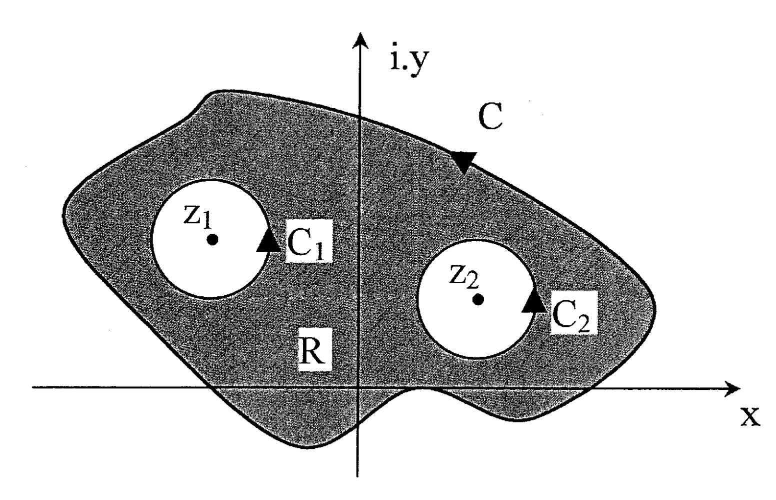


Figura 4.12: Teorema del argumento.

Con centros en z_1 y z_2 se trazan dos circunferencias C_1, C_2 incluidas en la región R. Por el corolario del Teorema de Cauchy escribimos:

$$\oint\limits_{C} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint\limits_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \oint\limits_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

donde en la integral de la izquierda el punto z recorre la curva C, mientras que en cada una de las integrales de la derecha, el punto z recorre las respectivas circunferencias. Por tratarse de un polo de orden p, puede escribirse:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_1)^p}$$

donde $g(z)$ es analítica en z_1. Tomando logaritmo

$$ln\,[f(z)] = ln\,[g(z)] - p.ln\,[z - z_1]$$

y derivando

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{p}{z - z_1}$$

integrando sobre C_1

$$\oint\limits_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \underbrace{\oint\limits_{C_1} \frac{g'(z)}{g(z)} dz}_{=0} - p \underbrace{\oint\limits_{C_1} \frac{1}{z - z_1} dz}_{2\pi i}$$

donde la primer integral a la derecha vale cero por el Teorema de Cauchy, y la segunda vale $2\pi i$. De esta forma

$$\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -p2\pi i$$

Siguiendo un método análogo para el cero resulta

$$f(z) = (z - z_2)^n h(z)$$

aplicando logaritmo

$$ln\left[f(z)\right] = ln\left[h(z)\right] + n.ln\left[z - z_2\right]$$

derivando

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)} + \frac{n}{z - z_2}$$

entonces

$$\oint_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \underbrace{\oint_{C_2} \frac{h'(z)}{h(z)} dz}_{=0} + n.\underbrace{\oint_{C_2} \frac{1}{z - z_2} dz}_{2\pi i}$$

$$\oint_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n2\pi i$$

por lo tanto demostramos que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - p$$

($\Longleftarrow$)
Veamos un ejemplo:

Ejemplo 4.8.1 *Sea la siguiente función:*

$$f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{(z^2+2z+2)^3}$$

hallar el valor de

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \qquad C : |z| = 4$$

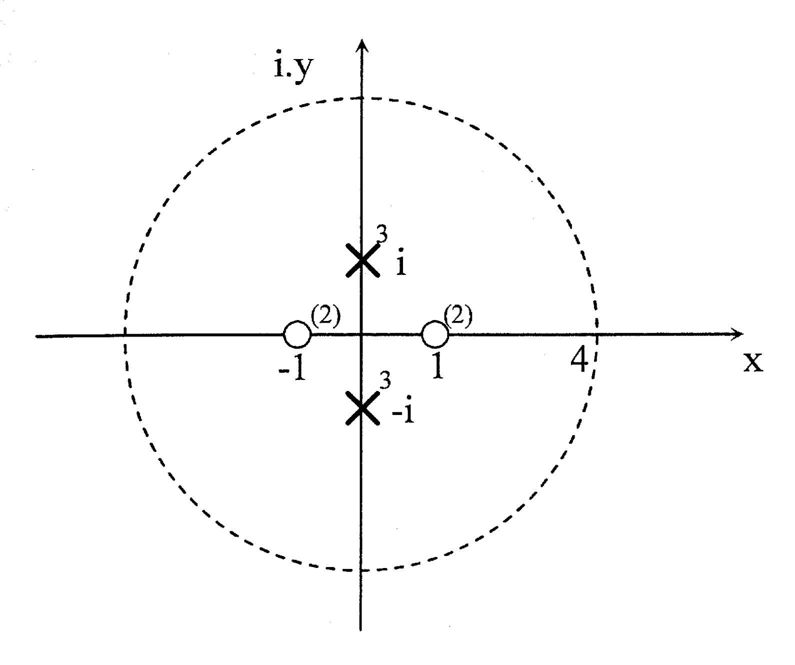


Figura 4.13: Diagrama de polos y ceros.

Los ceros se encuentran en $z_1 = i$ *y* $z_2 = -i$ *y son de orden 2. Los polos están en* $p_1 = -1+i$ *y* $p_2 = -1-i$ *y son de orden 3. El diagrama de polos y ceros es el graficado en la figura 4.13.*

Como la curva C abarca a todos los polos y a todos los ceros, aplicando el Teorema del Argumento obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n - p = 4 - 6 = -2$$

4.9. Resumen del capítulo

El capítulo se centró en la integración en el campo complejo. El principal teorema es el de Cauchy, que establece que si una función es analítica en un recinto simplemente conexo, cualquier integral (sentido antihorario) sobre una curva incluida en ese recinto es igual a cero. El corolario del Teorema de Cauchy permite convertir regiones múltiplemente conexas en regiones conexas para aplicar el teorema. De allí derivamos la fórmula de la integral de Cauchy. Esta última es una herramienta importante para resolver un gran número de integrales sin realizar las sustituciones que las integrales de línea requieren habitualmente.

Clasificamos las singularidades definiendo polos, ceros, singularidades evitables y singularidades esenciales. Encontramos una característica muy sobresaliente de las funciones analíticas: las funciones analíticas poseen derivadas de orden infinito en todo punto. Esto último se aprovechará en la deducción de los desarrollos en serie de las funciones analíticas,

ya que no será necesario probar que el término complementario tienda a cero. Abordaremos este tema en el próximo capítulo.

4.10. Problemas propuestos

1. Calcule $\int\limits_C (z-2)^{-1}dz$ con $C : |z-2| = 3$ en sentido antihorario.

   Rta: $i2\pi$

2. Calcule $\int\limits_C Im\{z\}dz$ con $C : |z| = r$ en sentido horario.

   Rta: πr^2

3. Calcule $\int\limits_C f(z)dz$ para los siguientes casos:

   a) $f(z) = 4z - 3$ donde C es el segmento que va desde i hasta $1+i$.

   Rta: $-1 + i,4$.

   b) $f(z) = z^{-5} + z^3$ donde C es el arco inferior del círculo unitario de 1 a -1.

   Rta: 0

   c) $f(z) = e^z$ donde C es el segmento que va desde i hasta $1 + i\pi/2$.

   Rta: $-cos(1) + i\,[e - sen(1)]$

   d) $f(z) = sen(z)$ donde C es el segmento que va desde 0 hasta i.

   Rta: $1 - cosh(1)$

4. Hallar el valor numérico de la siguiente integral:

$$\int_{3i}^{2+4i} (2y + x^2)dx + (3x - y)dy$$

   a lo largo de

   a) La parábola $x = 2t$, $y = t^2 + 3$.

   b) Una recta desde $3i$ hacia $2 + 3i$ y luego desde $2 + 3i$ hasta $2 + 4i$.

   c) Una recta directa desde $3i$ hacia $2 + 4i$.

5. Calcule las siguientes integrales definidas:

   a) $\int\limits_0^{i\pi} e^z dz$. Rta: -2

   b) $\int\limits_{-\pi i}^{3i\pi} e^{2z} dz$.

   c) $\int\limits_{-\pi i}^{i\pi} sen^2(z)dz$. Rta: $i\pi - i.senh(2\pi)/2$

d) $\int\limits_{1+i}^{1} z^3 e^{z^4} dz.$

e) $\int\limits_{0}^{i} senh(\pi z) dz.$

f) $\int\limits_{0}^{i} (z^2 + z^3) dz.$

6. Calcular las siguientes integrales

a)

$$\oint_C \frac{3.z}{(z+1)(z-2)} dz \qquad C : |z| = 3$$

Rta: 3

b)

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} dz \qquad C : |z+1| = 2$$

Rta: $2.e^{-2}$

c)

$$\oint_C \frac{sen(3z)}{(z^2)} dz \qquad C : |z| = 1$$

Rta: $\frac{3}{2}$

d)

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz \qquad C : |z| = 1$$

Rta: $-i\pi$

e)

$$\oint_C \frac{(z^2+1)}{(z+1)^2(z^2-4)} dz \qquad C : |z| = 5$$

Rta: 0

f)

$$\oint_C \frac{z}{(z^2+1)^2}dz \qquad C: |z| = 2$$

Rta: 0

g)

$$\oint_C \frac{z^3+z-1}{z^2(z^2-3z+2)}dz \qquad C: |z| = 3$$

Rta: $i.\pi$

h)

$$\oint_C e^z cos(z) dz \qquad C: |z| = 1$$

i)

$$\oint_C \frac{e^z-1}{z^3}dz \qquad C: |z| = 1$$

j)

$$\oint_C \frac{e^z-z-1}{z^2}dz \qquad C: |z| = 1$$

k)

$$\oint_C z^2.e^{2z}.cos(3z)dz \qquad C: |z| = 2$$

l)

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z^3+1)(z-1)^2}dz \qquad C: |z| = 2$$

m)

$$\oint_C \frac{(z+i)}{(z^2+1)(z^2-1)}dz \qquad C: |z| = 3$$

7. Resolver para cada una de las cuatro curvas

$$\oint_C \frac{z^2-1}{z^2+1}dz \qquad C_1 : |z+i| = 1 \qquad C_2 : |z| = \frac{1}{2} \qquad C_3 : |z-i| = 1 \qquad C_4 : |z-2i| = 2$$

8. Si C es la curva $y = x^3 - ex^2 + 4x - 1$ que une los puntos $1+i$ y $2+3i$, hallar $\int_C (12z^2 - 4iz)dz$.

9. Clasifique las singularidades de las siguientes funciones y dibuje el diagrama de polos y ceros:

a) $f(z) = \frac{(z-1)}{z^2+z-2}$. Rta: Polo en $z = -2$. Singularidad evitable en $z = 1$.

b) $f(z) = \frac{1}{z^5+1}$. Rta: polos en $z = 0{,}81 \pm i0{,}59$, $z = -0{,}31 \pm i0{,}95$, $z = -1$.

c) $f(z) = \frac{1}{senh(z)}$.. Rta: polos en $z = i.k.\pi$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

d) $f(z) = \frac{z}{cos^2(z)}$. Rtas: polos dobles en $z = (2k+1)\pi/2$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Cero en $z = 0$.

e) $f(z) = \frac{z}{cos(2z)-1}$. Rta: polos en $z = 0$ y $z = k.\pi$ con $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

f) $f(z) = \frac{z^2}{sen(2z)(z^2+z-i)}$. Rta: polos en $z = k\pi/2$ con $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, $z = -1{,}3 - i0{,}62$, $z = 0{,}3 + i0{,}62$. Singularidad evitable en $z = 0$.

g) $f(z) = \frac{1}{e^z(z^2+z+5)}$. Rta: polos en $z = -0{,}5 \pm 2{,}18$

h) $f(z) = \frac{1-e^z}{z^2}$. Rta: polo simple en $z = 0$.

i) $f(z) = \frac{z}{1-cos(2z)}$. Rta: polo simple en $z = 0$ y dobles en $z = k\pi$ con $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

j) $f(z) = \frac{sen(z^2)}{z^3}$. Rta: polo simple en $z = 0$.

k) $f(z) = \frac{1}{sen(1/z)}$. Rta: polos en $z = 1/k\pi$ con $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Singularidad esencial en $z = 0$.

2i| = 2

allar

polos

, ...

z =

k =

dad

Aplicación en MatLab

```
%INTEGRALES EN EL CAMPO COMPLEJO
%La integración compleja sobre una curva especifica puede efectuarse
%dividiendo la misma en una serie de arcos parciales (incrementos
%diferenciales) de manera de poder evaluar la función sobre cada uno de
%ellos y posteriormente efectuar la sumatoria de los mismos (ciclo
%"FOR"):

%CASO 1: Integración sobre un segmento - Función analítica en Z
%FUNCION A INTEGRAR: (sen(z))^2 en C: (0,-i*pi);(0,i*pi)

%Curva de integración
x=0;
y=-pi:0.001:pi;
C=complex(x,y);

%Ciclo de Integración por definición
Int_Z=0;
for k=1:2:length(C)-2
   %Diferencial
   dz=C(k+2)-C(k);
   %Valor de Z actual
   z=C(k+1);
   %Sumatoria del incremento
   Int_Z=Int_Z+(sin(z)^2)*dz;
end
%Resultado de la integración
Int_Z

%CASO 2: Integración sobre una curva cerrada - Función con singularidades
%FUNCION A INTEGRAR: 1/(z^3+1) en C: mod(z+1)=1/4

%Curva de integración Jordan
%Diferencial angular
phi=0:0.001:2*pi-0.001;
%Circ. radio 1/4 centro (-1,0)
ro=1/4;
centro=-1;
C=complex(ro*cos(phi),ro*sin(phi))+centro;
%Singularidades de la función
S=roots([1 0 0 1]);
%Pasa a la clase compleja alguna posible raíz real
S=complex(real(S),imag(S))

%Visualización del plano z
plot(C),hold on;
plot(S,'rx'),xlabel('x'),ylabel('jy'),grid
title('Integración en el plano Z');
axis([-2 1 -1.5 1.5]);

%Ciclo de Integración por definición
Int_Z=0;
for k=1:2:length(C)-2
   %Diferencial (sentido antihorario)
   dz=C(k+2)-C(k);
   %Valor de Z actual
   z=C(k+1);
   %Sumatoria del incremento
   Int_Z=Int_Z+(1/(z^3+1))*dz;
end
%Resultado de la integración
Int_Z
```

```
%POLOS Y CEROS DE FUNCIONES RACIONALES
%Para calcular las singularidades de funciones racionales pueden utilizarse
%(además de la función "roots", analizada previamente) las funciones "zero"
%(ceros de una función racional) y "pole" (polos de una función racional).
%Es necesario para su operación, que la función racional (cociente de
%polinomios) esté definida como función transferencia (función "tf"). La
%función "pzmap" genera el diagrama de polos y ceros a partir de esta
%última:

%Coeficientes del polinomio del numerador (completo) Num(z)=z^2+1
Num=[1 0 1];
%Coeficientes del polinomio del denominador (completo) Den(z)=z^3+3z^2+3z+1
Den=[1 3 3 1];
%Función transferencia
H=tf(Num,Den)
%Ceros
zero(H)
%Polos
pole(H)

%Visualización del diagrama de polos y ceros
pzmap(H)
```

Capítulo 5

Series de Laurent

5.1. Introducción

Todos los capítulos de variable compleja forman un marco conceptual orientado a brindar las herramientas para comprender el desarrollo en serie de una función analítica. En el campo real la descomposición en serie de una función $f(z)$ tiene implicancias desde el punto de vista teórico y práctico. Por ejemplo, una calculadora brinda el valor del seno de un número desarrollando la serie de Taylor en un punto y aproximando el resultado. A medida que más términos de la serie calcula, más parecida es la aproximación de la serie con el valor real de la función. En el campo complejo pasa algo muy similar, aunque se presentan ventajas con respecto al campo real. Como una función analítica posee derivadas de cualquier orden en cualquier punto, el término complementario de la serie siempre tiende a cero. Además, veremos que una función puede desarrollarse no solo en una serie de potencias positivas de z, sino además (con otra región de convergencia), en potencias negativas de z. Al final del capítulo introduciremos el concepto de **residuo** que nos permitirá resolver integrales utilizando un método práctico.

5.2. Sucesiones y series en general

Se denomina sucesión a un conjunto de números complejos sujetos a reglas de cálculo determinadas y constituyendo, cada uno de ellos, un término de la sucesión. Por ejemplo

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

Al un término u_n se lo denomina término general.

Se llama límite de la sucesión a un número complejo l tal que $|u_n - l| < \varepsilon$ desde un cierto valor N de n $(n \geq N)$ y siendo ε un número real arbitrariamente pequeño. Esto quiere decir que a partir de un $n \geq N$, todos los términos de la sucesión verifican $|u_n - l| < \varepsilon$.

Cuando una sucesión tiene límite se la denomina *convergente*. En caso contrario *divergente*.

Haremos ahora las siguientes designaciones:

$$\begin{aligned}
S_0 &= u_0 \\
S_1 &= u_0 + u_1 \\
S_2 &= u_0 + u_1 + u_2 \\
\ldots &= \ldots \\
S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

Al término S_n se lo denomina *suma enésima.* Podemos entonces ahora formar la sucesión : $S_0, S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$. El límite de esta nueva sucesión será l si cumple la condición $|S_n - l| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. También se puede escribir como

$$\lim_{n \to \infty} S_n = l$$

Teniendo en cuenta la formación de los términos de esta última sucesión, escribimos

$$\lim_{n \to \infty} (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = l$$

A la suma del primer miembro se la denomina **serie**. La suma de esa serie es el límite l, si este existe, en cuyo caso se dice que la serie es convergente.

Las propiedades de las sucesiones y las series de funciones de variable compleja son análogas a sus similares en el campo real.

Así como formamos una sucesión de números complejos podemos realizar una sucesión de funciones de variable compleja, donde cada término de la sucesión es una función. Un término general es de la forma $u_n(z)$. Además podemos conformar la *suma* S_n y realizar la serie infinita:

$$u_0(z) + u_1(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$$

Esta es la sucesión $S_n(z)$ cuando $n \to \infty$. Una condición necesaria para que esta serie converja es que

$$\lim_{n \to \infty} u_n(z) = 0$$

o sea que el término general tienda a cero cuando $n \to \infty$. Esta es una condición necesaria pero no suficiente. Como el término $u_n(z)$ es complejo, tanto su parte real y su parte imaginaria deben tender a cero cuando $n \to \infty$.

Como los término $u_n(z)$ son funciones, sus valores dependen del punto z donde se los calcule. Al conjunto de puntos z para los cuales la serie sea convergente se los denomina **Región de convergencia** o con las iniciales inglesas ROC *(region of convergence).*

Esto se puede observar gráficamente de la siguiente forma. Imagine que se tiene una serie con términos $u_n(z)$ con una región de convergencia (ROC) tal que $|z| < 1$. A la convergencia de esa sucesión la denominamos $f(z)$. O sea

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = f(z)$$

Si ahora se elige un punto z_0 dentro del radio de convergencia, entonces $f(z_0)$ puede ser aproximado por los términos de la serie como se muestra graficamente en la figura 5.1

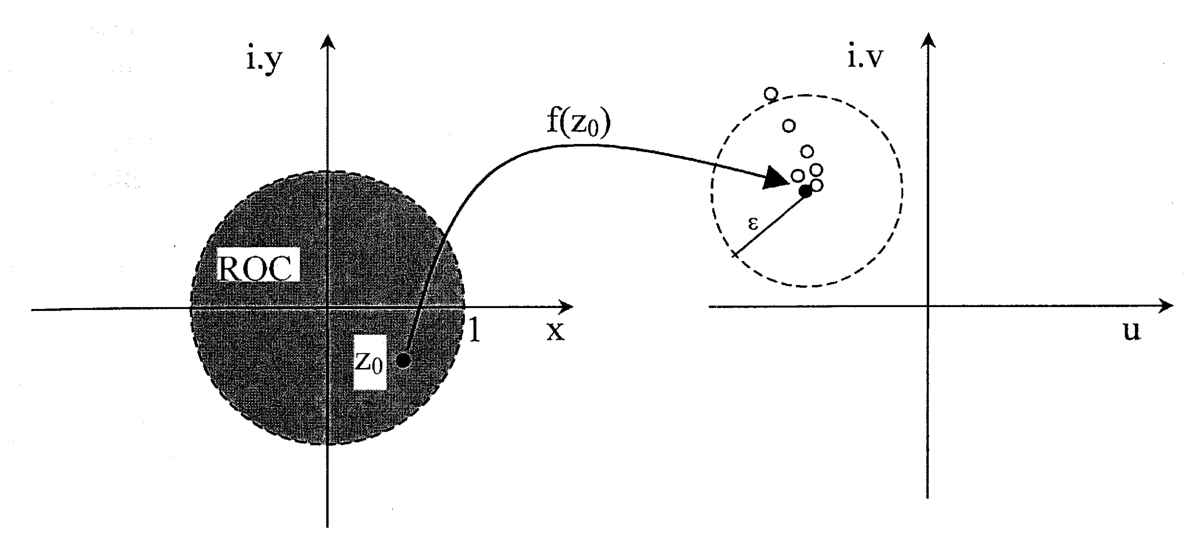


Figura 5.1: Aproximación de una función mediante una serie.

Note cómo a medida que se toman más términos de la serie, los puntos en la imagen se acercan al verdadero valor de $f(z_0)$. Si en el dominio el z_0 estuviera fuera de la región de convergencia, los puntos en la imagen se alejarían del verdadero valor.

5.2.1. La serie geométrica

Esta serie es una de las más empleadas. Tomemos la siguiente sucesión de funciones:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \dots$$

Su suma enésima es

$$S_n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k$$

Podemos hallar a qué valor converge la suma enésima multiplicando por z y restando:

$$z.S_n = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n+1}$$

$$S_n - z.S_n = S_n(1-z) = 1 - z^{n+1} \qquad \Longrightarrow \qquad S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \qquad \forall z$$

Por ejemplo si $z = 2$ y $n = 12$, entonces

$$S_{12} = \sum_{k=0}^{12} 2^n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{12} = \frac{1-2^{13}}{1-2}$$

De esta forma conformamos la serie geométrica como:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1-z^N}{1-z} \qquad \forall z} \tag{5.1}$$

donde se hicieron algunos cambios en la nomenclatura para facilitar futuras aplicaciones.

Veamos ahora qué sucede si $N \to \infty$:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-z} - \lim_{N\to\infty} \frac{z^N}{1-z}$$

el segundo límite de la derecha tiende a cero si $|z| < 1$ y por lo tanto podemos decir que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \Leftrightarrow |z| < 1} \tag{5.2}$$

que también podemos escribir como

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{1}{1-z} \qquad |z| < 1$$

Note que imponer que la convergencia existe solo para $|z| < 1$ es determinar la región de convergencia de la serie; esto es, solo para valores de z para los cuales $|z| < 1$ la serie es convergente a $1/(1-z)$.

5.3. Convergencia de series

Una serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ es absolutamente convergente si la serie de los módulos $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(z)|$ converge. Si una serie es absolutamente convergente, entonces la serie con los términos *sin el módulo* también lo es. Al aplicar el módulo del término general, se está calculando la raíz cuadrada del cuadrado de la parte real más el cuadrado de la parte imaginaria. Es evidente que en una serie absolutamente convergente, tanto la parte real como la imaginaria del $u_n(z)$ son convergentes. Todo esto siempre dentro de la ROC.

5.3.1. Criterios de convergencia

Teorema 5.3.1 *Una serie de término general $u_n(z)$ converge si y solo si su parte real y su parte imaginaria convergen. Como ambas son funciones reales, todos los criterios de convergencia para series en el campo real pueden ser extendidas al campo complejo.*

Como ya mencionamos un criterio necesario de convergencia es que el término $u_n(z)$ tienda a cero a medida que $n \to \infty$. Otros criterios que se pueden aplicar para estudiar la convergencia de la serie $\sum u_n$ son los siguientes:

1. Prueba de comparación. Si $\sum |v_n|$ converge y $|u_n| \leq |v_n|$, entonces $\sum u_n$ converge absolutamente. Si $\sum |v_n|$ diverge y $|u_n| \geq |v_n|$, entonces $\sum u_n$ diverge.

2. Criterio del cociente. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L$ entonces $\sum u_n$ converge absolutamente si $L < 1$ y diverge si $L > 1$. Si $L = 1$ la prueba no determina la convergencia.

3. Criterio de la raíz. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$, entonces $\sum u_n$ converge absolutamente si $L < 1$ y diverge si $L > 1$. Si $L = 1$ la prueba no determina la convergencia.

4. Criterio de la integral. Si $f(x) \geq 0$ para $x \geq a$, entonces $\sum f(n)$ converge o diverge si $\lim\limits_{M\to\infty} \int\limits_a^M f(x)dx$ converge o diverge. En este caso se utilizó $f(x)$ como una función n real ya que se puede aplicar a la parte real y a la parte imaginaria del término $u_n(z)$ por separado.

5. Criterio de Raabe. Si $\lim\limits_{n\to\infty} n.\left(1 - \frac{|u_{n+1}|}{u_n}\right) = L$, entonces $\sum u_n$ converge absolutamente si $L > 1$ y diverge condicionalmente si $L < 1$. Si $L = 1$ la prueba no determina la convergencia.

6. Criterio para la serie alternada. Si $u_n \geq 0$ y $u_{n+1} \leq u_n$ para un $n > N$, y $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, entonces la serie alternada $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Teorema 5.3.2 *Teorema sobre convergencia uniforme. Si $|u_n(z)| \leq M_n$, donde M_n es independiente de z en una región R y $\sum M_n$ converge, entonces $\sum u_n(z)$ es uniformemente convergente en R. Además, una serie de funciones $u_n(z)$ continuas uniformemente convergente se puede integrar miembro a miembro:*

$$\int\limits_C \left[\sum u_n(z)\right] dz = \sum \left[\int\limits_C u_n(z)dz\right]$$

Teorema 5.3.3 *Si las funciones $u_n(z)$ son analíticas en R y la serie $\sum u_n(z)$ es uniformemente convergente, entonces la función convergente $f(z) = \sum u_n(z)$ es analítica en R.*

5.4. Series de Potencias

Una serie de potencias está descripta por la siguiente ecuación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

donde z es la variables, los a_n son constantes o coeficientes y z_0 es el denominado *centro de la serie.* Ya hemos analizado una serie de este estilo: la serie geométrica (5.1). Para la misma los coeficientes eran $a_n = 1$ y el centro era $z_0 = 0$. Como ya vimos las series de potencias son convergentes para determinados valores de z y para otros no. Cuando se encuentra la convergencia de la serie normalmente la misma converge a una función $f(z)$. Los desarrollos en serie son unívocos a sus funciones de convergencias y viceversa. Los criterios de convergencia analizados pueden ser útiles para hallar la región de convergencia.

Teorema 5.4.1 *La región de convergencia de una serie de potencias está delimitada por una circunferencia: ROC :* $|z-z_0| < R$*. Una serie de potencias converge uniforme y absolutamente en cualquier región contenida dentro del interior de su círculo de convergencia.*

Teorema 5.4.2 *Una serie de potencias se puede derivar e integrar término a término dentro de su círculo de convergencia.*

5.5. Series de Taylor

El objetivo de esta sección es mostrar que las series de potencias convergen en funciones analíticas. Esto también se da a la inversa: una función analítica puede ser descompuesta en una serie de potencias. Esta relación entre la serie y la función es uno a uno. Cada función posee un único desarrollo en serie y viceversa, siempre y cuando el centro del desarrollo z_0 y la región de convergencia sean los mismos.

La Serie de Taylor en el campo real se extiende en el campo complejo y conforma una herramienta básica para hallar el desarrollo en serie de potencias de una función de variable compleja. **El objetivo es: dada una función $f(z)$ y un centro de desarrollo z_0, hallar las series de potencias que la represente y las regiones de convergencia para la cual cada desarrollo sea válido.**

Considere una función $f(z)$ que es analítica en una vecindad de un punto $z = z_0$. Sea C un círculo que se encuentra en esa vecindad y tiene centro z_0. Entonces podemos aplicar la fórmula de la integral de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

donde se cambiaron las variables según la figura 5.2. Note que el punto arbitrario z_0 es ahora z, y se recorre la curva con ω .[1]

[1]Recuerde que la integral de Cauchy permite hallar el valor de una función analítica para cualquier punto dentro de la curva de integración C.

Figura 5.2: Diagrama para el planteo del Teorema de Taylor.

Utilizando el desarrollo de la serie geométrica de razón q:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad |q| < 1$$

podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega - z} &= \frac{1}{\omega - z + z_0 - z_0} = \frac{1}{(\omega - z_0)\left(1 - \underbrace{\frac{(z-z_0)}{\omega - z_0}}_{q}\right)} \\ &= \frac{1}{(\omega - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\omega - z_0}\right)^n \qquad \left|\frac{(z-z_0)}{\omega - z_0}\right| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} \qquad |z - z_0| < |\omega - z_0| \end{aligned}$$

La serie es válida solo para los puntos que cumplan $|z - z_0| < |\omega - z_0|$. El $|z - z_0|$ es el módulo de un vector que va desde z_0 hasta z. El $|\omega - z_0|$ es el módulo de un vector que va desde z_0 hasta ω que está sobre la circunferencia C. Es así que la serie es convergente **solo para los puntos z interiores a la circunferencia C.**

Una vez expandido el término $1/(\omega - z)$ en serie de potencias, integremos miembro a miembro:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\omega)}{\omega - z}d\omega = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \left[f(\omega).\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}}\right]d\omega$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}}d\omega}_{a_n}\right](z-z_0)^n$$

y finalmente tenemos la expresión del desarrollo en serie de Taylor de una función $f(z)$:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad |z-z_0| < R \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}}d\omega} \tag{5.3}$$

Podemos decir entonces que una función analítica $f(z)$ puede ser desarrollada en serie de potencias positivas ($n \geq 0$) con centro z_0 para una región de convergencia circular **centrada en** z_0, donde los coeficientes de la serie se calculan con la siguiente integral:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}}d\omega$$

Si recordamos la generalización de la fórmula de la integral de Cauchy (4.5):

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

podemos deducir que los coeficientes de la Serie de Taylor son

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}}d\omega = \frac{f^n(z_0)}{n!}} \tag{5.4}$$

que coinciden con el desarrollo de Taylor de variables reales.

Para poder realizar el desarrollo es necesario que el círculo C sea analítico. De esta forma el radio R queda determinado por la posición de las singularidades con respecto al centro de desarrollo z_0. Esto es, la región de convergencia de la serie de Taylor será, un círculo centrado en el centro de desarrollo z_0, y cuyo radio R está determinado por la singularidad más cercana a z_0. Veamos por ejemplo el caso de la serie geométrica:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots \qquad |z| < 1$$

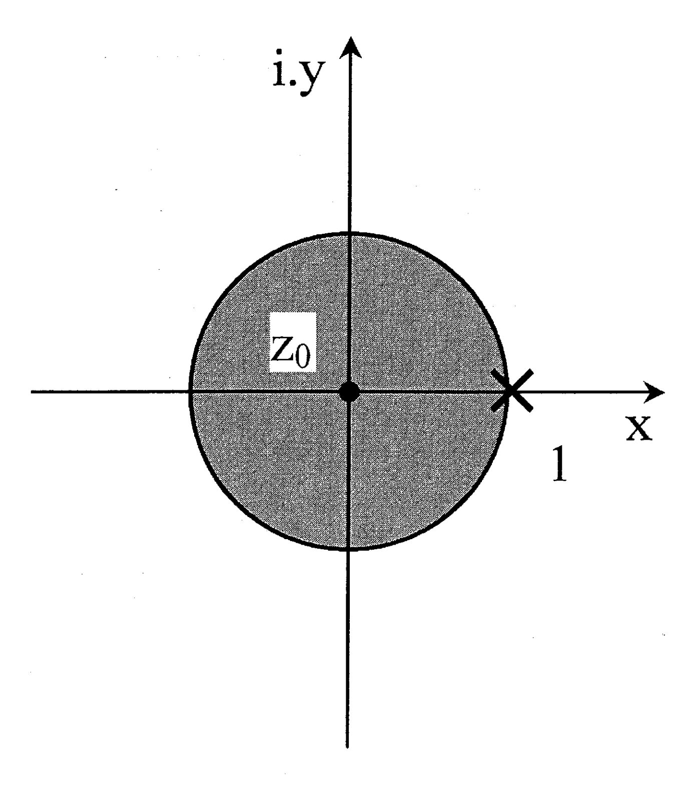


Figura 5.3: Región de convergencia de la expansión en serie de Taylor de $f(z) = 1/(1-z)$.

donde el centro de desarrollo es $z_0 = 0$ y el único polo está ubicado en $p_1 = 1$. El diagrama se polos y ceros se grafica en la figura 5.3.

Los coeficientes de la serie pueden ser hallados utilizando las integrales de la ecuación 5.3, las derivadas 5.4 o por cualquier método empírico como el de la serie geométrica. En todos los casos, y debido a que a cada función en un punto le corresponde un único desarrollo, todos los resultados deben ser congruentes. Observando la ROC en el diagrama de polos y ceros podemos asegurar que la serie de Taylor de $f(z)$ será convergente solo para los puntos que se encuentren dentro de la circunferencia unitaria: $|z| < 1$ (región cercana). Esto implica que si se elige un punto fuera de ella, por ejemplo $z = 2 + i$, la serie descripta no será convergente.

Pero veamos qué sucede si reescribimos a la función $f(z)$ de la siguiente forma:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{-z.(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{-z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots \qquad |\frac{1}{z}| < 1 \Rightarrow |z| > 1$$

La misma función $f(z)$ posee ahora un desarrollo en serie pero en potencias **negativas** de z. Esta serie no es la serie de Taylor. Note que su región de convergencia es *hacia afuera* del centro de desarrollo $z_0 = 0$ (región lejana). Dibujemos entonces la nueva ROC en la figura 5.4. Avanzaremos en la próxima sección con este tipo de desarrollos.

Una propiedad sorprendente de las funciones analíticas es que para todas existe un desarrollo de Taylor convergente. Este desarrollo está centrado en un punto z_0, lo que genera una serie de potencias de $(z - z_0)^n$ con n positivo. La ROC siempre es un círculo

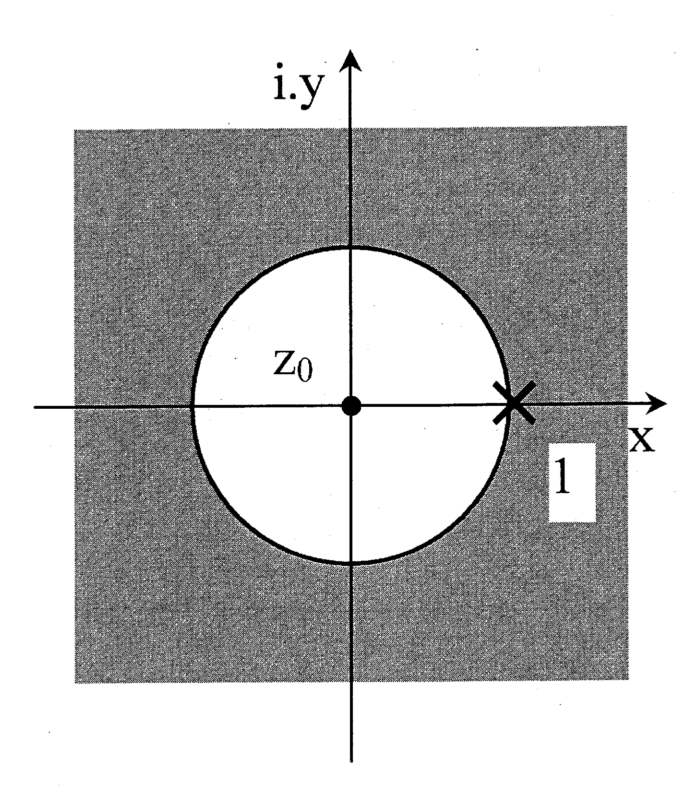


Figura 5.4: ROC para una serie de potencias negativas.

centrado en z_0: $|z - z_0| < R$. el valor de R está determinado por la singularidad más cercana a z_0. Sin embargo vimos que existe otra serie, de potencias negativas y con una región de convergencia diferente (hacia afuera) que aún no estudiamos. Esa es la denominada *Serie de Laurent* que veremos en la próxima sección.

5.5.1. Teorema de Taylor

Enunciamos formalmente el teorema:

Teorema 5.5.1 *Teorema de Taylor. Sea $f(z)$ analítica dentro y sobre una curva cerrada simple (sin cruces) C. Sea z_0 un punto dentro de C. Entonces existe una serie de potencias con centro en z_0 que representa a $f(z)$ de la forma:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega$$

Esta representación es válida en el disco abierto más grande con centro en z_0 dentro de C.

5.5.2. Series de Taylor de funciones elementales

A continuación presentamos el desarrollo de algunas funciones elementales para $z_0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
sen(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ln(z+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{z^n}{n} \\
senh(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
cosh(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
tan^{-1} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{-1}}{2n+1} z^{2n+1} \\
\frac{1}{(z+1)^m} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} z^n
\end{aligned}
$$

5.6. Series de Laurent

Como ya vimos en un ejemplo, las funciones de variable compleja aceptan desarrollos en serie que no son convergentes para todo punto del plano. Cada desarrollo posee una ROC asociada. Esto significa que al desarrollar una función $f(z)$ en serie es necesario, no solo conocer el centro del desarrollo z_0 para armar las potencias $(z - z_0)^n$, sino además la región de convergencia *ROC* en la cual será válido el desarrollo. Las serie de Taylor permiten expandir, en serie de potencias positivas, a una $f(z)$ pero solo para puntos *cercanos* al centro de desarrollo z_0. Esa *cercanía* está impuesta por el Teorema de Taylor, ya que requiere que la función sea analítica en el entorno de desarrollo (dentro y sobre la curva C de integración). Si ahora se desea desarrollar una función en series de potencias, con centro z_0, para que sea convergente en un punto z en el cual una singularidad se interpone con z_0 es necesario presentar un nuevo desarrollo.[2]

[2] Imagine que se desea el desarrollo en serie de potencias para $f(z) = 1/(1-z)$ con $z_0 = 0$ pero que sea convergente para $z = 2 + i$. Esto está fuera de la ROC de la serie de Taylor.

5.6.1. Teorema de Laurent

Utilizaremos este teorema para desarrollar en serie de potencias una función $f(z)$ en torno a $z = z_0$, pero para el cual pondremos como condición que $f(z)$ sea analítica en una corona circular, como muestra la siguiente figura:

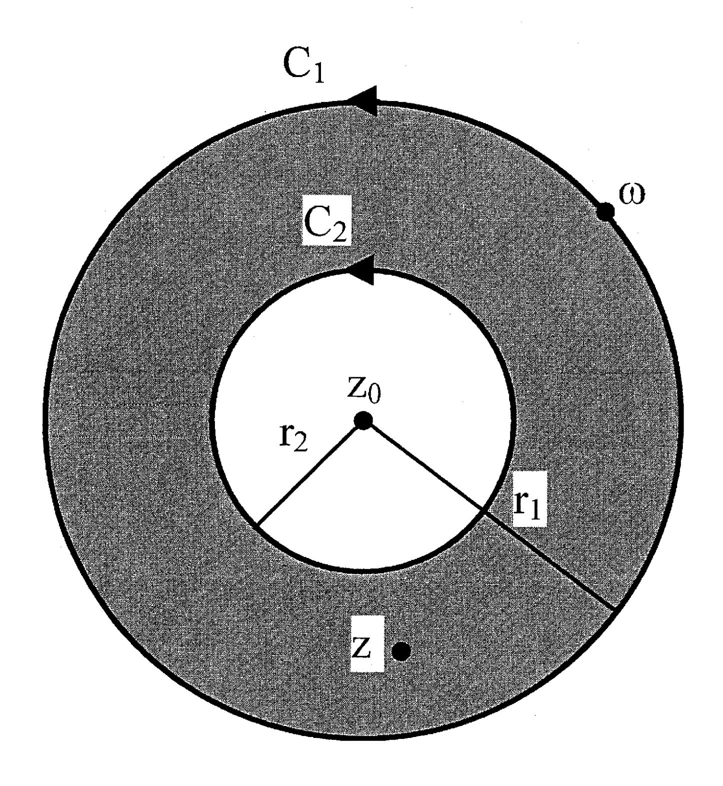


Figura 5.5: Anillo circular analítico.

Teorema 5.6.1 *Si $f(z)$ es analítica sobre las circunferencias $C_1(r_1)$ y $C_2(r_2)$, con $r_1 > r_2$, concéntrica en z_0 y en toda la corona limitada por ellas, y z es un punto de esa corona, podemos descomponer a $f(z)$ es una serie de potencias de la siguiente forma:*

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.(z-z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} b_n.(z-z_0)^n} \tag{5.5}$$

donde los coeficientes a_n y b_n son

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}}d\omega \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\omega)(\omega-z_0)^n d\omega} \tag{5.6}$$

El camino de integración C debe ser una curva simplemente cerrada del interior de la corona y que encierre a la circunferencia menor.

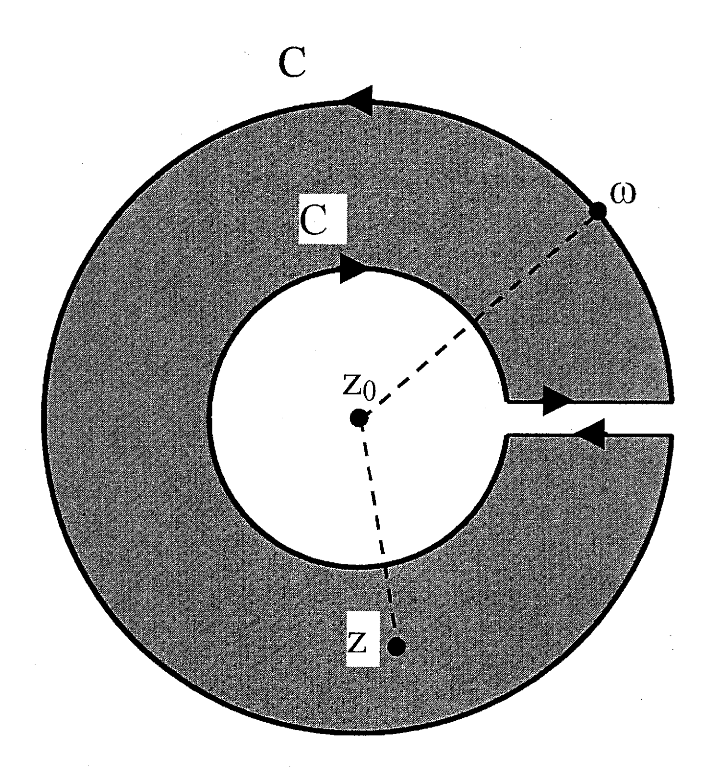


Figura 5.6: Series de Laurent

Como se observa los coeficientes a_n son los coeficientes de una serie de Taylor que acompañan a las potencias positivas $(n > 0)$, mientras que los b_n son los nuevos coeficientes de la serie de Laurent que acompañan a las potencias negativas $n < 0$.

Demostración:

$(\Longrightarrow)$

Realizaremos un corte en la corona de manera de crear una curva C cuyo interior sea analítico. Observe la figura 5.6.

Utilizando la fórmula de la integral de Cauchy 4.4, pero con $z = z_0$ y $\omega = z$, escribimos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

Como la integración de ida y vuelta sobre el corte de la corona es cero, la curva C puede ser descompuesta, observando las figuras, en C_1 y C_2:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega \tag{5.7}$$

El primer término de la derecha es el desarrollo de Taylor que se hace sobre la circunferencia exterior C_1. El signo negativo se debe a que la circulación de la circunferencia interna es en

sentido contrario de la definida. Dentro del segundo término de la derecha desarrollamos, incorporando el signo como,

$$\frac{1}{z-\omega} = \frac{1}{z-\omega+z_0-z_0} = \frac{1}{(z-z_0)\left[1-\frac{\omega-z_0}{z-z_0}\right]}$$

que por la serie geométrica de factor q:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad |q|<1$$

escribimos como

$$\frac{1}{(z-z_0)\left[1-\frac{\omega-z_0}{z-z_0}\right]} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\omega-z_0}{z-z_0}\right)^n \qquad \left|\frac{\omega-z_0}{z-z_0}\right| < 1 \Rightarrow |z-z_0| > |\omega-z_0|$$

Donde la serie es válida para los puntos exteriores a la circunferencia C_2. Note que el punto ω está circulando por la circunferencia interna y $|\omega-z_0|$ es el módulo del vector que va desde el centro z_0 hasta ω. Si introducimos esta serie en el segundo término de 5.7 obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\omega)}{\omega-z}d\omega &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(\omega).\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(\omega).(\omega-z_0)^n d\omega}_{b_n}\,\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_n\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(\omega).(\omega-z_0)^n d\omega
\end{aligned}$$

Finalmente concluimos en la siguiente expresión, donde se realizaron algunos cambios de variable para simplificar el desarrollo

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\omega)}{\omega-z}d\omega - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\omega)}{\omega-z}d\omega \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} b_n(z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}}d\omega
\end{aligned}$$

Note que la serie de $f(z)$ tiene ahora términos de potencias positivas y negativas:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.(z-z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} b_n.(z-z_0)^n \\ &= \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots \\ &= \cdots + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}}d\omega$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(\omega).(\omega-z_0)^n d\omega \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}}d\omega$$

$(\Longleftarrow)$

Si la función $f(z)$ fuese analítica aun dentro de la circunferencia interna C_2, los b_n serían todos cero, ya que la integral $\oint_{C_2} f(\omega).(\omega-z_0)^n d\omega$ tendría un integrando analítico y por el teorema de Cauchy $\oint = 0$.

Las funciones de variable compleja pueden poseer varias singularidades distribuidas por el plano. Dado un centro de desarrollo z_0 se trazan, con ese centro, circunferencias hasta las singularidades. Para cada zona existe un desarrollo en serie de Laurent diferente. Como ya sabemos, la circunferencia interna forma la ROC de la serie de Taylor, donde todas las potencias serán positivas. Para el resto de las coronas circulares existe un desarrollo de Laurent con potencias positivas y negativas. Las series de Taylor son consideradas un subconjunto de las series de Laurent. Si la serie de Laurent contiene potencias positivas y negativas, denominamos parte principal de la serie a los términos de Taylor ($n \geq 0$).

La metodología para hallar los coeficientes c_n de la serie puede ir desde el cálculo de la integral correspondiente, hasta la obtención empírica de los mismos. Este último es el más utilizado, y se basa en el hecho que la serie y la función son unívocas para un determinado centro z_0 y una ROC. Veamos a continuación el método práctico para hallar los coeficientes de la serie.

Método práctico para hallar la serie de Laurent

Se desea hallar el desarrollo en serie de la siguiente función

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+2)}$$

El centro del desarrollo es $z_0 = 1$. Como la función posee dos polos, las posibles regiones de convergencia son las siguientes: $ROC_1 : |z-1| < \sqrt{2}$, $ROC_2 : 3 > |z-1| > \sqrt{2}$ y $ROC_3 : |z-1| > 3$. Las mismas están determinadas por las singularidades, como muestra el gráfico de la figura 5.7.

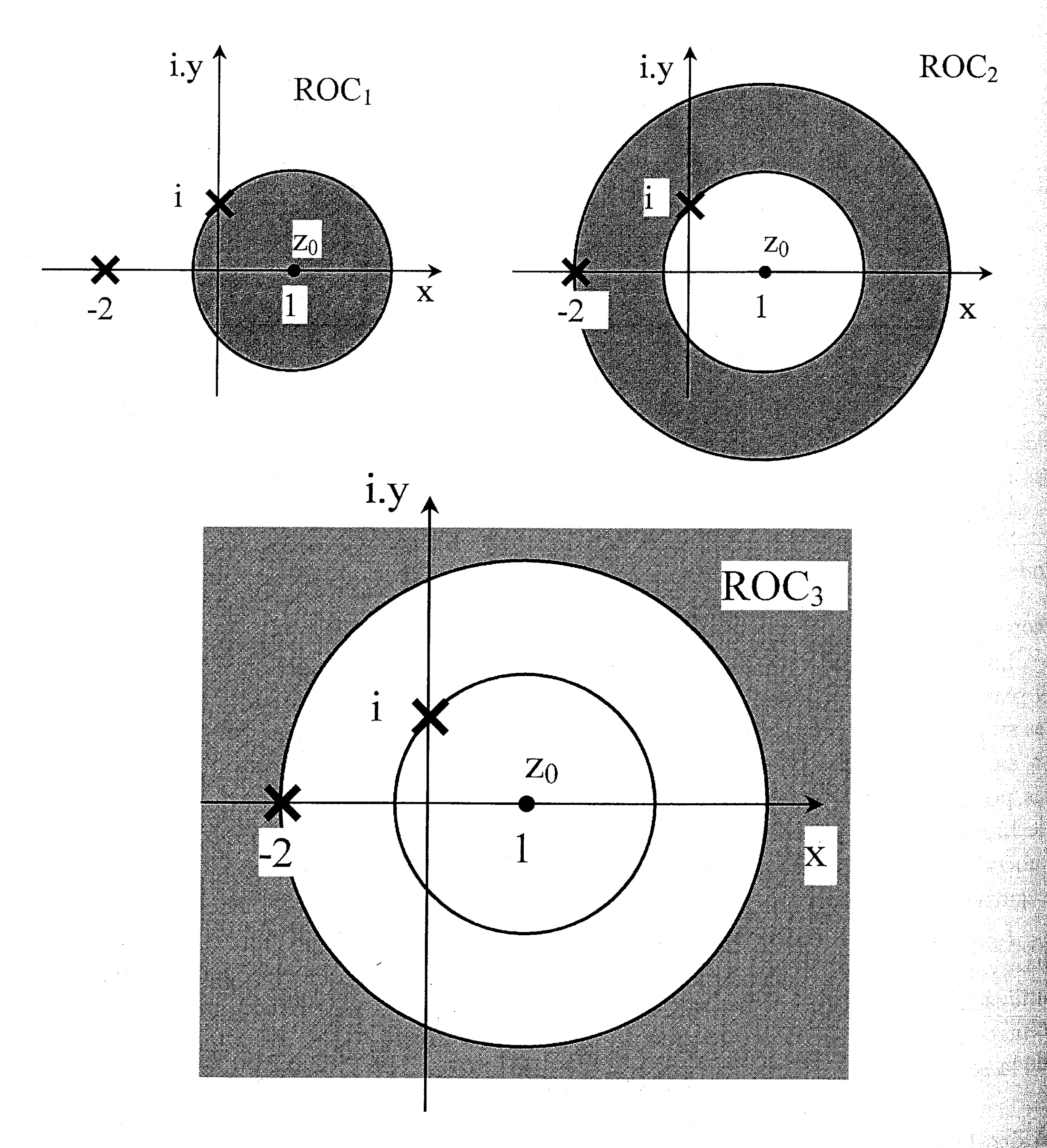


Figura 5.7: Los tres posibles desarrollos de la función $f(z)$.

No existe un único desarrollo para todo el plano, hay uno por cada ROC graficada. El objetivo es hallar una serie de potencias $(z-z_0)^n = (z-1)^n$ por algún método práctico sin

realizar las integrales. Utilizaremos para esto la serie geométrica de razón q:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow |q| < 1$$

y algunos manejos algebraicos.

Para comenzar es conveniente separar a la función en dos fracciones simples: El método de separación por fracciones simples es el siguiente:

- Por cada polo simple aparece una fracción con un numerador constante a determinar y el polo en el denominador:$A/(z-p)$.
- Si el polo fuese doble, aparece una fracción con un polo simple y otra con un polo doble. Cada una posee una constante en el numerador a determinar: $A/(z-p) + B/(z-p)^2$. Si el orden n fuera mayor que 2 aparecen fracciones con polos de todos los ordenes hasta el n. Cada fracción posee una constante en el numerador a determinar.
- Si el polo fuese complejo conjugado se debe colocar una fracción con el polo en el denominador y un numerador del tipo: $(A.z + B)/(z^2 - p)$.

Para nuestro caso planteamos

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+2)} = \frac{A}{(z-i)} + \frac{B}{(z+2)} = \frac{A(z+2) + B(z-i)}{(z-i)(z+2)}$$

Como esta igualdad debe darse para todo z:

$$1 = A(z+2) + B(z-i) \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{2+i} \qquad B = -\frac{1}{2+i}$$

entonces la función es la suma de dos fracciones

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+2)} = \frac{1}{(2+i)(z-i)} - \frac{1}{(2+i)(z+2)}$$

Para desarrollar $f(z)$ en serie debemos hallar por separado el desarrollo de cada fracción. Cada una posee un único polo, y admite desarrollos de Taylor con ROC *hacia adentro* y de Laurent con ROC *hacia afuera*. Combinándolos podemos hallar la ROC de la suma (la intersección).

Tomemos solo la primer fracción con polo en $z = i$. Como el centro de desarrollo es $z_0 = 1$ las posibles regiones de convergencia con $|z-1| < \sqrt{2}$ (Taylor) y $|z-1| > \sqrt{2}$ (Laurent):

Para el desarrollo de Taylor planteamos:

$$\frac{1}{(2+i)(z-i)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

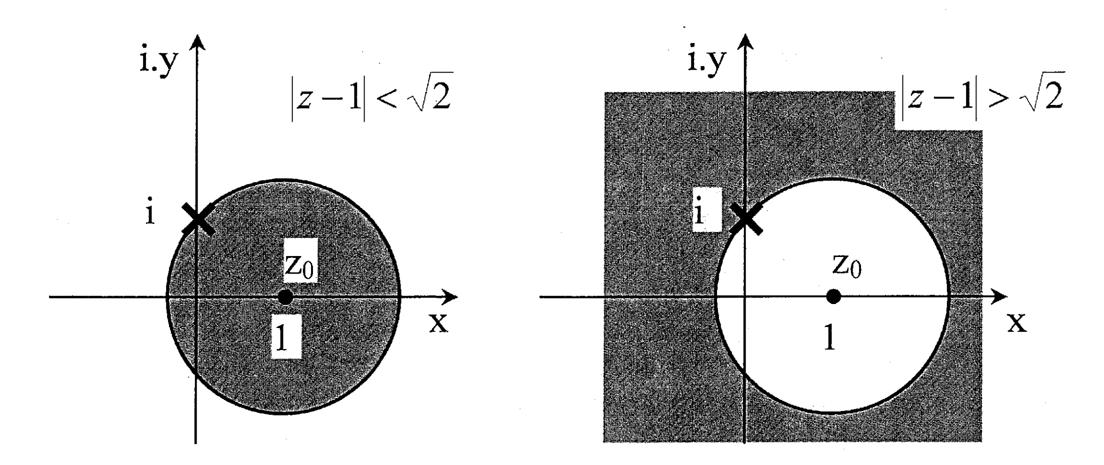


Figura 5.8: Dos desarrollos posibles de la misma función.

donde en vez de utilizar las derivadas o las integrales para hallar los a_n, procedemos de la siguiente forma; llamamos $u = z - z_0 = z - 1$. Despejamos $z = u + 1$ y reemplazamos en la fracción:

$$\frac{1}{(2+i)(z-i)} = \frac{1}{(2+i)(u+1-i)}$$

Como deseamos un desarrollo de Taylor, sacamos de factor común en el denominador la constante que acompaña a la u y acomodamos para obtener la serie geométrica:

$$\frac{1}{(2+i)(u+1-i)} = \frac{1}{(2+i)(1-i)(1-\frac{-u}{1-i})} = \frac{1}{(2+i)(1-i)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^n}{(i-1)^n} \qquad \left|\frac{u}{i-1}\right| < 1$$

finalmente con $u = z - 1$

$$\frac{1}{(2+i)(z-i)} = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{(2+i)(1-i)^{n+1}}}_{a_n}(z-1)^n \qquad |z-1| < \sqrt{2}$$

La ROC hallada es exactamente la buscada: $|z-1| < \sqrt{2}$ (Fig.5.8).

Si ahora se desea hallar el desarrollo de Laurent para la misma fracción planteamos nuevamente $u = z - z_0 = z - 1$, despejamos $z = u + 1$ y reemplazamos en la fracción:

$$\frac{1}{(2+i)(z-i)} = \frac{1}{(2+i)(u+1-i)}$$

Como se desea una serie de potencias negativas (Laurent) con ROC hacia afuera, se saca de factor común la u y se reacomoda para generar la serie geométrica:

$$\frac{1}{(2+i)(u+1-i)} = \frac{1}{(2+i)u(1-\frac{i-1}{u})} = \frac{1}{(2+i)u}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i-1)^n}{u^n} \qquad \left|\frac{i-1}{u}\right| < 1$$

como $u = z - 1$ obtenemos las potencias en $(z-1)^n$ buscadas:

$$\frac{1}{(2+i)(z-1)} = \frac{1}{(2+i)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i-1)^n}{(z-1)^{n+1}} = \sum_{n=-1}^{-\infty}\underbrace{\frac{(i-1)^{-n-1}}{(2+i)}}_{b_n}(z-1)^n \qquad |z-1| > \sqrt{2}$$

La ROC hallada es la buscada: $|z-1| > \sqrt{2}$ (Fig.5.8).

Para la segunda fracción, los dos posibles desarrollo son los presentes en la figure 5.6.1.

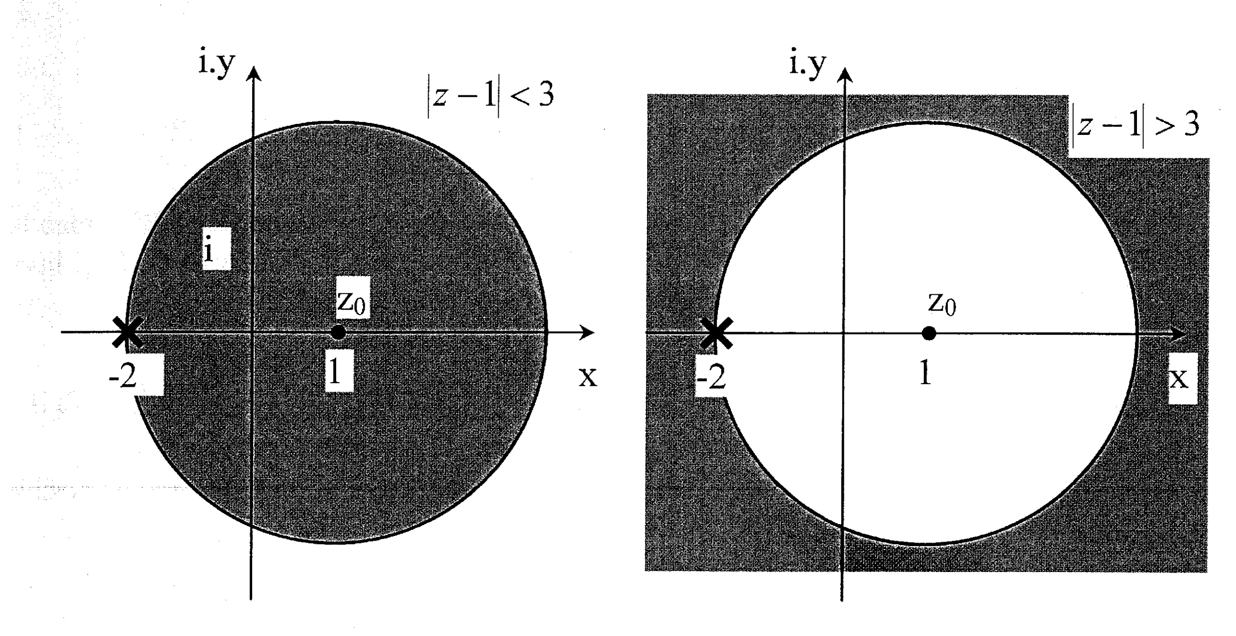


Figura 5.9: Desarrollos de Taylor y Laurent

Utilizando la sustitución $u = z - 1$ y sacando de factor común la constante, hallamos la serie de Taylor:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2+i)(z+2)} &= \frac{1}{(2+i)(u+1+2)} = \frac{1}{(2+i)(u+3)} = \frac{1}{3(2+i)(1-\frac{-u}{3})} \\
&= \frac{1}{3(2+i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^n}{3^n} \qquad \left|\frac{-u}{3}\right| < 1 \\
&= \frac{1}{(2+i)}\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}}_{a_n}(z-1)^n \qquad |z-1| < 3
\end{aligned}$$

Para la serie de Laurent obtenemos, sacando de factor común ahora la u:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2+i)(z+2)} &= \frac{1}{(2+i)(u+3)} = \frac{1}{(2+i)u(1-\frac{-3}{u})} \\
&= \frac{1}{(2+i)u}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{u^n} \qquad \left|\frac{-3}{u}\right| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2+i)(z-1)^{n+1}} = \sum_{n=-1}^{-\infty}\underbrace{\frac{(-3)^{-n-1}}{(2+i)}}_{b_n}(z-1)^n \qquad |z-1| > 3
\end{aligned}$$

Combinando estos desarrollos hallamos la serie de Laurent de la $f(z)$ para las tres regiones de convergencia. La primera es la intersección entre $|z-1| < \sqrt{2}$ y $|z-1| < 3$, ambos desarrollos de Taylor:

$$\frac{1}{(z-i)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(2+i)(-1)^n(1-i)^{n+1}} + \frac{1}{(2+i)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n \qquad ROC_1 : |z-1| < \sqrt{2}$$

Note que todas las potencias son positivas. En el segundo caso tomamos la ROC_2 como la corona circular $3 > |z-1| > \sqrt{2}$, que la determina el desarrollo de Laurent de la primer fracción (hacia afuera) y el desarrollo de Taylor de la segunda (hacia adentro)[3] :

$$\frac{1}{(z-i)(z+2)} = \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(i-1)^{-n-1}}{(2+i)}(z-1)^n + \frac{1}{(2+i)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n \qquad ROC_2 : 3 > |z-1| >$$

Ahora si aparecen potencias positivas y negativas. Finalmente el tercer desarrollo posible es tomando ambas fracciones con ROC hacia afuera por Laurent:

$$\frac{1}{(z-i)(z+2)} = \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(i-1)^{-n-1}}{(2+i)}(z-1)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(-3)^{-n-1}}{(2+i)}(z-1)^n \qquad ROC_3 : |z-1| > 3$$

La cuarta combinación sería Taylor de la primera fracción $|z-1| < \sqrt{2}$ y Laurent de la segunda $|z-1| > 3$, pero las regiones de convergencia de los desarrollos de las fracciones no tienen ningún punto de intersección, por lo cual esa serie no representa a $f(z)$ para ningún punto. Aclaramos además que **todos los desarrollos deben poseer sola y exclusivamente potencias de** $(z-z_0)^n$, en este caso $(z-1)^n$.

5.7. Clasificación de singularidades

Dentro de la clasificación de singularidades encontramos los polos y las singularidades esenciales. El desarrollo en serie de Laurent **sobre la singularidad** brinda un método para

[3]Parece extraño aplicar Taylor desde el polo en $z = 2$ hacia adentro ya que el polo $z = i$ parece estar dentro. Esto no es así ya que debe recordar que se desarrollaron en serie las fracciones por separado, sin la presencia del otro polo.

identificar, no solo si se trata de un polo, sino además el orden. En lo siguiente todas las singularidades se suponen aisladas:

- POLOS. Si al desarrollar en serie de Laurent $f(z)$ en z_0, el desarrollo es de la forma

$$f(z) = \frac{b_{-p}}{(z-z_0)^p} + \cdots + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

  donde la serie *comienza* desde el orden $-p$: $b_{-p}/(z-z_0)^p$ con $b_{-p} \neq 0$, se dice que $f(z)$ posee un polo de orden p en z_0. Claramente observamos que aplicando límite de $f(z).(z-z_0)^p$ obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{z \to p} f(z)(z-z_0)^p &= \lim_{z \to p} b_{-p} + \cdots + b_{-2}(z-z_0)^{-p+2} + b_{-1}(z-z_0)^{p-1} + \\ &+ a_0(z-z_0)^p + a_1(z-z_0)^{p+1} + a_2(z-z_0)^{p+2} + \cdots \\ &= b_{-p} \begin{cases} \neq 0 \\ \neq \infty \end{cases} \end{aligned}$$

  y además

$$\lim_{z \to p} f(z) = \infty$$

- Singularidad esencial. Estas singularidades se caracterizan por no tener orden, o ser polos de orden infinito. De esta forma la serie desarrollada sobre el punto z_0 es de la forma

$$f(z) = \cdots + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

  donde se aprecia que hay infinitos términos de Laurent. Se dice que $f(z)$ posee una singularidad esencial en z_0.

Si el desarrollo en serie de la función $f(z)$ en un punto z_0 cuenta solo con la parte principal: $n \geq 0$ (Taylor), la función es analítica en ese punto.

5.8. Residuos

Una de las aplicaciones prácticas del desarrollo en serie de una función $f(z)$ en un punto z_0 es la resolución de integrales de línea. Hemos visto que la función $f(z)$ posee desarrollos en serie con diferentes ROC dependiendo el centro del desarrollo z_0 y la posición de las singularidades. Para la resolución de integrales es necesario siempre encontrar los desarrollos de Laurent centrados *en las singularidades* y que sean válidos en su entorno.

Definición 5.8.1 *Sea la función $f(z)$ analítica sobre una circunferencia C y en todo su interior, exceptuando el centro z_0, donde existe una singularidad. En el entorno de z_0 la función puede ser representada por la serie de Laurent*

$$f(z) = \cdots + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

donde el término b_{-1} se denomina **residuo de** $f(z)$ **en** z_0.

Utilizando la regla de cálculo de los b_n hallamos el residuo como

$$\boxed{Res\{f(z); z = z_0\} = b_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\omega)d\omega}$$

Esta última expresión se puede confirmar integrando el desarrollo en serie de $f(z)$ término a término: Utilizando la regla de cálculo de los b_n hallamos el residuo como

$$\oint_C f(\omega)d\omega = \oint_C \left[\cdots + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots\right] d\omega$$

y recordando (4.3) que

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^p}dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{si } p \neq 1 \end{cases}$$

el único de todos los términos distinto de cero es el residuo:

$$\boxed{\oint_C f(\omega)d\omega = 2\pi i b_{-1}}$$

5.8.1. Teorema del Residuo

Teorema 5.8.1 *Sea la función $f(z)$ analítica sobre un contorno C simplemente cerrado y en todo su interior excepto en un número finito de puntos $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$, en cada uno de los cuales se localiza una singularidad, si en ellos los residuos son $Res\{f(z), z_0, z_1, z_2, \ldots z_n\}$ respectivamente, entonces:*

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} Res\{f(z), z_k\}} \tag{5.8}$$

es decir que la integral sobre el contorno C es igual al producto de $2\pi i$ por la suma de los residuos en las singularidades.

Figura 5.10: Generalización del Teorema de los residuos para más singularidades.

Para el cálculo de cada residuo es necesario encontrar la serie de Laurent de $f(z)$ en el entorno de la singularidad, y extraer el término b_{-1} de la serie.

Este teorema es fácilmente demostrable ya que, si dibujamos la curva C y las singularidades (figura 5.10), por el corolario del teorema de Cauchy podemos escribir

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= \oint_{C_0} f(z)dz + \oint_{C_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)dz \\ &= 2\pi i \left[Res\{f(z), z_0\} + Res\{f(z), z_1\} + \cdots + Res\{f(z), z_n\}\right] \end{aligned}$$

donde a cada término le aplicamos la definición 5.8.1 de residuo.

El desarrollo en serie sobre una singularidad esencial y la extracción del coeficiente b_{-1} que acompaña siempre al término $1/(z-z_0)$ permite calcular la integral $\oint_C f(z)dz = 2\pi i b_{-1}$. Sin embargo, si en vez de una singularidad esencial, se tratara de un polo de orden p, entonces el cálculo se puede reducir utilizando el siguiente teorema.

Teorema 5.8.2 *Si una función $f(z)$ es analítica sobre un contorno C simplemente cerrado y en su interior excepto en un punto z_0 en el que existe un polo de orden p, entonces el residuo del desarrollo en serie sobre la singularidad se puede calcular como:*

$$\boxed{b_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{(p-1)}}{dz^{p-1}} \left[f(z)(z-z_0)^p\right]} \tag{5.9}$$

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Por la hipótesis de la existencia de un polo de orden p en $z = z_0$, el desarrollo en serie de Laurent en ese punto es del tipo

$$f(z) = \frac{b_{-p}}{(z-z_0)^p} + \cdots + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

Como ya demostramos con anterioridad la serie comienza del término b_{-p}. Si multiplicamos ambos miembros por $(z-z_0)^p$ y llamamos $g(z) = f(z).(z-z_0)^p$ obtenemos

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z)(z-z_0)^p \\ &= \underbrace{b_{-p}}_{a_0} + \cdots + \underbrace{b_{-2}}_{a_{p-2}}(z-z_0)^{p-2} + \underbrace{b_{-1}}_{a_{p-1}}(z-z_0)^{p-1} + a_0(z-z_0)^p + a_1(z-z_0)^{p+1} + \cdots \end{aligned}$$

donde ahora $g(z)$ es analítica dentro de C. Note que el desarrollo obtenido es el de Taylor (de la función $g(z)$), todos los términos son de potencias positivas de n. Como el término que se busca para resolver la integral es el b_{-1}, que en este desarrollo de Taylor equivale al a_{p-1}, lo podemos calcular mediante las derivadas:

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^{(n)}f(z_0)}{dz^n} \qquad \Rightarrow \qquad a_{p-1} = \frac{1}{(p-1)!}\frac{d^{(p-1)}f(z_0)}{dz^{p-1}}$$

de esta forma el b_{-1} del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ (que posee un polo de orden p en z_0), se puede hallar del desarrollo de Taylor de $g(z) = f(z).(z-z_0)^p$ como

$$b_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{(p-1)}}{dz^{p-1}} \left[f(z)(z-z_0)^p\right]$$

Este límite solo puede ser calculado si se conoce el orden p del polo en z_0. Si la singularidad es esencial este límite carece de sentido ($p \to \infty$).

($\Longleftarrow$)

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 5.8.1 *Calcule las siguientes integrales:*

1.

$$\oint_C \frac{e^{2/z}}{z} dz \qquad C : |z| = 1$$

2.

$$\oint_C \frac{2z+1}{(z^2+1)(z-3)} dz \qquad C : |z| = 2$$

Para resolver estas integrales se utilizarán los siguientes criterios. La primera presenta una singularidad esencial en $z = 0$, por lo tanto la determinación del residuo b_{-1} se hará desarrollando en serie con $z_0 = 0$. Es importante recordar que solo se deben calcular los residuos **sobre las singularidades que estén dentro de la curva C de integración**. *La segunda integral posee polos en $z = \pm i$ y en $z = 3$. Este último está fuera de la curva C por lo tanto solo calcularemos dos residuos. Como cada polo es de orden 1, utilizaremos el cálculo mediante el límite 5.9.*

1. *Utilizando la serie de e^z podemos escribir:*

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \dots \\ e^{1/z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} + \dots \\ e^{2/z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n n!} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{3z^3} + \frac{2}{3z^4} + \dots \\ \frac{e^{2/z}}{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1} n!} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{b_{-1}/z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{4}{3z^4} + \frac{2}{3z^5} + \dots \end{aligned}$$

El residuo es $b_{-1} = 1$, por lo tanto:

$$\oint_{C:|z|=1} \frac{e^{2/z}}{z} dz = 2\pi i b_{-1} = 2\pi i$$

2. *En este caso los polos simples son $z = \pm i$. Calculamos los residuos como*

$$\begin{aligned} Res\{f(z), z = i\} &= \lim_{z \to i} f(z)(z - i) = \lim_{z \to i} \frac{(2z+1)(z-i)}{(z-i)(z+i)(z-3)} \\ &= \frac{(2i+1)}{(2i)(i-3)} = \frac{-7+i}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Res\{f(z), z = -i\} &= \lim_{z \to -i} f(z)(z + i) = \lim_{z \to -i} \frac{(2z+1)(z+i)}{(z-i)(z+i)(z-3)} \\ &= \frac{(-2i+1)}{(-2i)(-i-3)} = \frac{-7-i}{20} \end{aligned}$$

El polo en $z = 3$ está fuera de la curva C y no se tiene en cuenta su residuo. Finalmente calculamos

$$\oint_{C:|z|=2} \frac{2z+1}{(z^2+1)(z-3)} dz = 2\pi i \left[\frac{-7+i}{20} + \frac{-7-i}{20} \right] = -\frac{7\pi i}{5}$$

5.9. Integrales en el campo real

Así como el teorema del Residuo permite calcular integrales complejas, el mismo es una herramienta para resolver integrales en el campo real. Veremos a continuación algunos tipos de integrales que se resuelven por métodos complejos.

Teorema 5.9.1 *Si $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 y $C(R)$ es un arco de circunferencia $z = z_0 + R.e^{i\varphi}$ con $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, entonces*

$$\lim_{R \to 0} \int_{C(R)} f(z)dz = i.[\varphi_2 - \varphi_1].Res\{f(z); z_0\}$$

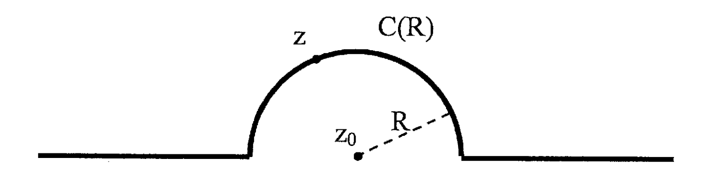


Figura 5.11: Curva de integración adoptada para el Teorema.

Demostración:

($\Longrightarrow$)
Por la hipótesis de polo simple en z_0:

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0} \Rightarrow g(z) = f(z)(z - z_0)$$

Además el residuo en z_0 es

$$b_{-1} = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = \lim_{z \to z_0} g(z) \Rightarrow b_{-1} + \varepsilon = g(z)$$

siendo ε un infinitésimo tal que

$$\lim_{z \to z_0} \varepsilon = 0$$

Por otra parte

$$\oint_{C(R)} f(z)dz = \oint_{C(R)} \frac{g(z)}{z - z_0}dz$$

Una vez elegido el ε, $g(z) = cte$. La curva es una circunferencia con $z = z_0 + R.e^{i\varphi}$ y $dz = i.R.e^{i\varphi}d\varphi$, entonces escribimos

$$\oint_{C(R)} \frac{g(z)}{z - z_0}dz = (b_{-1} + \varepsilon) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{i.R.e^{i\varphi}}{R.e^{i\varphi}}d\varphi = (b_{-1} + \varepsilon)i.(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Finalmente

$$\lim_{R\to 0} \int_{C(R)} f(z)dz = i.[\varphi_2 - \varphi_1].Res\{f(z); z_0\}$$

$(\Longleftarrow)$

Teorema 5.9.2 *Si $f(z)$ es analítica, entonces se puede acotar de la siguiente forma:*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^k} \qquad k \in I\!N \geq 2_\wedge M = cte$$

y

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(R)} f(z)dz = 0$$

donde la curva C es una semicircunferencia de radio R en los cuadrantes superiores mostrada en la figura 5.12.

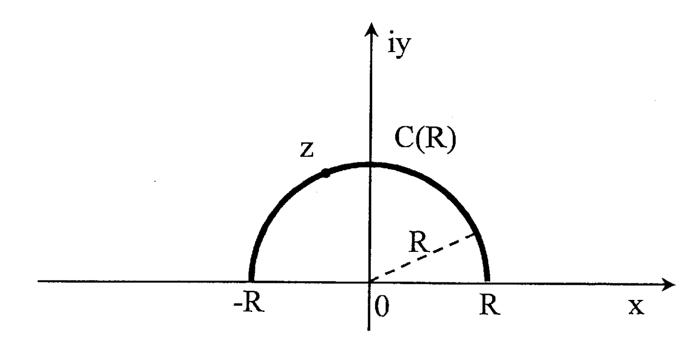


Figura 5.12: Semicircunferencia adoptada como curva de integración.

Demostración:

$(\Longrightarrow)$
La prueba requerida es lo mismo que demostrar que

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{C(R)} f(z)dz \right| = 0$$

por propiedad triangular

$$\left| \int_{C(R)} f(z)dz \right| \leq \int_{C(R)} |f(z)||dz| \leq \frac{M}{R^k} \int_0^\pi |i.R.e^{i\varphi} d\varphi| = \frac{M}{R^k} R. \int_0^\pi |d\varphi| = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

Finalmente

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C(R)} f(z)dz = 0$$

($\Longleftarrow$)
Utilizaremos los teoremas vistos en las siguientes secciones.

5.9.1. Integración de funciones racionales de $sen(\theta)$ y $cos(\theta)$

Se trata de resolver integrales del siguiente tipo

$$\int\limits_{0}^{2\pi} f(sen(\theta), cos(\theta))d\theta$$

en donde la función $f(\theta)$ es una función racional de $sen(\theta)$ y $cos(\theta)$. Para resolverlas se adopta la siguiente sustitución:

$$z = e^{i\theta} \qquad dz = i.e^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

Además

$$sen(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \qquad cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

Con lo cual la integral real toma la siguiente forma compleja

$$\oint\limits_{C:|z|=1} \frac{1}{iz} f\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)dz$$

que se puede resolver por el teorema de los residuos, tomando solo las singularidades dentro de la circunferencia unitaria $|z| = 1$.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 5.9.1 *Calcule la siguiente integral real:*

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{sen(\theta)}{\frac{5}{3} - cos(\theta)} d\theta$$

Aplicando el método explicado, transformamos esta integral real en una integral de línea compleja:

$$\oint\limits_{C:|z|=1} \frac{\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}}{\frac{5}{3} - \frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \frac{dz}{iz} = \oint\limits_{C:|z|=1} \frac{3(z^2 - 1)}{z(z - \frac{1}{3})(z - 3)} dz$$

El integrando posee polos simples en $z = 0$, $z = 1/3$ y $z = 3$, donde solo los dos primeros residen dentro de C y sus residuos son

$$Res\{f(z), z = 0\} = -3$$
$$Res\{f(z), z = \frac{1}{3}\} = 3$$

Finalmente la integral es

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{sen(\theta)}{\frac{5}{3} - cos(\theta)} d\theta = 2\pi i(-3 + 3) = 0$$

5.9.2. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Utilizando el teorema 5.9.2 podemos hallar la solución de integrales reales del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

reemplazando x por z

$$\oint_{C} f(z)dz$$

y utilizando una curva de integración C como la siguiente:

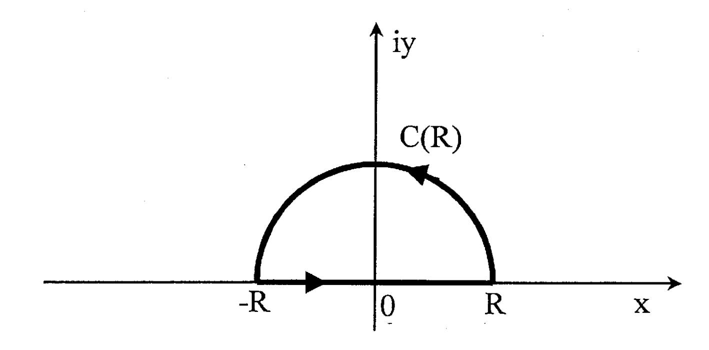


Figura 5.13: Curva cerrada adoptada para la resolución de la integral.

donde demostramos (5.9.2) que la integral a lo largo de la semicircunferencia $C(R)$ es cero si

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^k} \qquad z = R.e^{i\theta} \qquad k \in I\!N_{\wedge} k > 1$$

Al tender R a infinito, obtenemos la integral real por el método de los residuos:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} Res\{f(z), z_k\}$$

$$\lim_{R\to\infty}\left[\underbrace{\int_{C(R)} f(z)dz}_{0} + \int_{-R}^{R} f(x)dx\right] = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} Res\{f(z), z_k\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} Res\{f(z), z_k\}$$

La limitación que presenta este método es que no puede existir ninguna singularidad sobre el eje real, ya que la curva propuesta no se podría aplicar.

Ejemplo 5.9.2 *Calcule la siguiente integral real*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}dx$$

Para utilizar el teorema, debemos probar que

$$|f(z)| \le \frac{M}{R^k} \qquad z = R.e^{i\theta} \qquad k \in I\!N_{\wedge} k > 1$$

con

$$f(z) = \frac{1}{z^6+1}$$

por lo tanto

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{R^6 e^{i6\theta}+1}\right| \le \frac{1}{|R^6 e^{i6\theta}|-1} = \frac{1}{R^6-1} \le \frac{2}{R^6}$$

donde se utilizó la desigualdad $|z_1+z_2| \ge |z_1| - |z_2|$. *Si R es lo suficientemente grande ($R > 2$), $M = 2$ y $k = 6$ y la desigualdad se cumple.*

Para resolver la integral hallamos los polos de $f(z)$ y calculamos los residuos dentro de la curva propuesta (de los polos del semiplano superior):

$$f(z) = \frac{1}{z^6+1} = \frac{1}{(z-e^{i\pi/6})(z-e^{-i\pi/6})(z-e^{i\pi/2})(z-e^{-i\pi/2})(z-e^{i5\pi/6})(z-e^{-i5\pi/6})}$$

donde solo calculamos

$$\begin{aligned} Res\{f(z), z = e^{i\pi/6}\} &= \frac{1}{6}e^{-i5\pi/6} \\ Res\{f(z), z = e^{i\pi/2}\} &= \frac{1}{6}e^{-i5\pi/2} \\ Res\{f(z), z = e^{i5\pi/6}\} &= \frac{1}{6}e^{-i25\pi/6} \end{aligned}$$

de tal modo que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}dx &= 2\pi i \sum_{k=0}^{n} Res\{f(z), z_k\} \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{6}e^{-i5\pi/6} + \frac{1}{6}e^{-i5\pi/2} + \frac{1}{6}e^{-i25\pi/6}\right] = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

5.9.3. Singularidades en el eje real

Supondremos por simplicidad que sobre el eje real se tiene solamente un polo simple pero los resultados a que se lleguen pueden hacerse extensivos a casos más generales.

Sea por ejemplo el punto x_0 en donde se localiza el polo simple, y sea n un número finito de singularidades aisladas. Entonces se construye el circuito de la figura 5.14.

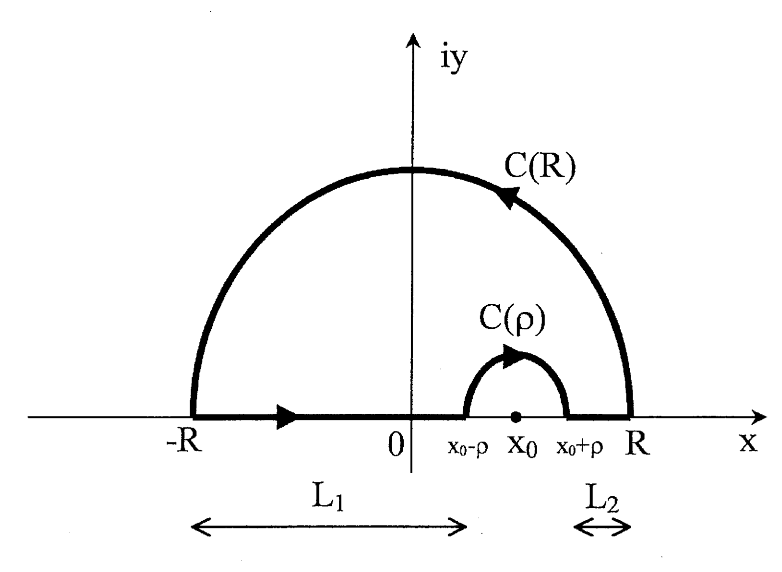


Figura 5.14: Curva adoptada para la resolución de la integral con singularidades reales.

Designamos a la curva C como $C : C(R) \cup L_1 \cup C(\rho) \cup L2$, entonces integrando siempre en sentido antihorario, escribimos

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C(R)} f(z)dz + \int_{L_1} f(z)dz + \int_{C(\rho)} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz \qquad (5.10)$$

La integral se resuelve por el teorema del residuo

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_k Res\{f(z), z_k\}$$

para el segundo miembro de 5.10 se tiene

$$\lim_{\rho \to 0} \left[\int_{L_1} f(x)dx + \int_{L_2} f(x)dx \right] = \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

donde z se reemplazó por x ya que trabajamos sobre el eje real. Utilizando el teorema 5.9.1 escribimos

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{C(\rho)} f(z)dz = i[\varphi_2 - \varphi_1]Res\{f(z), x_0\} = i[0 - \pi]Res\{f(z), x_0\} = -i\pi Res\{f(z), x_0\}$$

Como demostramos en el teorema 5.9.2

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C(R)} f(z)dz = 0$$

Al hacer tender el radio R a infinito, resulta

$$\lim_{\rho \to 0} \left[\int_{L_1} f(x)dx + \int_{L_2} f(x)dx \right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

que es la integral que nos interesa hallar. Aplicando estas deducciones escribimos

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\{f(z), z_k\} = \int_{\infty}^{\infty} f(x)dx - \pi i Res\{f(z), x_0\}$$

$$\boxed{\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\{f(z), z_k\} + \pi i Res\{f(z), x_0\}} \qquad (5.11)$$

Por supuesto el resultado de una integral real, debe ser un número real.

Ejemplo 5.9.3 *Calcule la siguiente integral real:*

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)(1+x^2)} dx$$

La $f(x)$ posee una singularidad sobre el eje real en $x_0 = 1$. Convertimos $f(z)$ en $f(z)$

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)(1+z^2)} dz$$

cuyos polos son $z = i$, $z = -i$ y $z = 1$. Trazamos una curva C para solucionar el problema (figura 5.15).

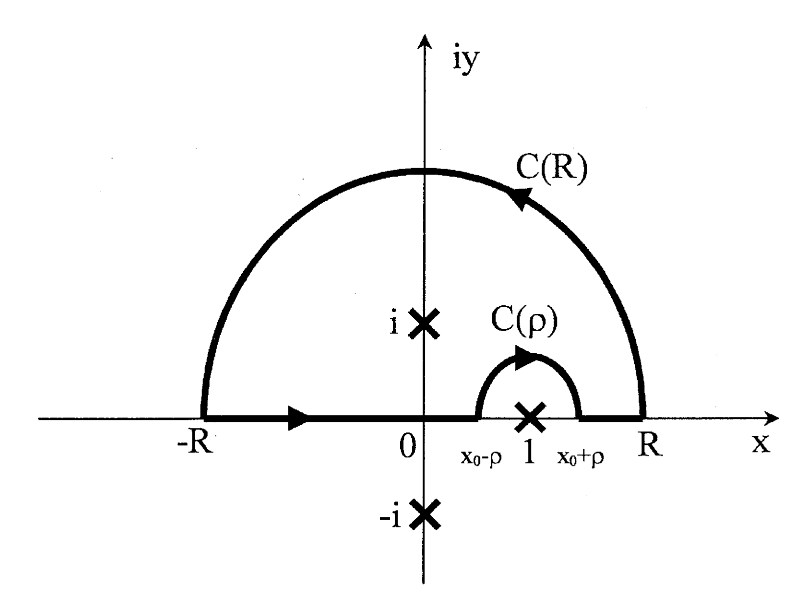


Figura 5.15: Diagrama de polos y ceros junto a la curva adoptada.

Calculamos el residuo en $x_0 = 1$ y en $z = i$, ya que este último se encuentra dentro de C:

$$Res\{f(z), x_0 = 1\} = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)}{(z-1)(1+z^2)} = \frac{1}{2}$$

$$Res\{f(z), z = i\} = \lim_{z \to i} \frac{(z-i)}{(z-1)(1+z^2)} = \frac{i-1}{4}$$

Finalmente aplicamos 5.11:

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)(1+x^2)} dx = 2\pi i Res\{f(z), z = i\} + \pi i Res\{f(z), x_0 = 1\}$$

$$= 2\pi i \frac{i-1}{4} + \pi i \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

Un caso especial $sen(x)/x$

La función $sen(x)/x$ es la denominada función $sinc(x)$ y es muy utilizada a lo largo del libro. Esta función presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$ ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

El objetivo es calcular la siguiente integral real:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(x)}{x} dx$$

para esto se utilizarán las técnicas analizadas. La función $f(x)$ presenta una singularidad en $x = 0$ y por lo tanto trazaremos el contorno de integración que se muestra en la figura 5.16.

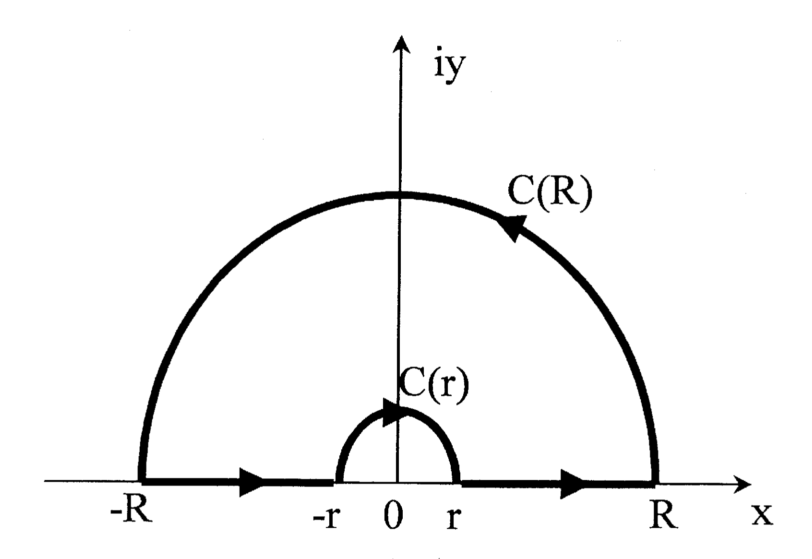


Figura 5.16: Curva de integración.

La función compleja que utilizaremos será e^{iz}/z, planteando por el teorema de Cauchy:

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-r}^{r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{R}^{-R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

reemplazando x por $-x$ en la primer integral y asociando la tercer integral:

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{-r}^{r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_R^{-R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

$$2i \int_r^R \frac{sen(x)}{x} dx = -\int_{-r}^{r} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_R^{-R} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

Tendiendo $R \to \infty$ la segunda integral de la derecha tiende a cero (5.9.2) y con $r \to 0$ la primer integral de la derecha es

$$-\lim_{r \to 0} \int_{-\pi}^{0} \frac{e^{ir.e^{i\theta}}}{r.e^{i\theta}} i.r.e^{i\theta} d\theta = -\lim_{r \to 0} \int_{-\pi}^{0} i.e^{ir.e^{i\theta}} d\theta = i\pi$$

donde $C(r) : z = r.e^{i\theta}$, $dz = i.r.e^{i.\theta} d\theta$ y se introdujo el límite dentro de la integral. Finalmente

$$2i \int_r^R \frac{sen(x)}{x} dx = -\int_{-r}^{r} \frac{e^{iz}}{z} dx - \int_R^{-R} \frac{e^{iz}}{z} dx$$

$$2i \int_0^{\infty} \frac{sen(x)}{x} dx = \pi i$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{sen(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(x)}{x} dx = \pi}$$

5.10. Residuos en el infinito

Consideraremos en esta sección el plano complejo ampliado, es decir incluiremos al infinito como un punto(impropio) más del plano. Para investigar qué sucede con una función $f(z)$ cuando $z \to \infty$, definiremos

$$f(z) = f(\frac{1}{\omega}) = g(\omega) \qquad \Rightarrow \qquad g(0) = \lim_{\omega \to 0} g(\omega)$$

Se define a $f(z)$ como analítica o singular en el infinito si $g(\omega)$ es analítica o singular, respectivamente, en $\omega = 0$. Por ejemplo, la función $f(z) = 1/z^2$ es analítica en el infinito, ya que $g(\omega) = f(1/\omega) = \omega^2$ es analítica en $\omega = 0$. La función z^4 es singular en el infinito ya que $g(\omega) = f(1/\omega) = 1/\omega^4$ es singular en $\omega = 0$. La función exponencial e^z es singular en infinito ya que $g(\omega) = f(1/\omega) = e^{1/\omega}$ es singular en $\omega = 0$. Las funciones trigonométricas $sen(z)$ y $cos(z)$ son singulares en el infinito.

Teorema 5.10.1 *Si el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en el infinito es*

$$f(z) = \dots \frac{b_{-2}}{z^{n-2}} + \frac{b_{-1}}{z^n} + a_0 + a_1 z + z_2 z^2 + \dots$$

entonces el residuo en el infinito de una función $f(z)$ es

$$\boxed{Res\{f(z), z = \infty\} = -b_{-1}}$$

Por ejemplo, tomemos la función

$$f(z) = \frac{z^3}{z-2}$$

Para ver el comportamiento de $f(z)$ en el infinito, hallamos $f(1/z)$:

$$f(\frac{1}{z}) = \frac{\frac{1}{z^3}}{\frac{1}{z-2}} = \frac{1}{z^2(1-2z)}$$

esta función posee un polo doble en $z = 0$, o sea que $f(z)$ posee un polo doble en $z = \infty$. Desarrollando en serie de Laurent $f(1/z)$ en $z_0 = 0$ obtenemos

$$f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{(1-2z)} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 4 + 8z + 16z^2 + \dots$$

Para hallar el desarrollo de $f(z)$ en el infinito reemplazamos z por $1/z$:

$$f(z) = z^2 + 2z + 4 + \frac{8}{z} + \frac{16}{z^2} + \dots$$

y por el teorema

$$Res\{f(z), z = \infty\} = -b_{-1} = -8$$

Sobre el sentido de circulación

Las integrales que realizamos siempre conservaron el sentido antihorario de circulación. Para aplicar el teorema del residuo la curva cerrada con un número finito de discontinuidades en su interior, fue recorrida en este sentido. Ahora si observamos la circulación desde el infinito, el sentido será horario, y el signo negativo del residuo es el que lo evidencia.

Teorema 5.10.2 *Si una función $f(z)$ es analítica en el plano complejo ampliado y tiene n singularidades aisladas en el plano complejo ordinario, la suma de todos los residuos, incluyendo el de infinito, es igual a cero*

En efecto, para las n singularidades aisladas resulta, en circulación antihoraria

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\{f(z), z_k\}$$

pero si realizamos la circulación en sentido horario, solo las singularidades en el infinito quedan encerradas:

$$\oint_{-C} f(z)dz = 2\pi i Res\{f(z), z = \infty\}$$

Si sumamos estas últimas dos expresiones, el lado izquierdo resulta nulo pues se trata de dos integrales curvilíneas descriptas en sentido contrario sobre el mismo circuito:

$$\underbrace{\oint_C f(z)dz + \oint_{-C} f(z)dz}_{0} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\{f(z), z_k\} + 2\pi i Res\{f(z), z = \infty\}$$

finalmente

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} Res\{f(z), z_k\} + Res\{f(z), z = \infty\} = 0}$$

Este teorema es muy útil si $f(z)$ posee muchas singularidades y la curva C los encierra a todos; es preferible calcular un único residuo en el infinito que todos los residuos en el plano complejo ordinario.

5.11. Resumen del capítulo

Este capítulo cierra la segunda sección conceptual del libro. Terminan aquí los conceptos de variable compleja que serán utilizados para las aplicaciones que veremos a continuación. Presentamos las series de Taylor, haciendo hincapié en las diferencias que posee con respecto a su contraparte real. Como las funciones de variable compleja analíticas poseen derivadas de todo orden en un punto, todas poseen un desarrollo en serie de Taylor. La serie se centra en un punto z_0, del cual se desprenderán las potencias $(z - z_0)^n$ con $n > 0$. El desarrollo será válido para los puntos dentro de una región de convergencia en el entorno analítico de z_0. La ROC es circular y su radio lo determina la singularidad más cercana a z_0. Para radios mayores la función posee un desarrollo en series de Laurent. Las series de Laurent poseen términos con potencias negativas. El coeficiente b_{-1} que acompaña a la potencia $(z - z_0)^{-1}$ es el denominado residuo. El teorema del residuo permite resolver integrales de línea mediante un método práctico. La integral alrededor de una curva C de $f(z)$ es $2\pi i$ por la sumatoria de los residuos sobre las singularidades que encierra C. Para hallar el residuo

hay dos métodos prácticos. Si la singularidad se trata de un polo, con solo poseer el orden p del mismo se puede aplicar el límite 5.9. Si la singularidad es esencial es necesario hallar el desarrollo de Laurent sobre la singularidad y extraer el b_{-1} de ese desarrollo.

Finalmente aplicamos el teorema de los residuos para hallar soluciones de integrales en el campo real. Extendimos el análisis al plano complejo ampliado incluyendo al infinito. La sumatoria de todos los residuos, incluyendo el del infinito, es cero.

5.12. Problemas propuestos

1. Estudiar la convergencia de las siguientes series numéricas:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{n/2}}$.

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$.

   d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{100^{2n}}{n!}$.

   e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{cos(in)}{4^n}$.

   f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-i}{n+i}$.

   g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6+5i)^n}{8^n}$.

   h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n cos(in)}$.

   i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{n,3^n}$.

2. Hallar los radios de convergencia de las siguientes series de potencias:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} i^n.z^n$.

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n.z^n$.

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} sen(\pi i/n).z^n$.

   d) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+i)^n.z^n$.

   e) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in}.z^n$.

   f) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}.z^n$.

   g) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2.z^n$.

   h) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n.z^n$.

3. Desarrollar las siguientes funciones en serie de Taylor, con centro en z_0:
   a) $f(z) = e^{2z}, z_0 = 0$. Rta: $\sum_0^\infty \frac{2^n}{n!} z^n$, $\forall z$
   b) $f(z) = e^{-2z}, z_0 = 1$. Rta: $e^{-2} \sum_0^\infty \frac{(-2)^n}{n!} (z-1)^n$, $\forall z$
   c) $f(z) = e^{2z}, z_0 = i$.
   d) $f(z) = cos(z), z_0 = \pi$.
   e) $f(z) = sen(z+2), z_0 = 0$.
   f) $f(z) = log(z), z_0 = i$.
   g) $f(z) = ln(z+1), z_0 = 0$.
   h) $f(z) = \frac{1}{1-2z}, z_0 = 0$.
   i) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}, z_0 = 1$.
   j) $f(z) = \frac{1}{z}, z_0 = -i$.
   k) $f(z) = cos(z^2), z_0 = 0$.
   l) $f(z) = cos^2(z), z_0 = 0$.
   m) $f(z) = tan(z), z_0 = 0$.
   n) $f(z) = e^z cos(z), z_0 = 0$.
   o) $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^3)}, z_0 = 0$. Rta: $\sum_0^\infty (-1)^n z^{3n+2}$, $|z| < 1$

4. Desarrolle las siguientes funciones en serie, con centro z_0 y ROC indicadas:
   a) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}, z_0 = 0, ROC : |z| > 2$.
   b) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}, z_0 = -1, ROC : |z+1| < 1$.
   c) $f(z) = \frac{z-2}{(z+1)^2}, z_0 = 0, ROC : |z| < 1$.
   d) $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)}, z_0 = 0, ROC : |z| > 1$.
   e) $f(z) = z^2 e^{1/z}, z_0 = 0, ROC : |z| > 0$. Rta: $\sum_2^{-\infty} \frac{z^n}{(-n+2)!}$, $|z| > 0$
   f) $f(z) = \frac{sen(4z)}{z^4}, z_0 = 0, ROC : |z| > 0$. Rta: $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n 2^{4n+2}}{(2n+1)!} z^{2n-3}$, $|z| > 0$.

5. Halle todos los desarrollos de Taylor y Laurent para las siguientes funciones, indicando claramente la ROC de cada uno. Dibuje el diagrama de polos y ceros. El centro de desarrollo es z_0:
   a) $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)(z-2)}, z_0 = 0$.
   b) $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)(z-2)^2}, z_0 = 2$.

   Rta:

   $f(z) = \sum_{-2}^\infty \left[(-1/2)^{n+3} + 2(-1)^n\right](z-2)^n$, $|z-2| < 1$

   $f(z) = \sum_{-3}^{-\infty} 2(-1)^{n+1}(z-2)^n + \sum_{-2}^\infty (-1/2)^{n+3}(z-2)^n$, $1 < |z-2| < 2$

$f(z) = \sum_{-3}^{-\infty}(-1)^n(2^{-n-3} - 2)(z-2)^n$, $|z-2| > 2$

c) $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-2)^2}$, $z_0 = 1$.

d) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+4)}$, $z_0 = 1$.

e) $f(z) = \frac{z^2+2z+1}{(z+1)(2z+1)(3z+1)}$, $z_0 = 0$.

f) $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2}$, $z_0 = 1$.

g) $f(z) = \frac{cos(z)}{z(z-1)}$, $z_0 = -1$.

h) $f(z) = \frac{z}{z^4-1}$, $z_0 = 0$. Rta: $-\sum_0^{\infty} z^{4n+1}$

i) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $z_0 = -i$.

j) $f(z) = \frac{1}{z^3+1}$, $z_0 = 2$.

k) $f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$, $z_0 = 0$.

6. Obtener el residuo de las siguientes funciones sobre todas las singularidades:

a) $f(z) = \frac{z}{z^2+iz+2}$. Rta: $1/3, 2/3$

b) $f(z) = \frac{2z+1}{(z+1)(z^2+i)}$. Rta: $z = -0{,}5 + i0{,}5$, $z = 0{,}60 + i0{,}46$, $z = -0{,}10 - i0{,}96$.

c) $f(z) = \frac{z^2}{(z-2)^2(z^2-1)}$. Rta: $-4/9, 1/2, -1/18$

d) $f(z) = \frac{(z+1)(z+2)}{(z+i-2)(z-i+2)(z+3)}$.

e) $f(z) = \frac{(z+1)(z+2)}{(z+4)^3(z^2+4z+5)}$.

f) $f(z) = \frac{1}{senh(z)}$.

g) $f(z) = \frac{1}{cosh(z)}$. Rta: $i(-1)^{k+1}$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

h) $f(z) = \frac{z}{sen(z)}$. Rta: $(-1)^k k\pi$ con $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

i) $f(z) = z^2 sen(1/z)$. Rta: $-1/6$

j) $f(z) = \frac{e^z}{(z^3-z^2)}$. Rta: -2, e

7. Resolver las siguientes integrales por el método que considere adecuado:

a)

$$\oint_C \frac{z}{sen(z)} dz \qquad C: |z| = 5$$

Rta: 0

b)

$$\oint_C \frac{z+1}{(z^2+2z+8)} dz \qquad C: |z+1| = 10$$

Rta: $i2\pi$

c)

$$\oint_C \frac{(z-3)}{(z^2+1)(z+1)^2(z+5)}dz \qquad C:|z|=4$$

Rta: $i\pi/26$

d)

$$\oint_C \frac{e^{1/z}}{z}dz \qquad C:|z|=1$$

Rta: $i2\pi$

e)

$$\oint_C \frac{1}{z^2e^{2z}}dz \qquad C:|z+i|=2$$

Rta: $-i4\pi$

f)

$$\oint_C \frac{3z+6}{(z+1)(z^2+16)}dz \qquad C:|z|=2$$

Rta: $i1{,}11$

g)

$$\oint_C \frac{3}{(z^4+1)^2}dz \qquad C:|z|=2$$

Rta: 0

h)

$$\oint_C \frac{sen(\pi z)}{z^6}dz \qquad C:|z|=1$$

Rta: $i\pi^6/60$

i)

$$\oint_C \frac{(2z+1)^2}{4z^3+z}dz \qquad C:|z|=1$$

8

Rta: $i2\pi$

j)

$$\oint_C \frac{z+1}{z(z^2-9)}dz \qquad C: |z| = 1$$

k)

$$\oint_C \frac{senh(z)}{z^2+2}dz \qquad C: |z| = 4$$

Rta: $i\pi\sqrt{2}sen(\sqrt{2})$

l)

$$\oint_C e^{1/z}z^3dz \qquad C: |z| = 1$$

m)

$$\oint_C \frac{2z^2+5}{(z+2)^3(z^2+4)z^2}dz \qquad C: |z-2i| = 6$$

8. Resuelva las siguientes integrales reales:

   a) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\frac{1}{2}cos(x)}$

   b) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1+4cos(x)}{17-8cos(x)}dx$

   c) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{37-12cos(x)}dx$

   d) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{cos(3x)}{5-4cos(x)}dx$

   e) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2+cos(x)}$

   f) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(5-3sen(x))^2}$

   g) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+16}dx$

h) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{x^8+1} dx$

i) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1} dx$

j) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{x^6+1} dx$

k) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(3x+1)^2(x^2+4x+2)} dx$

l) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i3x}}{x^2+1} dx$

m) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^3+1} dx$

Aplicación en MatLab

```
%CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIA
%La capacidad de procesamiento vectorial de Matlab hace posible verificar,
%en forma sencilla, la convergencia de una serie de potencia para un punto
%en particular. Para la suma de los elementos constitutivos de un vector,
%se utiliza la función "SUM":

%Desarrollo en serie de potencias para las ROCs posibles:
%f(z)=1/(z+1)(z+3), z0=1

%ROC 1 abs(z-1)<2
%Vector índice de los elementos de la serie (Taylor)
n=0:100;
%Evaluacion en la función en el punto de trabajo (interno a la ROC)
z0=1.5;
fz0=1/((z0+1)*(z0+3))
%Coeficientes calculados de la Serie para la ROC (ambos por Taylor)
cn=((-1).^n).*(2.^(-n-2)-2.^(-2*n-3)).*((z0-1).^n);
%Resultado de la serie
sum(cn)

%ROC 2 2<abs(z-1)<4
%Vector índice de los elementos de la serie (Taylor)
nT=0:100;
%Vector índice de los elementos de la serie (Laurent)
nL=-100:-1;
%Evaluacion en la función en el punto de trabajo (interno a la ROC)
z0=3.5;
fz0=1/((z0+1)*(z0+3))
%Coeficientes calculados de la Serie para la ROC (Laurent y Taylor)
cnL=((-1).^(-nL-1)).*(2.^(-nL-2)).*((z0-1).^nL);
cnT=((-1).^(nT+1)).*(2.^(-2*nT-3)).*((z0-1).^nT);
%Resultado de la serie
sum(cnT)+sum(cnL)

%ROC 3 abs(z-1)>4
%Vector índice de los elementos de la serie (Laurent)
nL=-100:-1;
%Evaluacion en la función en el punto de trabajo (interno a la ROC)
z0=5.5;
fz0=1/((z0+1)*(z0+3))
%Coeficientes calculados de la Serie para la ROC (ambos por Laurent)
cnL=((-1).^(-nL)).*(-2.^(-nL-2)+2.^(-2*nL-3)).*((z0-1).^nL);
%Resultado de la serie
sum(cnL)
```

Aplicación en MatLab

```
%OBTENCION DE RESIDUOS DE FRACCIONES RACIONALES
%Cuando se utilizan funciones racionales (cociente de polinomios en z),
%pueden obtenerse los residuos mediante la función "residue()". Como
%parámetros deben pasarse en forma de vector los coeficientes del numerador
%y denominador (en su forma completa). La función devuelve la totalidad de
%los coeficientes de la expansión en fracciones parciales, razón por la
%cual se obtendrá más de un valor si el polo es múltiple. Para efectuar
%productos entre polinomios se realiza la convolución entre sus
%coeficientes (que pueden ser complejos):

%1. Cálculo de los residuos de la función racional f(z)=z/(z^2+iz+2)

%Coeficientes del numerador
Num=[1 0];
%Coeficientes del denominador
Den=[1 i 2];
%Cálculo de los residuos de f(z)
residue(Num,Den)


%2. Cálculo de los residuos de la función racional f(z)=(z+1)(z+2)/(z+4)^2(z^2+3z+8)

%Coeficientes del numerador
Num=conv([1 1],[1 2]);
%Coeficientes del denominador
Den=conv(conv([1 4],[1 4]),[1 3 8]);
%Cálculo de los residuos de f(z)
residue(Num,Den)
```

Capítulo 6

Series de Fourier

Joseph Fourier (1768-1830), matemático francés, conocido principalmente por la serie y la integral que llevan su nombre. Sin embargo su interés abarcaba temas muy variados de la física experimental como la teoría de propagación y difusión del calor. Planteó la resolución de ecuaciones en derivadas parciales utilizando sus desarrollos en series infinitas de funciones trigonométricas.

6.1. Introducción

En el capítulo 2, y para el análisis del comportamiento de un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) ante una entrada genérica, utilizamos la integral de convolución, demostrando que cualquier señal continua podía descomponerse en una sumatoria de deltas desplazados y escalados. Conociendo la respuesta de un sistema LTI al impulso, podíamos encontrar la salida temporal del mismo convolucionando la entrada con la respuesta impulsional.

En este capítulo comenzaremos a descubrir una nueva forma de descomponer a la señal de entrada en una sumatoria de señales conocidas. Esta nueva descomposición se basará en la proyección de la señal de entrada en un conjunto de funciones ortogonales; estudiando principalmente las exponenciales complejas. Luego de descomponer la entrada veremos como responde el sistema ante cada uno de los elementos de esa sumatoria utilizando el principio de superposición.

Las conclusiones obtenidas en este capítulo serán de vital importancia para comprender efectos complejos en muchas áreas de la ingeniería y la física.

6.2. Conjunto de funciones ortogonales

Denominamos a $\psi_n(t)$ un conjunto de funciones *ortogonales* en un intervalo (a, b) si para un par cualquiera de ellas $\psi_m(t)$ y $\psi_k(t)$ se cumple:

$$\int_a^b \psi_m(t)\psi_k^*(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq k \\ T_0 & \text{si } m = k \end{cases} \tag{6.1}$$

donde ψ^* implica el complejo conjugado y $T_0 \neq 0$. A la integral (6.1) se la denomina en términos vectoriales, el producto interno o escalar y la designaremos como

$$< \psi_m, \psi_k >= \int_a^b \psi_m(t)\psi_k^*(t)dt \tag{6.2}$$

Si además $T_0 = 1$ al conjunto de funciones se las denomina *ortonormales.*

Recordemos que la exponencial compleja $e^{i\omega_0 t}$ es una señal continua periódica con período $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Probaremos a continuación que el conjunto de exponenciales complejas $e^{ik\omega_0} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ es ortogonal en cualquier intervalo $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Demostración:

($\Longrightarrow$)
Adoptando un intervalo $[0, T_0]$ arbitrario

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} e^{im\omega_0 t} e^{-ik\omega_0 t} dt &= \int_0^{T_0} e^{i(m-k)\omega_0 t} dt = \\ &= \left. \frac{e^{i(m-k)\omega_0 t}}{i(m-k)\omega_0} \right|_0^{T_0} \\ &= \frac{e^{i(m-k)\omega_0 T_0} - 1}{i(m-k)\omega_0} \end{aligned}$$

En el caso en que $m \neq k$ el numerador es cero ya que $e^{i(m-k)\omega_0 T_0} = e^{i(m-k)2\pi} = 1$ y el denominador es distinto de cero. Si $m = k$ y analizamos la primer integral planteada

$$\int_0^{T_0} 1dt = T_0$$

por lo tanto con $\psi_m(t) = e^{im\omega_0 t}$ y $\psi_k(t) = e^{ik\omega_0 t}$, y utilizando (6.2):

$$< e^{im\omega_0 t}, e^{ik\omega_0 t} >= \int_a^{a+T_0} e^{im\omega_0 t} e^{-ik\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq k \\ T_0 & \text{si } m = k \end{cases}$$

($\Longleftarrow$)

6.3. La serie exponencial de Fourier

6.3.1. La serie genérica

Para comenzar, supongamos que se desea aproximar a una función $f(t)$, absolutamente integrable en un intervalo $t = (a, b)$, mediante otra función escalada $C.x(t)$, donde C es la constante a determinar para intentar que la diferencia entre ambas sea mínima. Dentro de los criterios que se pueden adoptar como medida de error, utilizaremos el criterio de minimizar el error cuadrático medio. Planteamos así:

$$\varepsilon = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(t) - C.x(t)]^2\, dt$$

Para hallar el valor de C que minimiza el error cuadrático medio, desarrollamos el cuadrado y derivamos con respecto a C

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial C} = \frac{2}{b-a}\left\{C\int_a^b x^2(t)dt - \int_a^b x(t)f(t)dt\right\}$$

Si efectuamos la derivada segunda

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial C^2} = \frac{2}{b-a}\int_a^b x^2(t)dt \geq 0$$

comprobamos que es siempre mayor que cero (si $b > a$), por lo tanto igualando a cero la derivada primera encontraremos un mínimo

$$C = \frac{\int_a^b x(t)f(t)dt}{\int_a^b x^2(t)dt}$$

donde de (6.2) reconocemos al numerador como el producto interno entre la función que se desea aproximar y la función aproximante. Este producto interno puede ser considerado una *proyección* de una función sobre la otra. Dicho de otro modo, cuanta energía queda integrando el producto de ambas señales. Al denominador se lo conoce como la norma de una función y se designa como:

$$<\psi_m, \psi_m> = \int_a^b \psi_m(t)\psi_m^*(t)dt = \int_a^b |\psi_m(t)|^2\, dt = ||\psi(t)||^2 \tag{6.3}$$

Veamos un ejemplo

Ejemplo 6.3.1 *Se desea aproximar a la función periódica $f(t)$ de amplitud unitaria (6.1) mediante una función senoidal escalada $C.x(t) = C.sen(t)$. Calcule el valor de la constante C para minimizar el error cuadrático medio entre ambas funciones.*

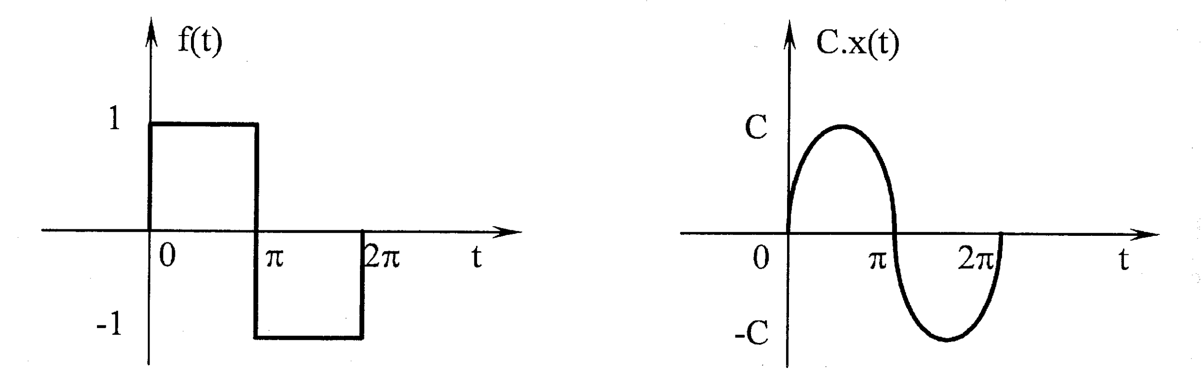


Figura 6.1: Función $f(t)$ a aproximar junto con la función $x(t)$ aproximante.

Calculamos el producto interno y la norma como

$$< f, x > = \int_0^{2\pi} f(t)x^*(t)dt = 2\int_0^{\pi} sen(t)dt = 4$$

$$< x, x > = \int_0^{2\pi} x^2(t)dt = 2\int_0^{\pi} sen^2(t)dt = \pi$$

por lo tanto el valor de C (amplitud del seno) que debemos colocar para minimizar el error cuadrático medio es

$$C = \frac{\int_0^{2\pi} x(t)f(t)dt}{\int_0^{2\pi} x^2(t)dt} = \frac{4}{\pi}$$

Observe que la amplitud resultante es levemente mayor que la de $f(t)$. Lo importante es observar la diferencia cuadrática media minimizada.

Intentaremos a continuación extender la idea de la minimización del error cuadrático medio, pero en vez de utilizar una función aproximante con una única constante, utilizaremos una serie de funciones ortogonales $\psi_n(t)$, donde el peso de cada una lo establece un coeficiente C_n:

$$\varepsilon = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[f(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\psi_n(t)\right]^2 dt$$

$$\varepsilon = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[f^2(t) + \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\psi_n(t)\right)^2 - 2f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\psi_n(t)\right] dt$$

Siguiendo pasos análogos al caso anterior, es necesario derivar con respecto a cada constante C_n e igualar la derivada a cero. Note que el término de la sumatoria elevado al cuadrado, generará productos cruzados que serán todos cera debido a la ortogonalidad de las funciones ψ_n. Este es un punto clave que justifica el uso de funciones ortogonales para el desarrollo de Fourier. Finalmente, derivando al error con respecto a cada C_n obtenemos

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial C_n} = \frac{2}{b-a}\left\{C_n\int_a^b \psi_n^2(t)dt - \int_a^b f(t)\psi_n(t)dt\right\}$$

Derivando por segunda vez verificamos que la derivada segunda sea mayor a cero, y por lo tanto aseguramos la existencia de un mínimo:

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial C_n^2} = \frac{2}{b-a}\int_a^b \psi_n^2(t)dt \geq 0$$

Finalmente igualando la primer derivada a cero obtenemos la primer fórmula de cálculo para hallar los coeficientes de la serie de funciones ortogonales $\psi_n(t)$ que aproxima a $f(t)$ en el sentido del error cuadrático mínimo:

$$C_n = \frac{\int_a^b f(t)\psi_n(t)dt}{\int_a^b \psi_n^2(t)dt} = \frac{< f, \psi_n >}{||\psi_n||^2}$$

6.3.2. La serie exponencial

La elección del conjunto de funciones ortogonales donde se proyectará $f(t)$ no es trivial. Si utilizamos como conjunto de funciones ortogonales a las exponenciales complejas $e^{in\omega_0 t}$,

los C_n se convierten en los **coeficientes de la serie exponencial de Fourier** y la función $f(t)$ se puede expresar como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n . e^{in\omega_0 t}$$

con

$$C_n = \frac{< f, \psi_n >}{||\psi_n||^2} = \frac{\int\limits_{T_0} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt}{\int\limits_{0}^{T_0} |e^{in\omega_0 t}|^2 \, dt} = \frac{1}{T_0} \int\limits_{T_0} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

Observe que la función $f(t)$ se representa por una sumatoria de exponenciales complejas periódicas $e^{in\omega_0}$, donde cada una está escalada por un coeficiente complejo C_n. Como los C_n son números complejos, este factor de escala tiene un módulo que modifica la amplitud y una fase que modifica el desplazamiento temporal. Las exponenciales son periódicas y de frecuencia múltiplo de la frecuencia inicial o fundamental ω_0. Los coeficientes son quienes les otorgan un peso (módulo y fase) a cada una de las exponenciales, para conformar la señal $f(t)$. El cálculo de los coeficientes particulares para cada función $f(t)$ se debe realizar por medio de la integral descripta.

De esta manera podemos enunciar la Serie de Fourier como:

Teorema 6.3.1 *Una función $f(t)$ periódica, con período T_0, se puede aproximar mediante una Serie de Fourier como*

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n . e^{in\omega_0 t}} \tag{6.4}$$

con

$$\boxed{C_n = \frac{1}{T_0} \int\limits_{T_0} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt} \tag{6.5}$$

Una de las clases de funciones periódicas que pueden representarse en término de series de Fourier son aquellas integrables al cuadrado sobre un periodo

$$\int\limits_{T_0} |f(t)|^2 dt < \infty$$

En este caso el desarrollo existe, y a medida que tomamos más coeficientes ($n \to \infty$), la energía de la señal original estará completamente representada en los coeficientes de su

serie. Sin embargo, existe un conjunto opcional de condiciones de convergencia establecidas por P.L.Dirichlet. Sin requerir la condición estricta que impone poseer energía finita en un intervalo, P.L.Dirichlet impuso un conjunto de tres condiciones opcionales que deben ser cumplidas por una función para que la misma posea desarrollo en Serie de Fourier:

1. *$f(t)$ debe ser absolutamente integrable sobre cualquier periodo*

$$\int_{T_0} |f(t)|dt < \infty$$

2. *Debe haber un número finito de máximos y mínimos en un período.*

3. *Debe haber un número finito de discontinuidades finitas en un período.*

Finalmente, P.L.Dirichlet estableció qué sucede si $f(t)$ presenta puntos de discontinuidad finitos. Como la serie es la suma de funciones continuas, la misma converge en estos puntos a valores específicos. De hecho, si la señal $f(t)$ posee discontinuidades finitas aisladas, la serie de Fourier converge al promedio de la diferencia entre las amplitudes de las discontinuidades (esto es a la mitad entre los valores de cada lado de la discontinuidad).

Las señales con las que trabajaremos deberán cumplir con las tres condiciones de Dirichlet y por lo tanto podrán ser desarrolladas en Serie de Fourier. Es importante destacar que la mayoría de las señales reales que se utilizan en la práctica cumplen fácilmente con estas condiciones. Algunas otras pueden no cumplir con la primera, que impone un área finita, y serán tratadas con otra transformada.

La representación de funciones periódicas en término de una sumatoria de exponenciales complejas escaladas por coeficientes C_n constituye un gran avance en el análisis de señales y sistemas. Las exponenciales complejas son señales periódicas que pueden fácilmente interpretarse como senos y cosenos utilizando la igualdad de Euler $e^{in\omega_0} = cos(n\omega_0) + isen(n\omega_0)$. Esto permite interpretar a cualquier señal periódica (frecuencia fundamental ω_0) ingresada a un sistema como la suma de senos y cosenos cuyas frecuencias son múltiplo de la frecuencia fundamental. Sería de especial interés conocer la respuesta del sistema para cada una de las frecuencias, y de esta manera poder estimar cual sería la salida para cualquier otra entrada. Recuerde que utilizando sistemas lineales, el estudio se puede realizar para cada uno de los términos de la sumatoria individualmente para luego sumar las respuestas al final.

Los coeficientes C_n

Analicemos algunas característica importantes de los coeficientes hallados. El valor del C_0 se calcula como

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t)dt$$

que es el valor medio de la función. Además observemos que si $f(t)$ es una señal real, el $C_n = C^*_{-n}$ donde el * implica el conjugado.

Demostración:

($\Longrightarrow$)
Utilizando la fórmula de cálculo (6.5), y sabiendo que $f(t)$ es real, y por lo tanto $f(t) = f^*(t)$,

$$\begin{aligned} C_n^* &= \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right\}^* \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{in\omega_0 t} dt = C_{-n} \end{aligned}$$

entonces

$$C_n^* = C_{-n} \tag{6.6}$$

($\Longleftarrow$)
Los módulos de los coeficientes con sub-índices opuestos coinciden y sus fases son opuestas. Podemos ver de esta manera que, por ejemplo: $|C_1| = |C_{-1}|$ y $arg\{C_1\} = -arg\{C_{-1}\}$

6.3.3. La serie trigonométrica

La serie descripta en la sección anterior involucra exponenciales complejas en su núcleo, mostrando cómo cualquier función que cumpla las condiciones de Dirichlet se puede descomponer en función de ellas. Debemos destacar que las exponenciales complejas están relacionadas en forma armónica; esto implica que una función periódica $f(t)$ de frecuencia 10Hz, se podrá descomponer en una serie de exponenciales complejas de frecuencias múltiplos de 10Hz: 10Hz, 20Hz, 30Hz etc., siendo los C_n los coeficientes que darán el peso que cada exponencial tendrá en la serie. Note que la descomposición no requiere frecuencias menores a la fundamental.

Sin embargo es llamativo que una función $f(t)$ real se descomponga en término de funciones complejas. Esta representación matemática puede justificarse fácilmente, como se verá a continuación.

Una forma alternativa de visualizar esta descomposición exponencial es utilizar la relación de Euler : $e^{ix} = cos(x) + i.sen(x)$. Además, como los coeficientes C_n son complejos, los escribiremos por convención como:

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \tag{6.7}$$

Entonces podemos escribir (6.4) como

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n.e^{in\omega_0 t} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{in\omega_0 t} \\
&= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-in\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

utilizando (6.6) y (6.7)

$$
\begin{aligned}
f(t) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - i.b_n}{2} e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + i.b_n}{2} e^{-in\omega_0 t} \\
&= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}}{2i} \\
&= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)
\end{aligned}
$$

donde se utilizó la igualdad $-1/i = i$.

Podemos ver que los $a_n/2$ son la parte real de los C_n y los $-b_n/2$ son la parte imaginaria. Utilizando 6.5 obtendremos las fórmulas de cálculo:

$$
\begin{aligned}
Re\{C_n\} &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) cos(n\omega_0 t) dt = \frac{a_n}{2} \\
Im\{C_n\} &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) sen(-n\omega_0 t) dt = \frac{-1}{T_0} \int_{T_0} f(t) sen(n\omega_0 t) dt = -\frac{b_n}{2}
\end{aligned}
$$

Como vemos además el b_0 es siempre cero, y como el $C_0 = (a_0 - i.b_0)/2) = a_0/2$, podemos reescribir la serie sólo en función de senos y cosenos:

$$
\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)} \qquad (6.8)
$$

y

$$
\boxed{a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t) cos(n\omega_0 t) dt \qquad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t) sen(n\omega_0 t) dt} \qquad (6.9)
$$

Aquí se observa una representación alternativa para funciones periódicas, donde no se utilizan exponenciales complejas sino senos y cosenos reales. Combinando términos de subíndice positivo y negativo se obtuvieron senos y cosenos. Preste atención que la sumatoria arranca de $n = 1$. Tanto la representación exponencial como trigonométrica son igualmente válidas. Para comprender mejor la relación entre ambas, es intuitivo pensar que los coeficientes complejos C_n pueden separarse en su parte real e imaginaria. El término independiente coincide: $C_0 = a_0/2$.

Los a_n y b_n

Podemos observar claramente que el $a_0/2$ es nuevamente el valor medio de la función, así como lo era el C_0. A primera vista puede resultar más sencillo calcular un único coeficiente C_n para la serie exponencial que dos coeficientes a_n y b_n para la serie trigonométrica. Sin embargo existen dos características importantes que se utilizan para simplificar la cantidad de cálculos a realizar en este último caso: **Si la función $f(t)$ es par, entonces todos los b_n resultan nulos. Si la función $f(t)$ es impar, entonces todos los a_n resultan cero.**

Demostración:

($\Longrightarrow$)
Si $f(t)$ es par, entonces $f(t) = f(-t)$ y al calcular el b_n

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)sen(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T_0} \left\{ \int_{-T_0/2}^{0} f(t)sen(n\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T_0/2} f(t)sen(n\omega_0 t)dt \right\}$$

haciendo un cambio de variables en la primer integral $t = -t$, $dt = -dt$ y teniendo en cuenta que $f(t)$ es par y el seno es impar

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0} \left\{ \int_{T_0/2}^{0} f(t)sen(n\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T_0/2} f(t)sen(n\omega_0 t)dt \right\} = \\ &= \frac{2}{T_0} \left\{ \int_{0}^{T_0/2} -f(t)sen(n\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T_0/2} f(t)sen(n\omega_0 t)dt \right\} = 0 \end{aligned}$$

de manera análoga, si f(t) es impar, entonces $-f(t) = f(-t)$ y al calcular el a_n

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T_0} \left\{ \int_{-T_0/2}^{0} f(t)cos(n\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T_0/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt \right\}$$

haciendo un cambio de variables en la primer integral $t = -t$, $dt = -dt$ y teniendo en cuenta que $f(t)$ es impar y el coseno es par

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0}\left\{\int_{T_0/2}^{0} f(t)cos(n\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T_0/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt\right\} = \\ &= \frac{2}{T_0}\left\{\int_{0}^{T_0/2} -f(t)cos(n\omega_0 t)dt + \int_{0}^{T_0/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt\right\} = 0 \end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$

Veamos un ejemplo completo.

Ejemplo 6.3.2 *Consideremos el desarrollo en Serie de Fourier de la señal $f(t)$ de la figura 6.2, periódica con período T_0 y frecuencia angular $\omega_0 = 2\pi/T_0$.*

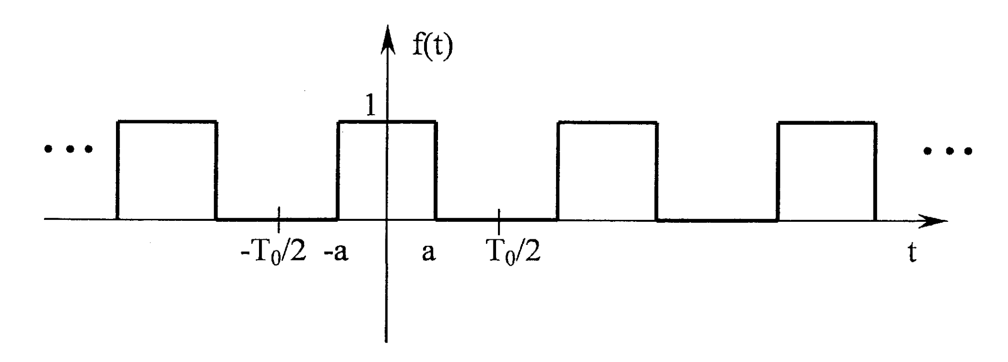


Figura 6.2: Función cuadrada periódica.

Como $f(t)$ es par, podemos asegurar que los $b_n = 0$. Calculamos entonces los a_n utilizando (6.9). Comenzamos por el a_0 por separado:

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)dt = \frac{2}{T_0}\int_{-a}^{a} dt = \frac{4a}{T_0}$$

Donde recordamos que el valor medio era $a_0/2 = 2a/T_0$, que verificamos claramente de la figura 6.2.

Calculamos ahora los a_n:

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T_0}\int_{-a}^{a} cos(n\omega_0 t)dt$$
$$= \frac{2}{T_0}\frac{sen(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{T_0}\frac{sen(n\omega_0 a)}{n\omega_0}$$

Entonces escribimos finalmente a $f(t)$ como

$$f(t) = \frac{2a}{T_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{4}{T_0}\frac{sen(n\omega_0 a)}{n\omega_0}}_{a_n}.cos(n\omega_0 t)$$

Para verificar el resultado, calculamos los coeficientes C_n de la serie exponencial, recordando que deben ser reales, ya que la función es par. Utilizando (6.5) comenzamos calculando el C_0:

$$C_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-a}^{a} f(t)dt = \frac{2a}{T_0}$$

Donde comprobamos que el C_0 es directamente el valor medio, y que $C_0 = a_0/2$. Calculamos ahora los C_n

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-a}^{a} e^{-in\omega_0 t}dt$$
$$= \frac{1}{T_0}\frac{e^{-in\omega_0 t}}{-in\omega_0}\bigg|_{-a}^{a} = \frac{1}{T_0}\frac{e^{-in\omega_0 a} - e^{in\omega_0 a}}{-in\omega_0} =$$
$$= \frac{2}{T_0}\frac{sen(n\omega_0 a)}{n\omega_0}$$

y así verificamos que $C_n = (a_n - ib_n)/2$, donde en este caso al ser $b_n = 0$, entonces $C_n = a_n/2$.

6.3.4. El fenómeno de Gibbs

En el último ejemplo, donde se desarrolló en serie de Fourier una señal cuadrada periódica, puede observarse un fenómeno especial muy llamativo. La señal cuadrada posee discontinuidades finitas. La serie, según la convergencia de Dirichlet, converge a los puntos medios de cada discontinuidad. Observe que esto sucede aun para cada uno de los términos de la aproximación, sin importar cuántos términos se adopten.

Los coeficientes C_n resultaron:

$$C_n = \frac{2}{T_0} \frac{sen(n\omega_0 a)}{n\omega_0}$$

Como la función es par, los C_n son reales, en la representación trigonométrica los b_n resultan cero y por lo tanto:

$$C_n = \frac{a_n}{2} \Longrightarrow a_n = \frac{4}{T_0} \frac{sen(n\omega_0 a)}{n\omega_0}$$

Supongamos algunos valores para el desarrollo, por ejemplo $T_0 = 4$ y $a = 1$. A continuación reemplazamos los parámetros para obtener los coeficientes:

$$a_n = \frac{sen(n\pi/2)}{n\pi/2}$$

El valor medio, el C_0 no puede calcularse a partir de este cálculo. Reemplazando en la definición o calculando geométricamente el área de la función dividido el periodo, obtenemos el término continuo $a_0/2$:

$$C_0 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

entonces la serie resulta

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n\pi/2)}{n\pi/2}.cos(n\pi t/2) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{sen(\pi/2)}{\pi/2}.cos(\pi t/2) + \frac{sen(\pi)}{\pi}.cos(\pi t) + \frac{sen(3\pi/2)}{3\pi/2}.cos(3\pi t/2)\ldots \end{aligned}$$

La función se dibuja en la figura 6.3 y su aproximación en la figura 6.4.

A medida que se incluyen los términos, la función aproximada se asemeja a la original, reduciéndose el error cuadrático medio. Observe que aun con la simple aproximación de un término, siempre los cruces en las discontinuidades son por el punto medio de las mismas: tanto en $t = 1$ y $t = -1$ los cruces son por $f(t) = 1/2$. Se denomina fenómeno de Gibbs al sobrepico que se observa en las cercanías de las discontinuidades. Estos sobrepicos poseen una amplitud levemente superior al máximo de la función. En este caso particular, nunca superan el 10 % del máximo (1,1). Aun cuando se adopte un número importante de coeficientes, los sobrepicos continúan apareciendo. A pesar de las apariencias, esto no contradice

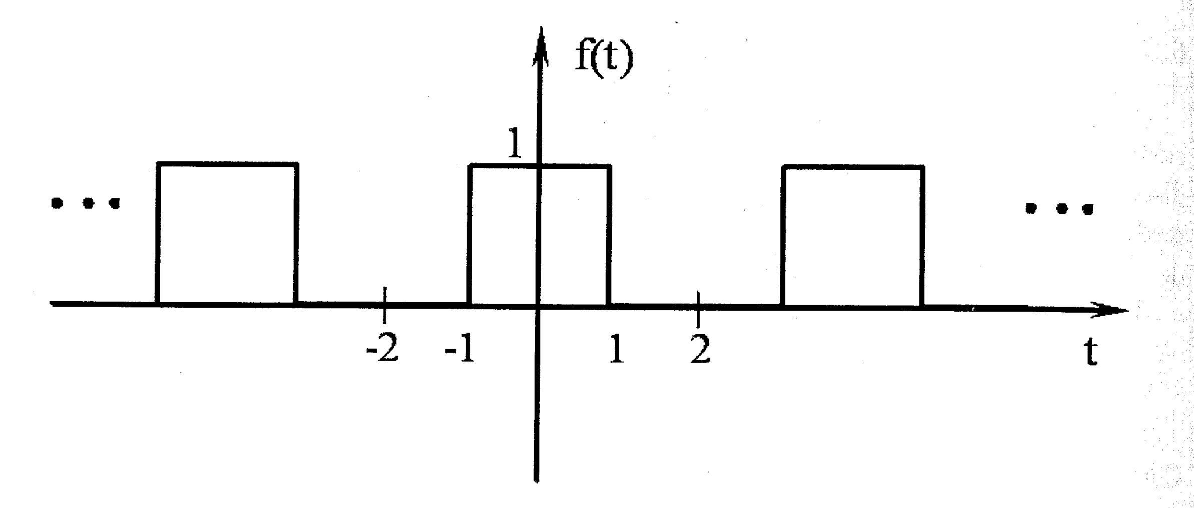


Figura 6.3: Función cuadrada periódica con $T_0 = 4$.

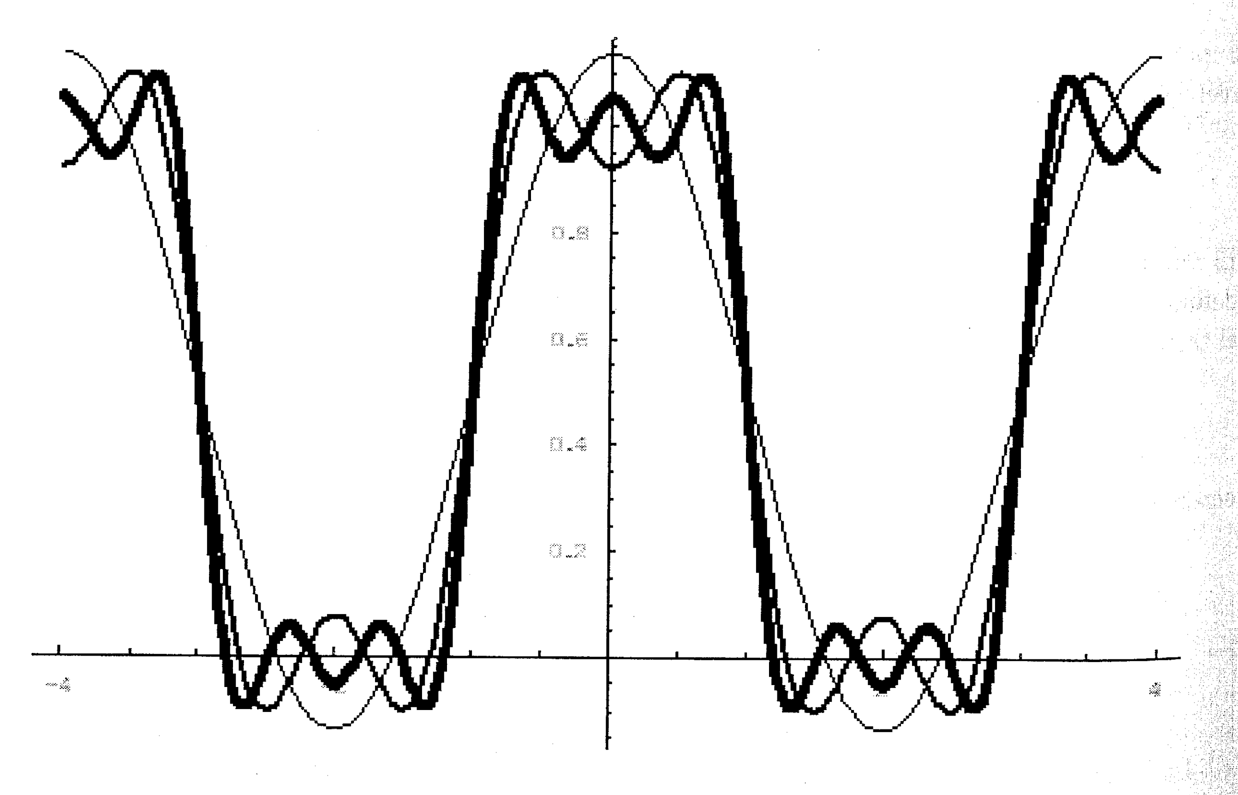


Figura 6.4: Función aproximada .

la convergencia. La misma se basa en minimizar el error cuadrático medio en término de areas (energía) y no de amplitudes. A medida que se toman más términos de la serie, los sobrepicos se hacen cada vez mas angostos y su amplitud se mantiene constante. De esta manera su área tiende a cero. Este es el denominado fenómeno de *Gibbs*.

6.4. La noción de espectro

Recordemos que el objetivo principal de descomponer a $f(t)$ en una serie de funciones (sumatoria), era poder reconocer como respondía un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) a cada término de la descomposición. Este fenómeno de superposición está garantizado en sistemas lineales. En nuestro caso, los términos individuales son exponenciales complejas. La salida $y(t)$ de un sistema LTI, con respuesta impulsional $h(t)$, a una entrada $x(t)$ era, utilizando la integral de convolución

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

donde se utilizó la propiedad conmutativa de la convolución. Ahora colocando en la entrada una exponencial compleja de frecuencia ω_0: $x(t) = e^{i\omega_0 t}$ observemos qué sucede a la salida:

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{i\omega_0(t-\tau)}d\tau = e^{i\omega_0 t}\int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega_0\tau}d\tau = H(\omega_0)e^{i\omega_0 t}$$

donde $H(\omega_0)$ es una constante compleja que depende de la respuesta impulsional del sistema y se calcula como

$$H(\omega_0) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega_0\tau}d\tau \tag{6.10}$$

Esto último nos muestra que al colocar una exponencial compleja de frecuencia ω_0 en la entrada de un sistema LTI, a la salida obtenemos la misma exponencial, de la misma frecuencia, pero escalada por la respuesta $H(\omega_0)$ del sistema. El valor $H(\omega_0)$ es un número complejo con módulo y fase. Así, en función del módulo, el sistema *atenuará* **o** *amplificará* **determinadas exponenciales y en función de la fase las desplazará en tiempo, dependiendo de la frecuencia ω_0.**

Si seguimos el mismo razonamiento en términos de senos o cosenos, podemos asegurar que al ingresar por ejemplo un seno de frecuencia ω_0 a un sistema LTI, a la salida obtendremos un seno de la misma frecuencia pero probablemente con amplitud y fase distintas. Los cambios de amplitud y fase dependerán de la respuesta en frecuencia $H(n\omega_0)$ del sistema para cada valor de ω_0.

Si al ingresar un tono puro a un sistema, a la salida observamos componentes de otra frecuencia, el sistema no es LTI.

Por lo tanto, y para analizar las características de las señales de entrada y salida, sería deseable poder observar gráficamente a los coeficientes C_n de la serie de Fourier de una señal periódica $f(t)$. Como los coeficientes son, para cada n, números complejos, debemos construir dos gráficas. La primera mostrará los módulos: $|C_n|$ y la denominaremos **Espectro de módulos**. La segunda mostrará las fase: $arg\{C_n\}$ y la denominaremos **Diagrama de Fases**.

Los gráficos son discretos y de pueden dibujar puntos y barras para cada coeficiente, donde el intervalo en el eje horizontal de frecuencias son unidades que indican los múltiplo de la frecuencia fundamental.

Sabiendo que $f(t)$ es real, y debido a (6.6), podemos concluir que los módulos de los coeficientes con subíndices opuestos coinciden y sus fases son opuestas. De esta forma y si $f(t)$ es real se cumplen las siguientes condiciones:

- **El espectro de módulos de una señal real es par.**
- **El diagrama de fases de una señal real es impar.**

Grafiquemos en la figura 6.5 el espectro de módulos del ejemplo 6.3.2. Recordemos que como la función era par, los C_n eran reales y por lo tanto el diagrama de fases sería cero para todos los coeficientes.

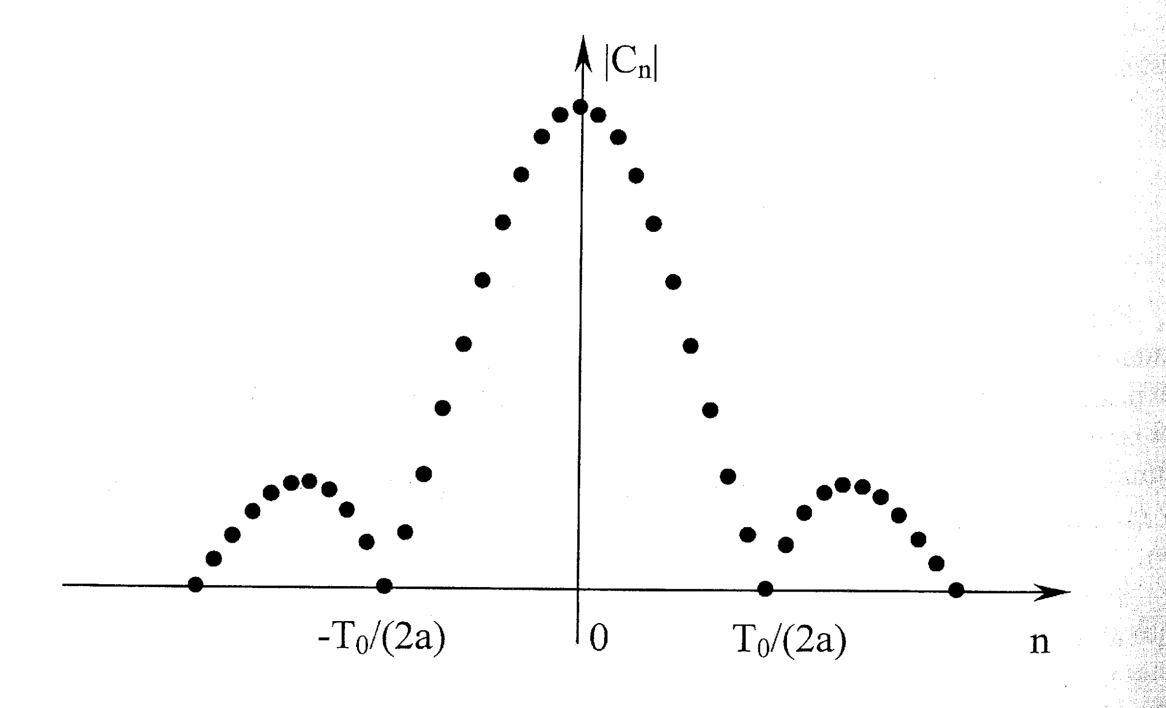


Figura 6.5: Espectro de módulo de la función cuadrada periódica. Cada punto representa un C_n, siendo el central el C_0.

6.5. La identidad de Párseval

Aun resta hacer mención a un tema central dentro de esta nueva forma de estudiar la señal temporal. Hasta el momento los conocimientos de los que disponíamos solo nos permitían hacer análisis temporales sobre el comportamiento de una función. Ahora podemos pensar que la función temporal periódica atravesó un *prisma* y fue descompuesta en *colores* fundamentales, donde los coeficientes ponderan la presencia de cada uno de ellos en la señal original. Esta perspectiva diferente debe cumplir con un requerimiento indispensable para su utilidad práctica: el principio de conservación de la energía.

Para la descomposición en series de Fourier, toda la potencia de la señal temporal está repartida en los coeficientes C_n. Los coeficientes de mayor módulo concentran mayor energía. Esta energía está distribuida entonces en función de la frecuencia de cada uno. La suma de las energías individuales de los infinitos coeficientes constituye la energía total de la señal.

Teorema 6.5.1 *Teorema o Identidad de Párseval.*

Sea $f(t)$ una función periódica, de período T_0, que cumple con las condiciones de Dirichlet para su desarrollo en Serie de Fourier, entonces

$$\boxed{\frac{1}{T_0}\int\limits_{T_0} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2} \tag{6.11}$$

Demostración:

$(\Longrightarrow)$

Tomemos dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ periódicas con período T_0. Sus desarrollos en Series de Fourier son, respectivamente

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{in\omega_0 t} \qquad f_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{in\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Probemos que la función $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ es periódica con el mismo período T_0 y su desarrollo en serie es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$$

donde los coeficientes C_n son

$$C_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m G_{n-m}$$

Como $f(t+T_0) = f_1(t+T_0)f_2(t+T_0) = f_1(t)f_2(t) = f(t)$, el período de $f(t)$ es T_0. Podemos plantear entonces el cálculo de sus coeficientes utilizando 6.5

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f_1(t)f_2(t)e^{-in\omega_0 t}dt = \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m e^{im\omega_0 t}\right) f_2(t)e^{-in\omega_0 t}dt = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m \left(\frac{1}{T_0}\int_{T_0} f_2(t)e^{-i(n-m)\omega_0 t}dt\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m G_{n-m} \end{aligned}$$

Por lo resuelto hasta ahora podemos decir que

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f_1(t)f_2(t)e^{-in\omega_0 t}dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m G_{n-m}$$

que para $n=0$ resulta:

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} f_1(t)f_2(t)dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m G_{-m}$$

Si ahora adoptamos $f_2(t) = f_1^*(t)$, donde * implica el conjugado, es simple demostrar que los coeficientes resultarán $G_m = (D_{-m})^*$ y $G_{-m} = (D_m)^*$. Por lo tanto

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} f_1(t)f_1^*(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |f_1(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m D_m^* = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |D_m|^2$$

de donde queda demostrado el teorema.

($\Longleftarrow$)

De esta forma se observa que solo sumando la energía de los infinitos coeficientes se obtiene la energía de la señal original. Al ingresar una señal periódica a un sistema real debemos pensar que se están ingresando infinitos senos y cosenos de frecuencias múltiplo de la fundamental. Cada término, y en función de su frecuencia, ingresa con una proporción de la energía total. Los sistemas reales no permiten el ingreso de señales con componentes de frecuencias infinitas y por lo tanto *recortan* ese número de términos a una cantidad *finita*. Este *truncamiento* produce que la señal de entrada real capturada por el sistema no sea exactamente igual a la ideal representada por la serie. De esta manera, una señal cualquiera periódica ingresada en un sistema real, sufre un recorte de sus componentes de alta frecuecia. El nivel de este recorte, o el denominado *ancho de banda* en la entrada,

depende de las características del sistema. Los efectos sobre la señal dependerán de las amplitudes de los coeficientes recortados. Este efecto puede escucharse en las señales de audio transmitidas por un teléfono. El ancho de banda del canal telefónico está limitado a 4KHz, y por lo tanto las componentes en frecuencia mas agudas se recortan distorsionando la calidad del sonido.

Un punto destacado en la descomposición en Series de Fourier es que su convergencia es muy robusta, y con pocos términos de la serie se puede reconstruir un alto porcentaje de la potencia original. El lector puede verificar que en desarrollo del ejemplo 6.3.2, adoptando 10 coeficientes se consigue representar mas del 95 % de la energía de la señal original.

6.6. La Serie del seno y del coseno

Las señales seno y coseno son periódicas y por lo tanto poseen desarrollo en serie de Fourier. Este desarrollo es muy particular ya que estas señales están compuestas por un tono puro (de una única frecuencia ω_0). Podemos asimilar el efecto que veremos con lo que sucede al descomponer un polinomio en serie de Taylor. La serie de Taylor propone descomponer una función en potencias de $(x - x_0)^n$. Si por ejemplo se desea descomponer un polinomio $f(x) = x^2 + 2x + 1$ con $x_0 = 0$, el polinomio *ya está desarrollado en serie de potencias.* Algo similar ocurre con el seno y el coseno.

Utilizando la descomposición en término de exponenciales complejas, escribimos:

$$\begin{aligned} sen(\omega_0 t) &= \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} = \frac{e^{i\omega_0 t}}{2i} - \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2i} \\ cos(\omega_0 t) &= \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} = \frac{e^{i\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2} \end{aligned}$$

Vemos que directamente las series de Fourier poseen solo dos coeficientes: el C_1 y el C_{-1}. Para el caso del seno:

$$sen(\omega_0 t) = \underbrace{\frac{1}{2i}}_{C_1} e^{i\omega_0 t} - \underbrace{\frac{1}{2i}}_{C_{-1}} e^{-i\omega_0 t}$$

Como el seno es impar, los C_n son imaginarios puros. Para el coseno

$$cos(\omega_0 t) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{C_1} e^{i\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{C_{-1}} e^{-i\omega_0 t}$$

como es una señal par, los C_n son reales. Todo el resto de los coeficientes son cero.

6.7. Resumen del capítulo

En el presente capítulo se presentó una nueva herramienta muy poderosa para el análisis de señales y sistemas: la descomposición de señales periódicas temporales en Serie de

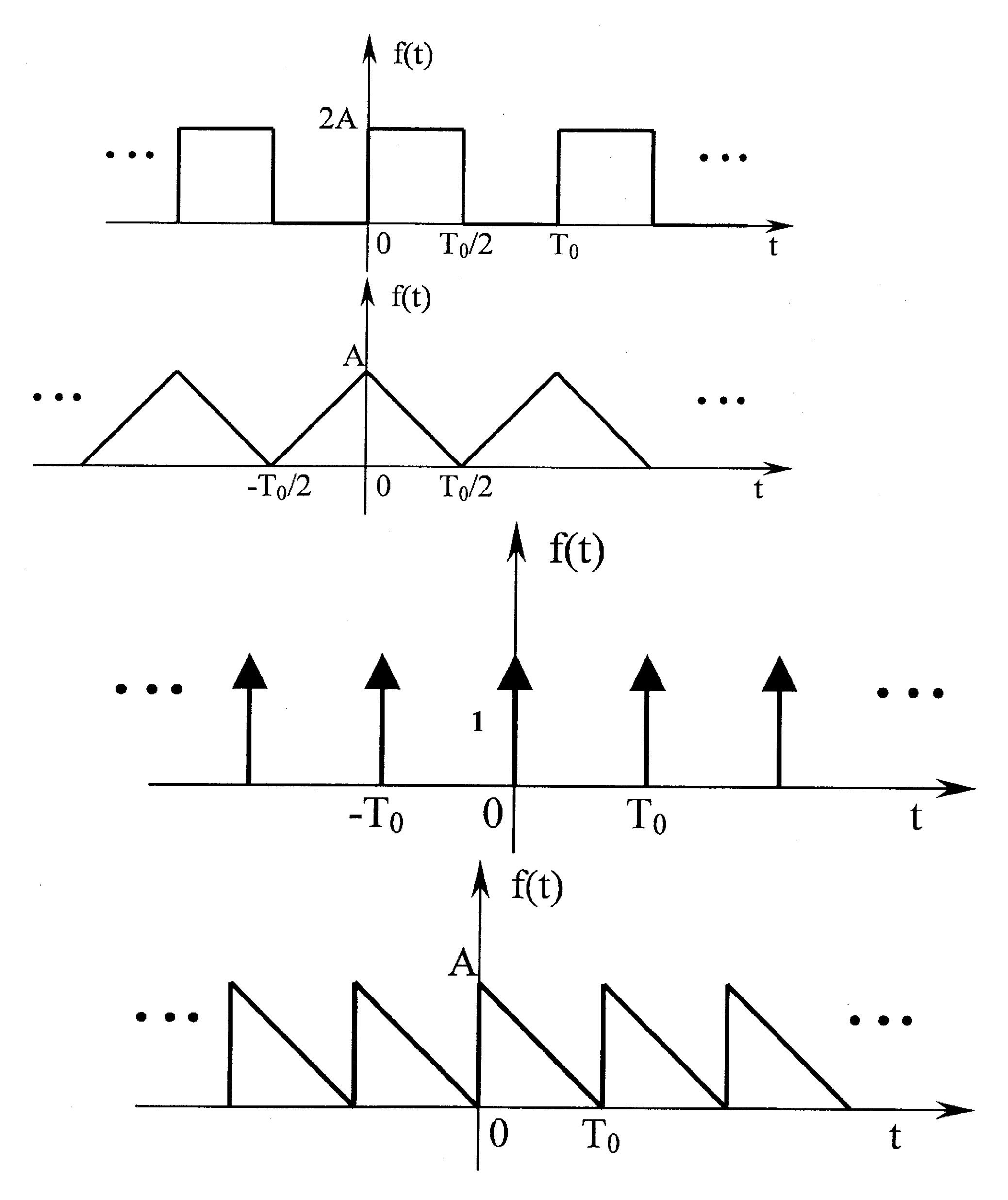
Fourier. De esta forma, una señal periódica, de energía finita en un periodo, puede ser descompuesta en una serie de exponenciales complejas escaladas por coeficientes complejos C_n. Las exponenciales son de frecuencia múltiplo de la original. Los pesos de cada una quedan determinados por coeficientes complejos C_n. Como la serie es una sumatoria de señales, este tipo de descomposición se adapta naturalmente al estudio de sistemas lineales, donde se pueden analizar las contribuciones de cada término por separado.

Las exponenciales complejas y los coeficientes C_n pueden interpretarse en forma trigonométrica como una serie de senos y cosenos escalados. Los C_n tienen módulo y fase. Para cada frecuencia ω_0, el valor de módulo representa el peso (amplitud) de la exponencial compleja que lo acompaña, y la fase su desplazamiento temporal.

Toda la energía de la señal original queda representada, en función de la frecuencia, en los coeficientes C_n. Los coeficientes de la Serie de Fourier son aquellos que minimizan el error cuadrático medio entre la función y su descomposición. Obtuvimos además la visión del espectro de la señal tanto en módulo como en fase, graficando los coeficientes complejos de la descomposición C_n. Para señales reales, el espectro de módulos resulta par y el de fases impar. De ahora en adelante, las señales periódicas podrán ser analizadas en su representación espectral para ser estudiadas en función de la frecuencia.

6.8. Problemas propuestos

1. Calcular la Serie de Fourier de cada una de las siguientes funciones y graficar el espectro de módulo para $T_0 = 4$.



Rtas:

$$f(t) = A + \frac{2A}{i\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{i(2m+1)\omega_0 t}$$

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{i(2m+1)\omega_0 t}$$

$$f(t) = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{m=1}^{\infty} cos(m\omega_0 t)$$

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k} sen(m\omega_0 t)$$

2. Para cada una de las funciones anteriores, calcule el porcentaje de la potencia total que queda representada en los 5 primeros componentes: $C_{-5} \cdots C_5$.

3. Calcule la Serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas con período T_0, (encuéntrelo en el caso en que no este explicitado). Se recomienda dibujar las señales temporales.

   a) $f(t) = sen(4t + \pi/4)$.

   Rta: $f(t) = \frac{1}{2}e^{i\pi/4}e^{-i4t} + \frac{1}{2}e^{-i\pi/4}e^{i4t}$.

   b) $f(t) = sen^2(t)$.

   Rta: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-i2t} - \frac{1}{4}e^{i2t}$

   c) $f(t) = e^{-2t}$ con $T_0 = (0, 4)$.

   Rta: $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-4}senh(4)}{4+in\pi} e^{in\pi t/2}$

   d) $f(t) = t^2$ con $T_0 = (-1, 1)$.

   Rta: $C_0 = 1/3$, $C_n = \frac{2\pi^2(-1)^n}{n}$, $\omega_0 = \pi$

   e) $f(t) = 2|t|$ con $T_0 = (-2, 2)$.

   Rta: $C_0 = 1$, $C_n = \frac{2[(-1)^n - 1]}{(n\pi)^2}$, $\omega_0 = \pi/2$

   f) $f(t) = sen(2\pi t/5) + cos(4\pi t/3)$.

   Rta: $\omega_0 = 2\pi/15$, $C_3 = 1/2i$, $C_{-3} = -1/2i$, $C_{10} = C_{-10} = 1/2$

4. Se armó en el laboratorio el circuito de la figura 6.6, donde $v_i(t)$ es la tensión de entrada y $v_c(t)$ es la tensión de salida sobre el capacitor.

   Si la señal de entrada es una función periódica cuadrada, de ciclo de actividad 0,5, período 1seg y amplitud 10V; suponer $R = 1K\Omega$ y $C = 0{,}1mF$. Se pide:

   a) Hallar la Serie de Fourier de la señal de entrada.

   b) Hallar la solución de la ecuación diferencial para un seno genérico en su entrada.

   c) Hallar la salida $v_c(t)$ si la señal de entrada se trunca hasta el quinto coeficiente inclusive, utilizando superposición.

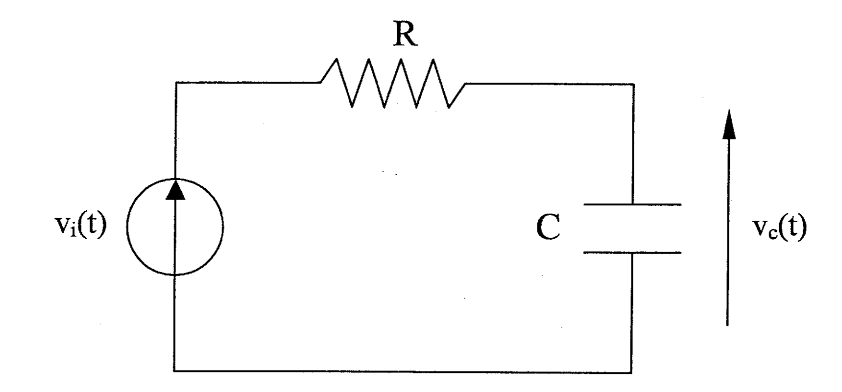


Figura 6.6: Circuito R-C serie. La salida es la tensión sobre el capacitor.

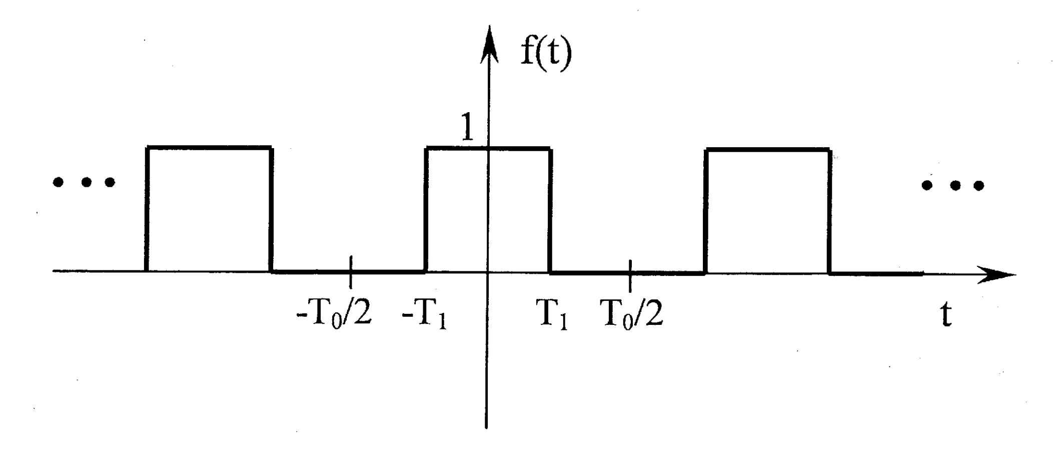


Figura 6.7: señal cuadrada periodica.

5. Se desea estudiar el efecto que produce en el espectro, el aumento del período de una señal. Para esto utilizaremos la señal dibujada en la figure 6.7, donde mantendremos a $T_1 = 1$ constante en todo momento e independiente de T_0.

   Se pide:

   a) Calcular los coeficientes C_n de la Serie exponencial de Fourier.

   b) Graficar el espectro de módulos pero colocando en el eje horizontal $n\omega_0$ en vez de n; y en el vertical $|C_n|T_0$ en vez de $|C_n|$. Estudiar los casos con $T_0 = 2$, $T_0 = 4$, $T_0 = 8$ y $T_0 = 16$, realizando un gráfico en escala para cada uno.

   c) Con los cuatro gráficos del ejercicio anterior se pide hallar la *envolvente* de los coeficientes. Sacar conclusiones con respecto a qué pasaría con la misma si se cambia T_1.

Aplicación en MatLab

```
%RECONSTRUCCION DE SEÑALES DESARROLLADAS EN SERIE DE FOURIER
%Para la reconstrucción de una señal genérica f(t) es necesaria la
%expresión de los coeficientes de la serie (Cn) de manera que la sumatoria
%del producto de cada uno de ellos por la exponencial compleja
%exp(i*n*w0*t) (armónica resultante) genere (en conjunto con su conjugada)
%los senos y cosenos reales que conforman señal.

%Ejercicio      SEÑAL PERIODICA TRIANGULAR
%-----------------------------------------------------------------------------
%Constantes
%Amplitud, Periodos
A=1; T0=2;
%Frecuencia Angular
w0=(2*pi)/T0;
%Limite de coeficientes a utilizar
lim_coef=30;
%Diferencial Temporal
dt=0.01;

%1.Construcción de la señal periódica original para comparación-----------------
%Intervalo temporal Negativo
tan=-T0/2:dt:0-dt;
%Intervalo temporal Positivo
tap=0:dt:T0/2-dt;
%Conformación de 1 período de la señal
fa=[(2*A/T0)*tan+A (-2*A/T0)*tap+A];
%Conformación de 3 períodos de la señal
fap=repmat(fa,1,3);
tt=length(fap)*dt;
t0=tt/2;
%Intervalo temporal completo
t=-tt/2:dt:tt/2-dt;

%2.Reconstrucción por serie de Fourier en base a los Cn--------------------------
%Coeficientes n negativos
nneg=-lim_coef:-1;
%Coeficientes n positivos
npos=1:lim_coef;
%Vector n
n=[nneg 0 npos];
%Componente de continua
C0=A/2;
%Armado de un vector con los Cn conforme la expresión
Cn=[(A/(pi^2))*((1-(-1).^nneg)./nneg.^2) C0 (A/(pi^2))*((1-(-1).^npos)./npos.^2)];
%Nota: Se puede utilizar la expresión de los Cn (aplicando el vector n únicamente)
%para luego reemplazar en el vector resultante el valor NaN que corresponde al C0.
%Sumatoria de las armónicas
ff=0;
for k=1:length(n),
  ff=ff+Cn(k)*exp(i*n(k)*w0*t);
end

%Aplicación del Teorema de Parseval---------------------------------------------
%Integral de la energía en un período (fa)
PT_t=(1/T0)*sum(fa.^2)*dt
%Cálculo de la energía distribuida en los coeficientes (desde -lim_coef a lim_coef)
PT_f=sum(abs(Cn).^2)

%Visualización------------------------------------------------------------------
subplot(311);
plot(t,fap,'b',t,ff,'r');xlabel('t'),ylabel('f(t)');
title('Problema 6.1 b) - f real -> Esp. ampl. PAR, Esp. fases IMPAR (=0 si f es
par)');
legend('Señal original','Señal reconstituida',1);
grid;
%Generación del Espectro de Amplitud (PAR)
subplot(312),stem(n,abs(Cn)),xlabel('n'),ylabel('abs(Cn)'),grid;
%Generación del Diagrama de Fase (IMPAR)
subplot(313),stem(n,angle(Cn)*180/pi),xlabel('n'),ylabel('angle(Cn)'),grid;
```

Capítulo 7

Transformada de Fourier

7.1. Introducción

En el capítulo anterior trabajamos con funciones periódicas y hallamos su descomposición en Serie de Fourier. Esa serie estaba compuesta por exponenciales complejas (equivalentes a senos y cosenos) relacionadas armónicamente. Solo se requieren senos y cosenos de frecuencia múltiplo de la frecuencia fundamental de la señal periódica a descomponer. Si la función no es periódica, la idea de un *espectro discreto* con coeficientes ponderados C_n a frecuencias múltiplo de la fundamental se diluye y aparece un espectro continuo con bandas de energía en función de la frecuencia. En el presente capítulo desarrollaremos el concepto de Transformada de Fourier. Esta nueva herramienta será más genérica que la Serie de Fourier y nos ayudará a comprender en detalle cómo caracterizar la transferencia de un sistema. Utilizaremos a la transformada para resolver ecuaciones diferenciales en régimen permanente y presentaremos conceptos de filtrado. En la primer parte nos ocuparemos de los desarrollos estrictamente matemáticos, dejando las aplicaciones para el final del capítulo.

7.2. La Transformada de Fourier

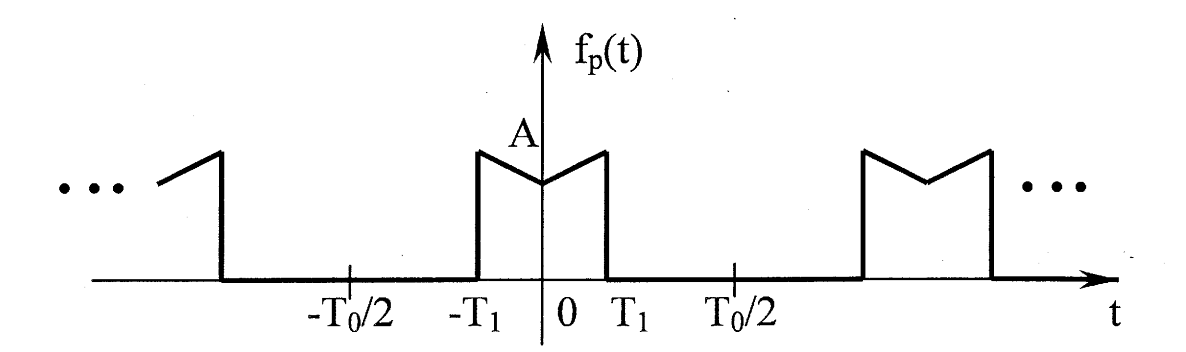
Partimos inicialmente de la descomposición en Serie de Fourier de una función periódica $f_p(t)$, que cumple las condiciones de Dirichlet, utilizando (6.4) y (6.5)

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n . e^{in\omega_0 t} \tag{7.1}$$

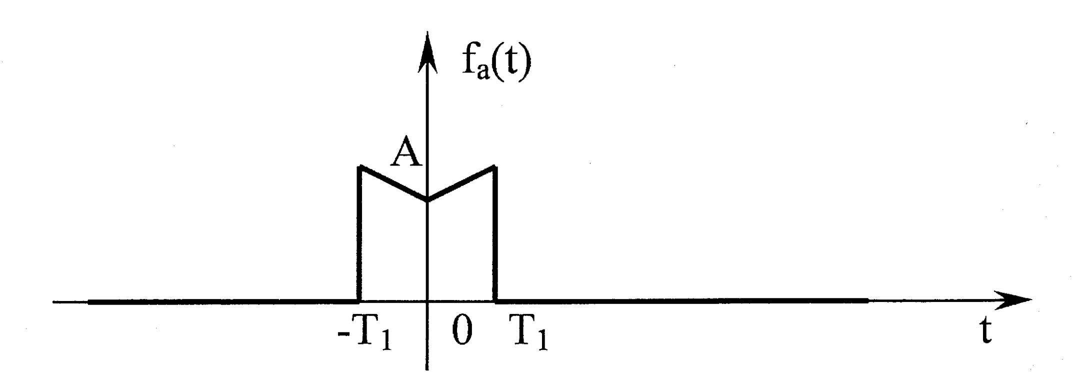
con

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f_p(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

Además utilizamos una función aperiódica $f_a(t)$ tal que para $t \in (-T_0/2, T_0/2)$, $f_a(t) = f_p(t)$ y vale cero para el resto.



$$f_a(t) = \begin{cases} f_p(t) & \text{si } |t| < T_0/2 \\ 0 & \text{si } |t| > T_0/2 \end{cases}$$



Podríamos decir que si hacemos tender a infinito el período de la función periódica, esta se transformará en la función aperiódica. Es importante aclarar que la *forma* de la señal $f_p(t)$ no se modifica: no se estira proporcionalmente al aumento de T_0, sino que el valor de T_1 se mantiene constante.

$$\lim_{T_0 \to \infty} f_p(t) = f_a(t) \tag{7.2}$$

Veamos qué sucede con la serie al hacer tender el período T_0 a infinito. Primero si planteamos

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

como la integral se realiza sobre un intervalo $(-T_0/2, T_0/2)$, podemos colocar $f_a(t)$ en vez de $f_p(t)$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} f_a(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_a(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

donde además pudimos extender el límite de la integral ya que la función aperiódica vale cero para $|t| > T_0/2$.

Definición 7.2.1 *Definimos a la* **envolvente** *de los coeficientes como*

$$F(\omega) \triangleq \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{7.3}$$

Utilizando esta nueva definición, escribimos

$$\boxed{C_n = \frac{F_a(n\omega_0)}{T_0}} \tag{7.4}$$

y ahora reemplazamos en (7.1), donde además $1/T_0 = \omega_0/(2\pi)$

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_a(n\omega_0)}{T_0} . e^{in\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_a(n\omega_0) . e^{in\omega_0 t} \omega_0$$

Analicemos qué sucede al aplicar en ambos miembros el límite de $T_0 \to \infty$. A la izquierda de la igualdad, y por (7.2) obtenemos $f_a(t)$. Como $T_0 \to \infty$ entonces $\omega_0 \to 0$ y sobre la derecha la sumatoria se transforma en una integral, y ω_0 en un diferencial. De esta manera hallamos:

$$\begin{aligned} \lim_{T_0 \to \infty} f_p(t) &= \lim_{\omega_0 \to 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_a(n\omega_0) . e^{in\omega_0 t} \omega_0 \right\} \\ f_a(t) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\infty}^{\infty} F_a(\omega) . e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Gráficamente observamos el efecto de tender $T_0 \to \infty$ o $\omega_0 \to 0$ en la figura 7.1. Note cómo la sumatoria se convierte en una integral, y el paso discreto $n\omega_0$ en la variable continua ω.

Para interpretar estos resultados debemos recordar que el espectro de la señal periódica $f_p(t)$ consistía en coeficientes C_n en función de n. Esta representación no permite comparar

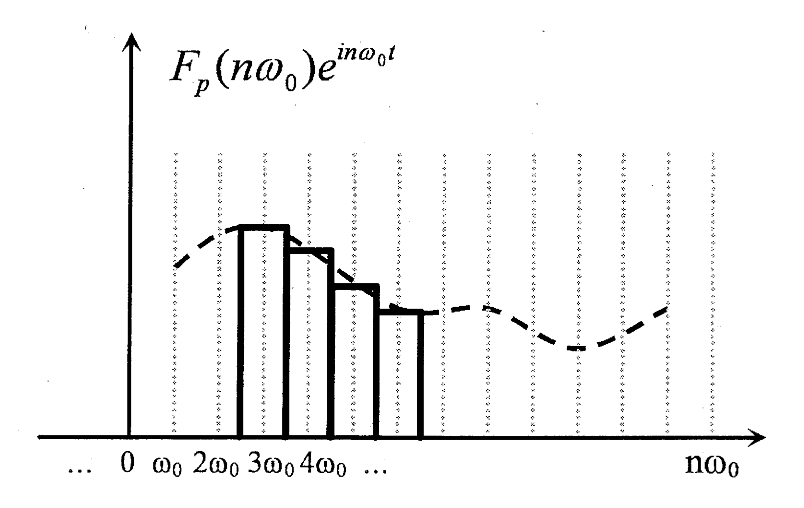


Figura 7.1: Aproximación integral.

las componentes frecuenciales de dos señales en valor absoluto. Por ejemplo, dos senos, uno de 1Hz y otro de 1KHz, poseen solamente un par de coeficientes en su serie: el C_1 y el C_{-1}. Son señales de frecuencias muy diferentes pero sus espectros son idénticos. Ambas tienen dos coeficientes con el mismo peso pero sus frecuencias fundamentales son distintas.

Para resolver este problema y poder comparar las componentes en frecuencia de las señales en valor absoluto, se propone que el eje horizontal este escalado colocando $n\omega_0$. Esta nueva calibración permite comparar correctamente las componentes frecuenciales de cada señal. Cuanto más alejados aparecen las componentes del origen, de mayor frecuencia son las exponenciales complejas asociadas.

Como estamos tendiendo $T_0 \to \infty$, los coeficientes C_n (6.5) tienden a cero (por el $1/T_0$ de su cálculo). Para superar este problema recalibremos también el eje vertical, en vez de utilizar $|C_n|$ utilicemos $|C_n|T_0$.

Como el $\omega_0 \to 0$ las *líneas espectrales* separadas $n\omega_0$ se acercan cada vez mas, hasta formar un **espectro continuo**. De esta manera concluimos:

El espectro de una señal aperiódica es continuo

Las señales periódicas requerían un número infinito de senos y cosenos de frecuencias discretas para su reconstrucción. Estas frecuencias eran múltiplo de la fundamental. Las señales aperiódicas ya no poseen un período o una frecuencia fundamental, por lo tanto para su reconstrucción se requieren también infinitos senos y cosenos, pero de frecuencias infinitamente próximas (bandas frecuenciales). Los coeficientes de mayor amplitud poseen mayor energía e indican la presencia de determinadas componentes frecuenciales en la señal descompuesta. En el caso aperiódico sucede algo similar: en el espectro continuo, amplitudes mayores indican bandas de frecuencia de mayor energía. Por ejemplo, si se está observando el espectro de un tramo de una canción donde se incluye el sonido de una guitarra, las bandas de frecuencia que incluyen a este instrumentos aparecerán con mayor amplitud.

Note que el espectro continuo, definido a través de la *envolvente*, no depende del período de la señal (que ahora no existe más) sino de su forma: por eso en el caso de la señal periódica la amplitud de los coeficientes de la serie queda limitada por la envolvente de la transformada (ecuación 7.4). Esto quiere decir que una señal con oscilaciones o saltos abruptos concentrará su energía en bandas de alta frecuencia, mientras que señales de formas suaves tendrá su energía concentrada en frecuencias bajas. Las señales periódicas concentran su energía solo en frecuencias múltiplo de la fundamental.

Retomando la ecuación 7.4 concluimos:

Si se ”discretiza.el espectro de una señal aperiódica cada $n\omega_0$ obtenemos (proporcionalmente) la amplitud de los C_n

Finalmente formalizamos: La Transformada de Fourier, o envolvente, de una función aperiódica, se calcula como

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt} \tag{7.5}$$

y para retornar a la función temporal, utilizamos la Antitransformada de Fourier

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega).e^{i\omega t}d\omega} \tag{7.6}$$

La nomenclatura utilizada clásicamente es

$$f(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

Tendremos así una nueva representación de la señal $f(t)$ en un plano transformado llamado .Espectro”. En el eje horizontal tenemos la variable continua ω que equivale a un $n\omega_0$ en una señal periódica; y en el eje vertical tenemos el módulo $|X(\omega)|$ (en el espectro de módulos) que equivale al $C_n.T_0$ o la fase $arg\{X(\omega)\}$ (en el diagrama de fases) de la transformada de Fourier.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 7.2.1 *Calcule la transformada de Fourier de la señal $f(t) = p_a(t)$ (pulso de ancho $2a$) de la figura 7.2.*

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & si\ |t| < a \\ 0 & si\ |t| > a \end{cases}$$

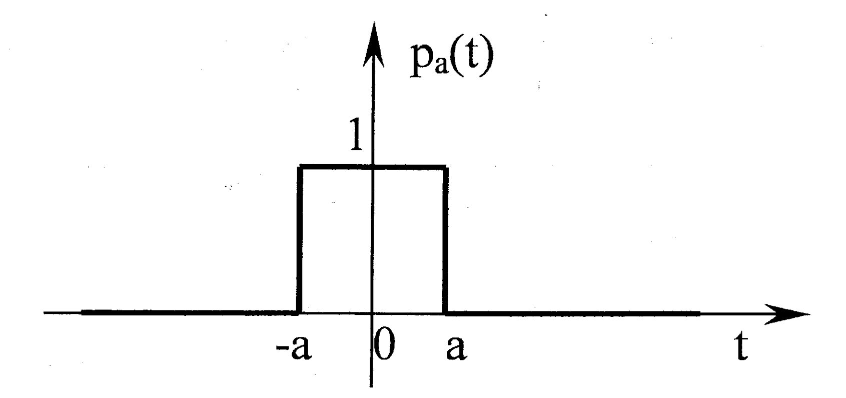


Figura 7.2: $p_a(t)$: Pulso centrado de ancho $2.a$

Utilizamos la fórmula de cálculo (7.5)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-a}^{a} 1.e^{-i\omega t}dt = \left.\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right|_{-a}^{a} = \frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{i\omega} = 2\frac{sen(\omega a)}{\omega}$$

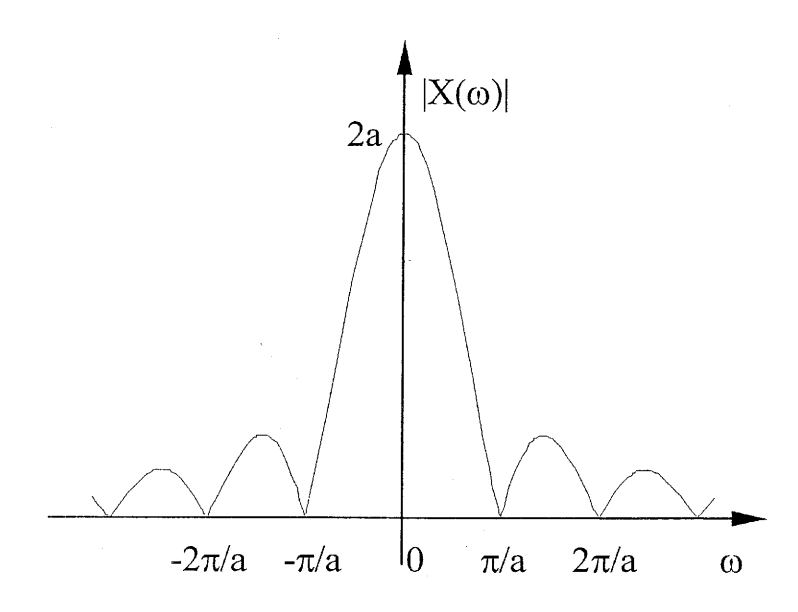


Figura 7.3: Espectro de la función $p_a(t)$. Es la envolvente de los coeficientes de la serie de la función periódica $f_p(t)$.

Vemos claramente en la figura 7.3 cómo el espectro es continuo y tiene la misma forma que el analizado en el capítulo anterior para la misma señal pero periódica. Además notamos que, como la $f(t)$ es real, el espectro de módulos es par. Asimismo, como la señal temporal es par, la transformada es una función real (pensar que el $X(\omega)$ es como el $C_n.T_0$, y si una

función es par, sus C_n son reales). Por esto último el diagrama de fases es cero para todo ω.

Veamos un segundo ejemplo:

Ejemplo 7.2.2 *Calcule la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-a.t}u(t)$ con $a > 0$.*

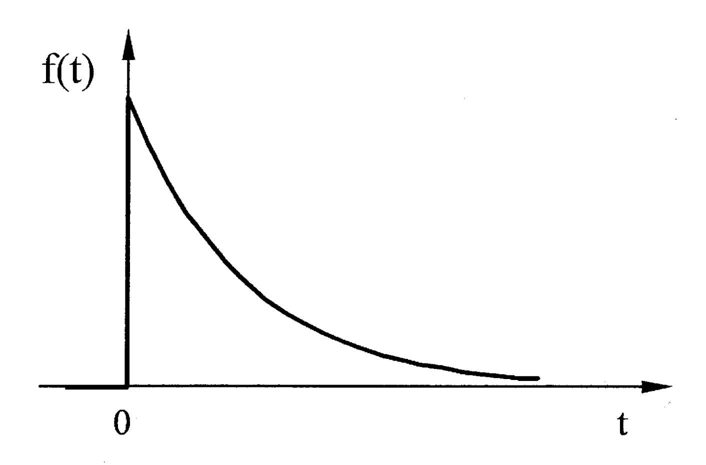


Figura 7.4: Función exponencial.

Utilizamos la fórmula de cálculo (7.5) y reemplazamos $f(t)$ (note que el límite inferior de la integral pasó a ser cero ya que $f(t) = 0$ para $t < 0$)

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^\infty e^{-a.t}e^{-i\omega t}dt = \int_0^\infty e^{-(i\omega+a)t}dt \\ &= \left.\frac{e^{-(i\omega+a)t}}{-(i\omega+a)}\right|_0^\infty = 0 - \frac{1}{-(i\omega+a)} = \frac{1}{(i\omega+a)} \end{aligned}$$

entonces

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{i\omega+a}$$

La transformada, en este caso, es una función de variable compleja. Hallemos su módulo y su fase en forma analítica:

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+a^2}} \qquad arg\{X(\omega)\} = -arctg(\frac{\omega}{a})$$

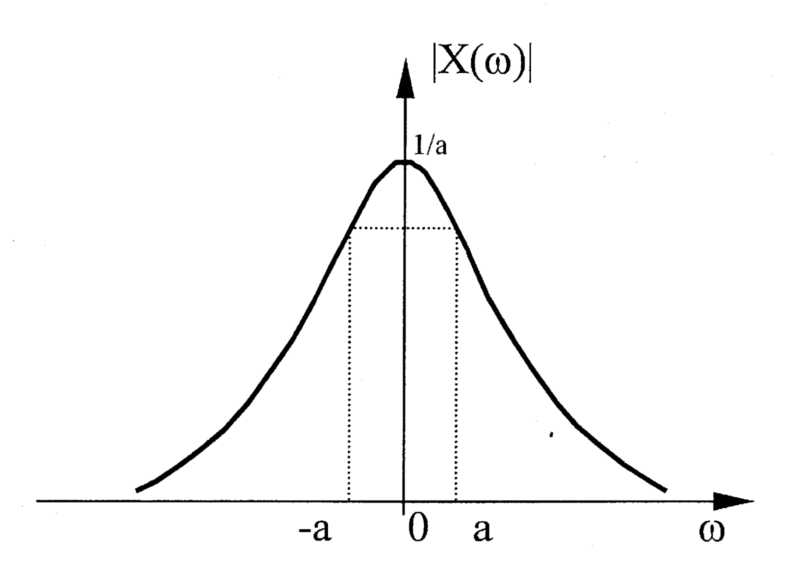


Figura 7.5: Espectro de módulo de $f(t) = e^{-a.t}u(t)$ con $a > 0$

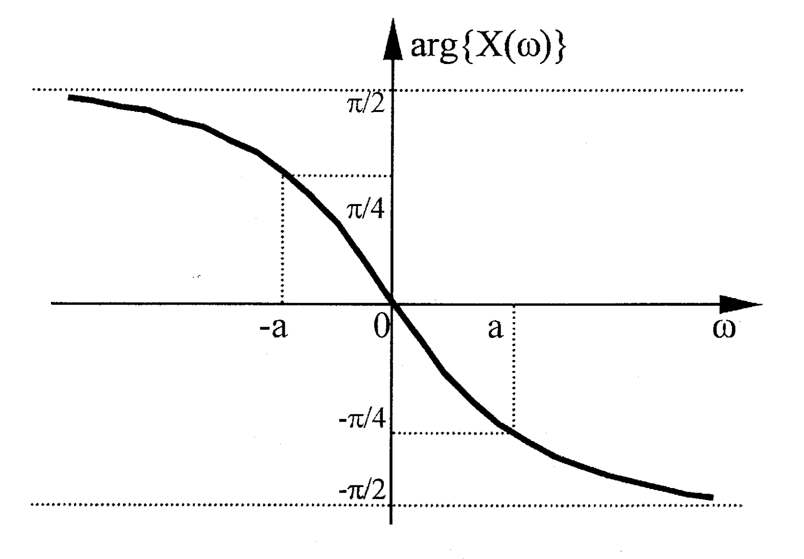


Figura 7.6: Espectro de fase de $f(t) = e^{-a.t}u(t)$ con $a > 0$

Observe las gráficas de las figuras 7.5 y 7.6 y asegúrese de comprender su correlato con los resultados analíticos hallados.

Los valores de $\omega = \pm a$ marcados sobre el eje poseen dos características: En el gráfico de módulo se ubican en el punto de inflexión de la función y en el de fases en el punto de ángulo mitad. Este punto además coincide con el valor de ω para el cual la amplitud del módulo al cuadrado $|H(\omega = 0)|^2$ cae a la mitad. Veremos más adelante cómo este punto puede considerarse un criterio razonable para establecer el **ancho de banda** *de $f(t)$.*

7.2.1. El espectro continuo

La transformada de Fourier es una herramienta interesante para el análisis de señales y sistemas. Nos permite, partiendo de una función temporal, obtener una representación frecuencial en módulo y fase de la misma. Como la propia integral de cálculo lo indica, debemos conocer a la función temporal en todo el eje t para poder calcular cualquier componente de $X(\omega)$. Si la señal temporal posee variaciones bruscas, estas se verán reflejadas en las zonas de *alta frecuencia* o más lejanas al origen en el plano transformado. Asimismo, las componentes de baja frecuencia, o variaciones lentas, estarán asociadas a las zonas cercanas al eje vertical. Así como sucedía con los coeficientes de la serie, una mayor amplitud indica una mayor presencia de energía en las diferentes zonas del espectro.

Claramente podemos ver como el $X(\omega = 0)$ es el valor medio:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

También haremos notar las simetrías que presentan los espectros de módulo y fase. Análogamente con en el caso periódico, $X(\omega) = X^*(-\omega)$.

Demostración:

$(\Longrightarrow)$
Utilizando la definición (7.5), con $f(t)$ una función real

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

pero en vez de colocar una $f(t)$ colocamos su conjugada $f^*(t)$ (sabemos que $f^*(t) = f(t)$)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{-i\omega t}dt = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt \right\}^* = F^*(-\omega)$$

por lo tanto obtenemos

$$F(\omega) = F^*(-\omega)$$

($\Longleftarrow$)

De esta manera podemos ver que si $f(t)$ es una señal real, el espectro de módulos es par y el diagrama de fases impar.

Además, y teniendo en cuenta que el $X(n\omega_0) = C_n.T_0$ podemos asegurar que una función par, posee una transformada real, y una función impar posee una transformada imaginaria pura.

Con respecto a las condiciones de existencia de la transformada de Fourier de una función $f(t)$, utilizamos nuevamente las condiciones de Dirichlet:

1. $f(t)$ debe ser absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$$

2. $f(t)$ debe tener un número finito de máximos y mínimos en todo intervalo finito

3. $f(t)$ debe tener un número finito de discontinuidades finitas

Así como en el caso de las series, un conjunto de señales mas restringidas como las que poseen energía finita (cuadrado integrables) poseen naturalmente transformada de Fourier.

Hacemos notar en este momento que existen un conjunto de funciones que no cumplen estas tres condiciones y sin embargo poseen transformada de Fourier. Estos casos son funciones que especiales que se utilizan para demostraciones puntuales. Uno de estos casos es el escalón, cuya energía es infinita. Comencemos viendo qué sucede con el delta:

Ejemplo 7.2.3 *Calcular la transformada de Fourier del delta unitario $f(t) = \delta(t)$ (figura 7.7).*

Utilizando (7.5) y recordando la propiedad del delta: $\delta(t - t_0)x(t) = \delta(t - t_0)x(t_0)$,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t),1dt = 1$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

La función delta posee un espectro plano, lo que equivale a decir que se requieren componentes frecuenciales desde cero a infinito para reconstruirla. En la jerga se utiliza la expresión ancho de banda para indicar la zona del espectro donde se concentra la mayor parte de la señal. El delta tiene un ancho de banda infinito. Note además que $H(0) = 1$ que coincide con su valor medio (el delta tiene área unitaria).

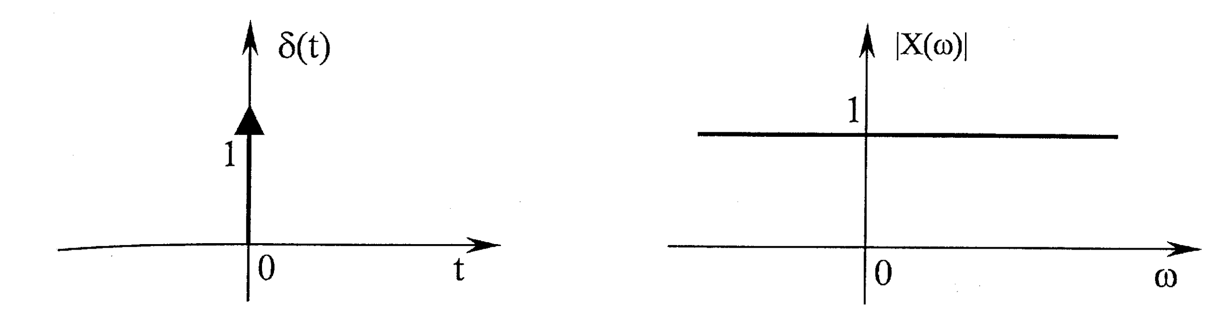


Figura 7.7: Transformada de la función impulso $\delta(t)$.

7.3. Propiedades de la Transformada

Cuando se intenta calcular la transformada de una función, la integral planteada puede ser complicada. Las propiedades que veremos a continuación ayudan a simplificar cálculos y a la vez nos ayudan a entender en profundidad fenómenos relacionados con esta nueva herramienta de análisis.

7.3.1. Linealidad

La transformada de Fourier es lineal, esto implica que

$$\alpha.f_1(t) + \beta.f_2(t) \longleftrightarrow \alpha.F_1(\omega) + \beta.F_2(\omega)$$

Demostración:

$(\Longrightarrow)$

Esta propiedad se verifica fácilmente colocando lo que se desea transformar dentro de la definición de transformada y utilizando la propiedad de linealidad de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha.f_1(t) + \beta.f_2(t)e^{-i\omega t}dt = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-i\omega t}dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-i\omega t}dt = \alpha.F_1(\omega) + \beta.F_2(\omega)$$

$(\Longleftarrow)$

Esta simple propiedad será utilizada con mucha frecuencia de aquí en adelante.

7.3.2. Desplazamiento temporal

Tratemos de estudiar cual es el efecto espectral de desplazar temporalmente una señal. Si dentro de la definición colocamos $f(t-t_0)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega t}dt$$

haciendo un cambio de variables $t - t_0 = \tau$, $dt = d\tau$

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega(\tau+t_0)}dt = e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}dt$$

entonces

$$f(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-i\omega t_0}F(\omega)$$

Note que al desplazar la señal en el tiempo, el módulo de su espectro no se modifica $|e^{-i\omega t_0}F(\omega)| = |F(\omega)|$, solo el diagrama de fases lo hace. Esto es completamente lógico, ya que desplazar la función no cambia su morfología temporal.

Veamos un ejemplo de aplicación:

Ejemplo 7.3.1 *Hallar la transformada de Fourier de un delta desplazado $\delta(t-t_0)$.*

Utilizando el resultado del ejemplo (7.2.3)

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

y la propiedad de desplazamiento

$$\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-i\omega t_0}$$

7.3.3. Desplazamiento frecuencial

Veamos qué sucede al desplazar el espectro de una señal: $X(\omega-\omega_0)$.

Utilizamos la antitransformada (7.6) pero dentro de la integral colocamos el espectro a estudiar

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega-\omega_0).e^{i\omega t}d\omega$$

haciendo un cambio de variables $\lambda = \omega - \omega_0$, $d\lambda = d\omega$ y reemplazando

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\lambda=-\infty}^{\infty} F(\lambda).e^{i(\lambda+\omega_0)t}d\lambda = e^{i\omega_0 t}\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\lambda).e^{i\lambda t}d\lambda = e^{i\omega_0 t}f(t)$$

por lo tanto

$$e^{i\omega_0 t}f(t) \longleftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

Recuerde que una señal temporal real posee un espectro de módulos par. En este caso, y al desplazar el espectro, la señal temporal es compleja. Veamos un ejemplo práctico donde los desplazamientos aun conservan la paridad del espectro:

Ejemplo 7.3.2 *Hallar la transformada de Fourier de* $f_1(t) = p_a(t).sen(\omega_0 t)$ *y de* $f_2(t) = p_a(t).cos(\omega_0 t)$

La transformada de la función pulso es

$$p_a(t) \longleftrightarrow 2\frac{sen(\omega a)}{\omega}$$

Utilizando las descomposiciones del seno y coseno en exponenciales complejas

$$sen(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \qquad cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$$

la propiedad de linealidad y la de desplazamiento frecuencial

$$p_a(t).sen(\omega_0 t) = \frac{1}{2i}p_a(t)e^{i\omega_0 t} - \frac{1}{2i}p_a(t)e^{-i\omega_0 t} \longleftrightarrow \frac{1}{i}\left\{\frac{sen((\omega - \omega_0)a)}{\omega - \omega_0} - \frac{sen((\omega + \omega_0)a)}{\omega + \omega_0}\right\}$$

análogamente para el coseno

$$p_a(t).cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}p_a(t)e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2}p_a(t)e^{-i\omega_0 t} \longleftrightarrow \frac{sen((\omega - \omega_0)a)}{\omega - \omega_0} + \frac{sen((\omega + \omega_0)a)}{\omega + \omega_0}$$

7.3.4. Convolución

Esta propiedad es central en nuestro análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo(LTI). Comencemos planteando la propiedad:

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega) \qquad \text{donde } f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) \quad \text{y} \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$$

Vemos que la convolución temporal entre dos señales se transformó en el producto punto a punto de sus espectros.

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Recordemos la definición de la convolución :

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

introduciendo la convolución dentro de la definición de la transformada (7.5) obtenemos

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f_1(t) * f_2(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-i\omega t} d\tau dt$$

intercambiando las integrales, operando algebraicamente, y utilizando la propiedad de desplazamiento temporal

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \underbrace{\int_{t=-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-i\omega t} dt}_{e^{-i\omega\tau} F_2(\omega)} \, d\tau$$

$$F_2(\omega) \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

($\Longleftarrow$)

Veamos una aplicación directa de esta propiedad. La relación temporal entre la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ de un sistema LTI, está dada por

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

donde el $h(t)$ es la respuesta impulsional (la salida al colocar un delta $\delta(t)$ en la entrada. Veamos qué sucede en el campo transformado.

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$$

de donde obtenemos la siguiente definición

Definición 7.3.1 *La transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo en el campo transformado, es el cociente entre la transformada de la salida y la transformada de la entrada*

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \tag{7.7}$$

La respuesta en frecuencua de un sistema LTI no depende de una entrada o de una salida específica, sino de su relación. La respuesta en frecuencia es la transformada de Fourier de la respuesta impulsional.

En términos de energía se puede escribir

$$|Y(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2$$

Esto debe interpretarse con mucha atención. La energía contenida a la salida de un sistema LTI, y en función de la frecuencia, depende de la energía de la señal de entrada multiplicada por la respuesta en frecuencia del mismo. Por ejemplo, un sistema cuya transferencia amplifique la banda de baja frecuencia con respecto a la de alta frecuencia tendrá un efecto de filtrado pasa bajos. La morfología de la respuesta en frecuencia determina qué bandas frecuenciales se verán amplificadas o atenuadas. La respuesta en frecuencia no depende ni de la entrada ni de la salida: es una propiedad intrínseca del sistema. Piense qué sucedería si a la entrada se coloca un delta, o su equivalente frecuencial: $\delta(t) \longrightarrow 1$. *Al excitar al sistema en su entrada con todas las frecuencias posibles, la salida representa su transferencia* $H(\omega)$. *En otras palabras, la transformada de su respuesta impulsional. Estudiaremos esto con más detalle en la sección de aplicaciones.*

7.3.5. Derivación temporal

Esta propiedad nos facilitará la resolución de ecuaciones diferenciales y será de gran utilidad para transformar funciones conformadas por escalones y rampas. Veamos su definición

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} \longleftrightarrow i\omega F(\omega)$$

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Utilizando la antitransformada (7.6) y derivando ambos miembros con respecto a t,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega).e^{i\omega t} d\omega \\ \frac{\partial f(t)}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega).i\omega.e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

donde dentro de la integral quedó lo que se desea antitransformar, verificando la propiedad.

($\Longleftarrow$)

Apliquemos esta propiedad en una ecuación diferencial ordinaria de primer orden a coeficientes constantes:

$$x(t) = y'(t) + a.y(t) \qquad y(t=0) = 0$$

donde el punto sobre $y(t)$ implica la derivada de primer orden con respecto a t. Si suponemos que $x(t)$ es la entrada a un sistema LTI e $y(t)$ su salida, sería interesante poder encontrar la respuesta impulsional $h(t)$ del sistema. El $h(t)$ es la salida del sistema al colocar un impulso ($\delta(t)$)en la entrada. Asimismo sabemos que para resolver la ecuación es conveniente colocar un escalón $u(t)$; en ese caso la salida será $s(t)$ (respuesta indicial). La respuesta impulsional e indicial se relacionan por:

$$\frac{\partial s(t)}{\partial t} = h(t)$$

resolvamos la ecuación con $x(t) = u(t)$

$$u(t) = y'(t) + a.y(t)$$

La solución es siempre la suma entre la respuesta homogénea y la particular

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

La homogénea es

$$0 = y'(t) + a.y(t)$$

y su solución

$$y_h(t) = K.e^{-at}$$

donde K es la única constante arbitraria a determinar. Para la particular, colocamos $x(t) = u(t)$ y proponemos $y_p(t) = M$ (constante) y $y'_p(t) = 0$, reemplazando

$$1 = 0 + a.M \qquad M = \frac{1}{a}$$

Finalmente, y con las condiciones iniciales

$$y(t) = K.e^{-at} + \frac{1}{a}$$
$$y(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right) = s(t)$$

entonces la respuesta impulsional sería

$$h(t) = e^{-at} \qquad t > 0$$

Veamos cómo resolver la misma ecuación utilizando la propiedad de derivación. Transformemos la ecuación diferencial y despejemos la transferencia vista en (7.7):

$$x(t) = y'(t) + a.y(t) \Longleftrightarrow X(\omega) = i\omega Y(\omega) + a.Y(\omega) = Y(\omega)(i\omega + a)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{i.\omega + a}$$

y por el ejemplo (7.2.2), antitransformamos el $H(\omega)$.

$$h(t) = e^{-a.t}u(t)$$

Este simple ejemplo muestra cómo la transformada de Fourier puede usarse para resolver ecuaciones diferenciales en régimen permanente. Sin embargo, note que nunca se tuvieron en cuenta las condiciones iniciales. En este caso particular, la transformada permitió encontrar la respuesta impulsional del sistema. Observemos cómo la transferencia $H(\omega)$ es una relación entre la entrada y la salida y no requerimos explícitamente la entrada para hallarla. Además si en la entrada colocamos un delta $x(t) = \delta(t)$, su transformada es $X(\omega) = 1$ y entonces la salida coincide con el $H(\omega)$, (como $y(t) = h(t)$).

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{1} = Y(\omega)$$

Como el impulso ($\delta(t)$) es la señal de *ancho de banda* infinito, colocarlo en la entrada de un sistema LTI provoca que en la salida el sistema revele"su comportamiento para todas las bandas de frecuencia. El $H(\omega)$ es denominado **respuesta en frecuencia**. El estudio, análisis y síntesis de esta respuesta es un tópico que desarrollaremos más adelante.

Veamos una segunda aplicación directa de la propiedad de derivación.

Ejemplo 7.3.3 *Calcule la transformada de Fourier de la función triangular.*
Derivemos temporalmente esta función dos veces.
y utilizando la transformada del delta y las propiedades de desplazamiento y derivación

$$\begin{array}{rcl} f(t) & \longleftrightarrow & F(\omega) = ? \\ f'(t) & \longleftrightarrow & i\omega.F(\omega) \end{array}$$

$$f''(t) = \frac{A}{\tau}\delta(t+\tau) - \frac{2A}{\tau}\delta(t) + \frac{A}{\tau}\delta(t-\tau) \quad \longleftrightarrow \quad (i\omega)^2.F(\omega) = \frac{A}{\tau}\left(e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}\right) - \frac{2A}{\tau}$$

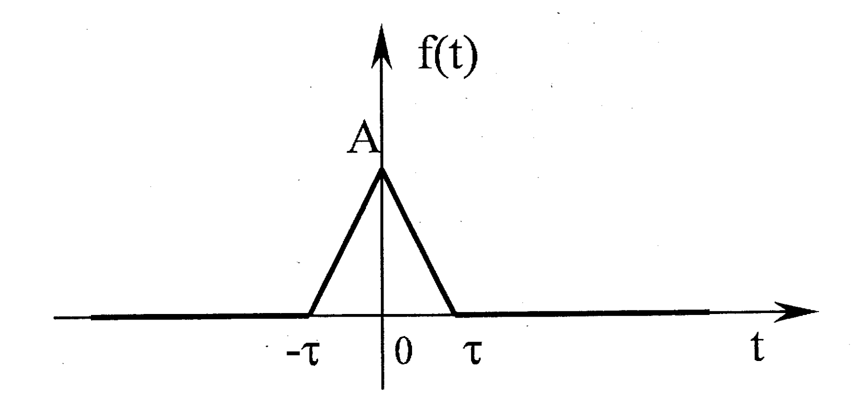


Figura 7.8: Señal triangular.

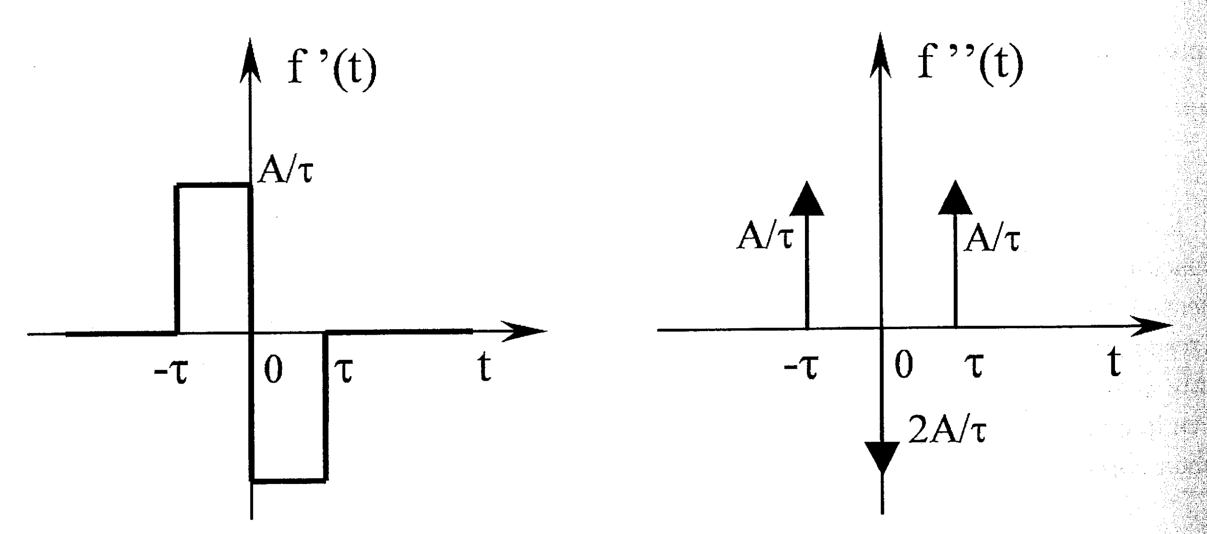


Figura 7.9: Señal triangular derivada dos veces.

juntamos las dos exponenciales para armar un coseno y despejamos $F(\omega)$

$$F(\omega) = \frac{2A}{\tau}\left(\frac{cos(\omega\tau) - 1}{-\omega^2}\right)$$

Utilizando la igualdad trigonométrica $2sen^2(x/2) = 1 - cos(x)$*, finalmente*

$$F(\omega) = \frac{4A}{\tau}\left(\frac{sen^2(\frac{\omega\tau}{2})}{\omega^2}\right)$$

Es interesante notar como el resultado sugiere una función real (ya que $f(t)$ *es par) y además su espectro es de la forma* $(sen(\omega)/\omega)^2$*. Si la entrada se interpreta como la convolución de dos pulsos de ancho* $\tau/2$*, centrados en el origen, y la forma de la transformada de Fourier de cada uno es* $sen(\omega)/\omega$*, se deja a cargo del lector, utilizando la propiedad de convolución, verificar el resultado.*

7.3.6. Derivación frecuencial

Esta propiedad nos ayuda a revelar la estrecha relación que hay entre los espacios tiempo-frecuencia, la cual se pondrá expresamente de manifiesto en la propiedad de simetría. Por el momento recordemos que derivar una función en el tiempo produjo la multiplicación de su espectro por $j\omega$. Si ahora derivamos el espectro, obtenemos

$$-it.f(t) \Longleftrightarrow \frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega}$$

Demostración:

$(\Longrightarrow)$

Tomemos la definición de la transformada (7.5) y derivemos ambos miembros con respecto a ω,

$$\frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-it)e^{-i\omega t}dt$$

donde dentro de la integral de la derecha está la función a transformar, verificamos la propiedad

$(\Longleftarrow)$

Veamos un ejemplo

Ejemplo 7.3.4 *Calcular la transformada de Fourier de $f(t) = te^{-at}$ con $a > 0$.*

Utilizando el ejemplo (7.2.2) recordamos

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{i\omega + a}$$

y si multiplicamos a $f(t)$ por $-it$, derivamos su espectro

$$-it.e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{-i}{(i\omega + a)^2}$$

y dividiendo ambos miembros por la constante $-i$, obtenemos el resultado

$$t.e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(i\omega + a)^2}$$

7.3.7. Simetría o Dualidad

Hemos observado con anterioridad que hay relaciones duales entre las señales temporales y sus espectros. Recordemos el caso del pulso de ancho $2a$.

$$p_a(t) \longleftrightarrow 2\frac{sen(\omega a)}{\omega}$$

Aquí vemos cómo si ensanchamos el pulso temporal (aumentamos a), su espectro se estrecha, y viceversa. Veámoslo gráficamente para $a = 1$ $a = 1/2$ y $a = 2$ en la figura 7.10

En los casos extremos, si el pulso tiene un ancho cercano a cero, su espectro sería plano, como en el caso de la transformada de un delta ($\delta(t)$). Si por el contrario, ensanchamos el pulso hasta convertirlo en una constante, su espectro sería un ($\delta(\omega)$). Esto es completamente lógico ya que una función constante en el tiempo, solo tiene coeficiente C_0 o valor medio en su plano transformado (no requiere de ningún seno o coseno).

Comencemos enunciando la propiedad de simetría o dualidad:

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \longleftrightarrow & F(\omega) \\ F(t) & \longleftrightarrow & 2\pi f(-\omega) \end{array}$$

Aclaremos que $f(\bullet)$ debe interpretarse como *la forma* de la señal temporal, y $F(\bullet)$ la *forma* del espectro. De esta manera lo que enunciamos es que la transformada de Fourier permite intercambiar las morfologías de las señales temporales y frecuenciales, presentando la denominada *dualidad.*

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Planteamos la antitransformada (7.6)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

realizamos un cambio de variables, $t = -t$,

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

y finalmente intercambiamos ω por t

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}dt$$

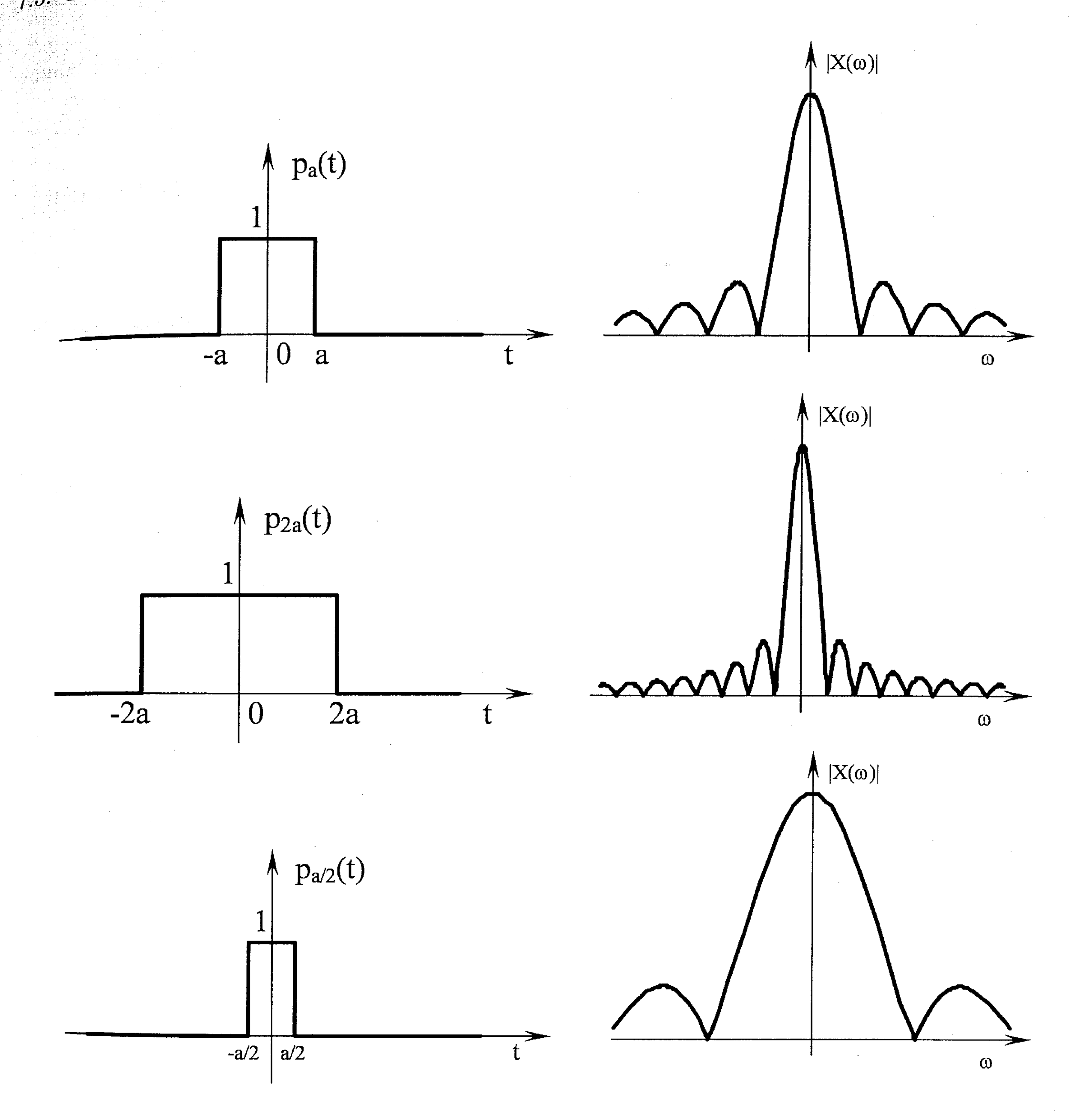


Figura 7.10: Simetría y dualidad

donde verificamos que sobre la derecha tenemos la transformada de Fourier de $F(t)$, y esta da como resultado $2\pi f(-\omega)$, como se quería demostrar.

$(\Longrightarrow)$

Esta propiedad tiene muchas aplicaciones. El lector podrá comprobar que así como el pulso posee un espectro del tipo $sen(\omega)/\omega$, la función $sen(t)/t$ posee un espectro que es un pulso centrado en el origen (afectado por una constante).

Veamos algunos ejemplos concretos

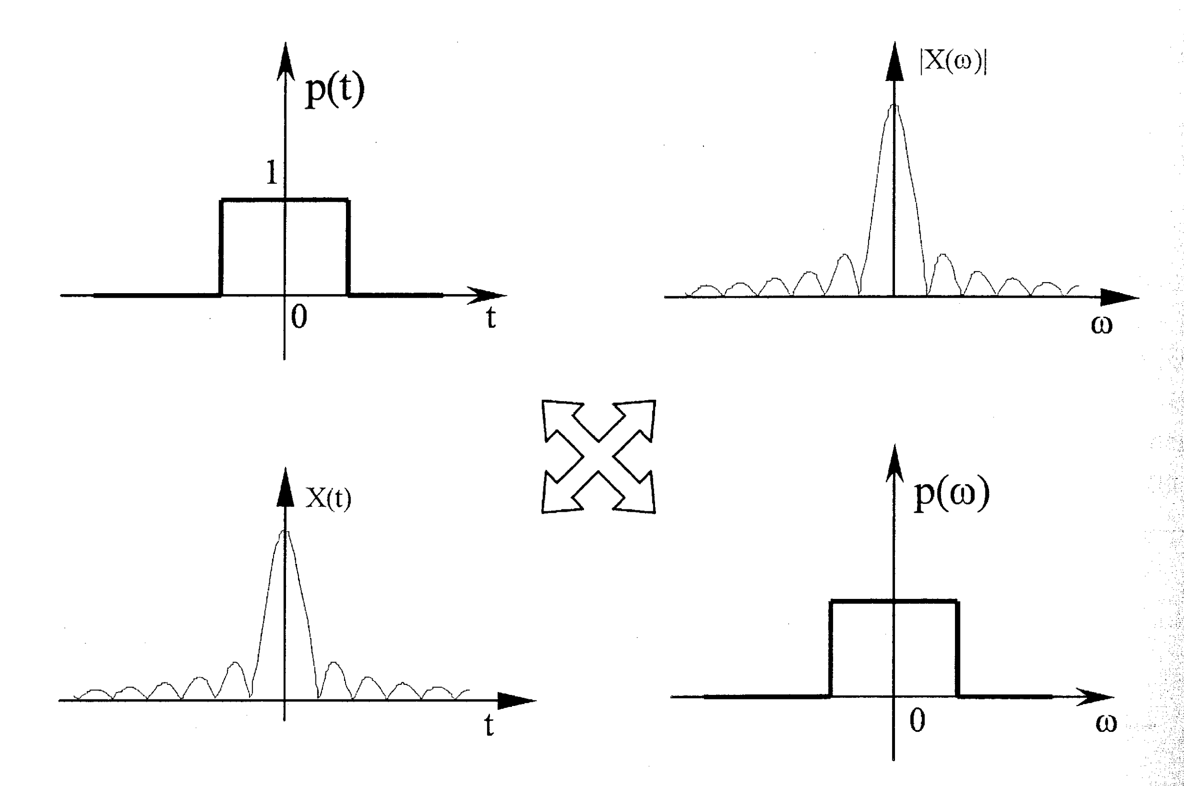


Figura 7.11: Simetría y dualidad

Ejemplo 7.3.5 *Calcule la transformada de Fourier de* $f(t) = 1$
Utilizando el (7.2.3)

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

colocamos la función temporal en función de ω *y viceversa, afectando por* 2π

$$\mathbf{1} \longleftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

Ejemplo 7.3.6 *Calcule la Transformada de Fourier de la función signo*

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & si\ t > 0 \\ -1 & si\ t < 0 \end{cases}$$

y luego utilícela para calcular la del escalón unitario $f(t) = u(t)$.

Si derivamos la función signo obtenemos un delta en el origen de área 2, y utilizando la propiedad de derivación

$$\begin{array}{rcl} sgn(t) & \longleftrightarrow & F(\omega) = ? \\ \dfrac{\partial sgn(t)}{\partial t} = 2\delta(t) & \longleftrightarrow & i\omega F(\omega) = 2 \end{array}$$

donde despejando $F(\omega)$ obtenemos

$$sgn(t) \longleftrightarrow \frac{2}{i\omega}$$

Para calcular la transformada del $u(t)$ podemos descomponer al escalón como

$$u(t) = \frac{sgn(t)+1}{2} \longleftrightarrow F(\omega) = ?$$

utilizando la propiedad de linealidad, la transformada de la función signo y el ejemplo (7.3.5)

$$\frac{sgn(t)+1}{2} \longleftrightarrow \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$$

por lo tanto

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Veamos un ejemplo más:

Ejemplo 7.3.7 *Calcule la transformada de Fourier de $f(t) = cos(\omega_0 t)$ y de $f(t) = sen(\omega_0 t)$*
Descomponiendo al coseno y al seno por la relación de euler,

$$\begin{aligned} cos(\omega_0 t) &= \frac{e^{i\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2} \\ sen(\omega_0 t) &= \frac{e^{i\omega_0 t}}{2i} - \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2i} \end{aligned}$$

utilizando la propiedad de desplazamiento frecuencial y el ejemplo (7.3.5)

$$\begin{aligned} 1.e^{i\omega_0 t} &\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\ 1.e^{-i\omega_0 t} &\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} cos(\omega_0 t) &\longleftrightarrow \pi\left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right) \\ sen(\omega_0 t) &\longleftrightarrow \frac{\pi}{i}\left(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right) \end{aligned}$$

ındo la

Notemos cómo al transformar una función periódica, su espectro estará compuesto por deltas. Es como si estuviéramos graficando los $T_0 C_n$ en función de $n\omega_0$. De esta manera vemos que la Transformada de Fourier de una función periódica resulta en un espectro discreto. Explicaremos esta característica en detalle más adelante.

7.3.8. Modulación

Comencemos mostrando la propiedad

$$f_1(t)f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

Recordando la propiedad de convolución, vemos que si ahora multiplicamos dos funciones en el tiempo, sus espectros se *convolucionan*. Esto cobra especial interés en el área de comunicaciones, si por ejemplo $f_2(t)$ es un seno o un coseno, como se mostrará en el ejemplo.

Demostremos la propiedad

Demostración:

$(\Longrightarrow)$

Coloquemos el producto que queremos transformar dentro de la integral (7.5)

$$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-i\omega t}dt$$

y reemplacemos $f_1(t)$ utilizando la antitransformada (7.6) (se utilizará *lambda* en vez de ω para no confundir las variables)

$$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda f_2(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) \underbrace{\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-i(\omega-\lambda)t}dt}_{F_2(\omega-\lambda)}\, d\lambda$$

Observando la integral entre llaves, y utilizando la propiedad de desplazamiento frecuencial, podemos reconocer la integral de convolución,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)F_2(\omega-\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

$(\Longleftarrow)$

Utilicemos esta última propiedad en un ejemplo.

Ejemplo 7.3.8 *Calcule la transformada de Fourier de $f(t)cos(\omega_0 t)$ y de $f(t)sen(\omega_0 t)$*
Utilicemos las transformadas del ejemplo (7.3.7)

$$cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$$
$$sen(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{\pi}{i}\left(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

y recordando que la convolución entre una función $f(t)$ y un delta desplazado $\delta(t-t_0)$ es

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

entonces

$$f(t)cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}F(\omega)*\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$$
$$f(t)sen(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2i}F(\omega)*\left(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

concluimos

$$f(t)cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)\right)$$
$$f(t)sen(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2i}\left(F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)\right)$$

Veamos gráficamente el efecto de modulación, con otro ejemplo

---

Ejemplo 7.3.9 *Calcule la transformada de $f(t)cos(10t)$ con $f(t)=e^{-|t|}$*
Calculando la transformada de $f(t)$ obtenemos

$$e^{-|t|} \longleftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}$$

Graficamos entonces el resultado en la figura 7.12.

7.3.9. Escala

Hemos visto hasta el momento una característica peculiar entre lo que sucede con las funciones temporales y sus respectivos espectros, que asentaremos con la presente propiedad. Si a una función temporal la *comprimimos* en el tiempo, sus derivadas máximas serán aun mayores, y por lo tanto su ancho de banda crecerá. Por el contrario, la expansión temporal de una señal la convierte en una señal más lenta y por lo tanto su energía se concentrará en las bajas frecuencias. La propiedad de escala se plantea de la siguiente forma:

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

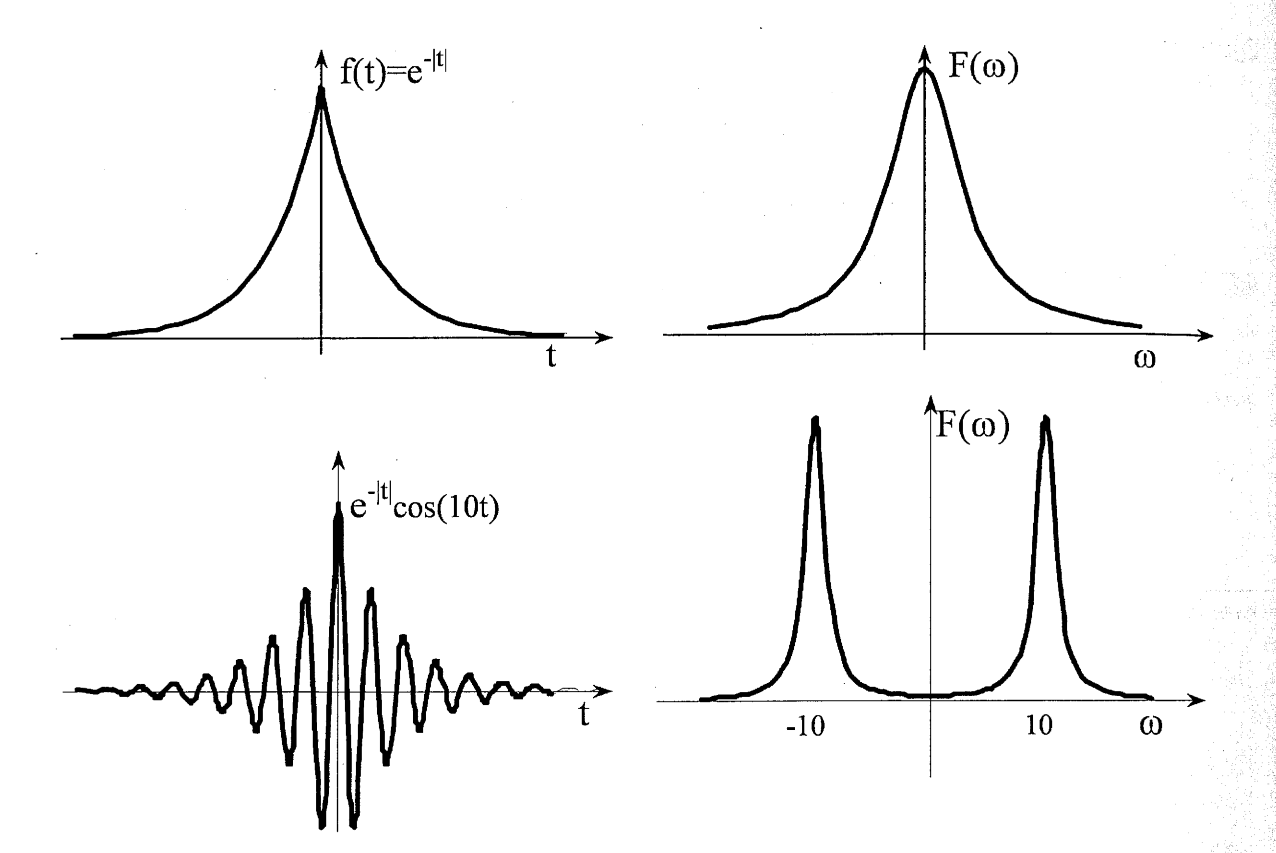


Figura 7.12: Modulación.

Demostración:

$(\Longrightarrow)$

Utilizando la definición (7.5) e introduciendo $f(at)$ dentro de la integral,

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt$$

haciendo el cambio de variables $at = \tau$, $dt = d\tau/a$, si $a > 0$ los límites de la integral coinciden, y reemplazando obtenemos

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\frac{\omega}{a}\tau}\frac{d\tau}{a} = \frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$$

si ahora $a < 0$, los límites de la integral se invierten, pero como el diferencial es negativo, la expresión coincide con la anterior, por lo tanto

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

($\Longleftarrow$)
Vemos claramente cómo al comprimir la señal temporal ($a > 1$), su espectro se expande $X(\omega/a)$, y viceversa. Cuando una función tiene una duración temporal muy corta, su contenido en frecuencia es amplio (ver la transformada del delta). Por el contrario, si la función temporal es lenta, su energía se encuentra concentrada en las bajas frecuencias (ver la transformada de la función constante).

7.3.10. Integración temporal

La enunciamos como

$$\int_{\tau=-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{F(\omega)}{i\omega} + \pi\delta(\omega)F(0)$$

Recordemos que al derivar $f(t)$, su transformada se *multiplica* por $i\omega$. En este caso vemos que al integrar $f(t)$, su transformada se *divide* por $i\omega$. Aparece además un término adicional para $\omega = 0$ proporcional al valor medio de $f(t)$.

Demostración:

($\Longrightarrow$)
Si convolucionamos una función con un escalón $u(t)$, obtenemos

$$f(t) * u(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

donde el límite superior se sustituyó por t ya que el $u(t-\tau)$ es cero para $\tau > t$.

Ahora recordando la propiedad de convolución (7.3.4) y la transformada del escalón $u(t)$ vista en el ejemplo (7.3.6):

$$f(t) * u(t) \longleftrightarrow F(\omega)\left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right)$$

por lo tanto

$$\int_{\tau=-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{F(\omega)}{i\omega} + \pi\delta(\omega)F(0)$$

($\Longleftarrow$)

7.4. Fórmula de Párseval

Como en el caso de las funciones continuas, es crucial que la Transformada de Fourier conserve la energía de la señal temporal, y toda esa energía este representada en su espectro. Las funciones que poseen transformada de Fourier tienen energía finita. Esta energía se ve representada en su espectro, donde ahora queda manifestada la distribución de la misma en función de la frecuencia. Esta relación entre energías tiempo-frecuencia se explicita en la **Identidad de Párseval**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

que se basa en la **Relación de Párseval** siguiente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega$$

cuando $f_1(t) = f(t)$ y $f_2(t) = f^*(t)$.

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Para comenzar debemos demostrar la denominada **Relación de Párseval**, utilizando la propiedad de modulación

$$f_1(t).f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

la escribimos en su forma integral,

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda=-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) X_2(\omega - \lambda) d\lambda$$

que para $\omega = 0$ es

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda=-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) X_2(-\lambda) d\lambda$$

donde si reemplazamos la variable λ por ω en la integral a la derecha,

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} X_1(\omega) X_2(-\omega) d\omega$$

donde queda demostrada la relación.

Para probar la identidad de Párseval, veamos qué sucede si realizamos la transformada de Fourier de $f^*(t)$ donde el * implica el conjugado:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{-i\omega t}dt = \left[\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt\right]^* = F^*(-\omega)$$

por lo tanto

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$
$$f^*(t) \longleftrightarrow F^*(-\omega)$$

(Ver la nota al final de la demostración)

Si ahora en la Relación de Párseval sustituimos $f_1(t) = f(t)$ y $f_2(t) = f^*(t)$

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*(\omega)d\omega$$

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2d\omega$$

NOTA: Recordamos que si la función $f(t)$ es real, $f(t) = f^*(t)$. De esta manera se puede verificar que, al igual que con la serie de Fourier, el espectro de módulos es siempre una función par: $|F(-\omega)| = |F^*(\omega)|$ y el diagrama de fases es impar : $arg\{F(-\omega)\} = arg\{F^*(\omega)\} = -arg\{F(\omega)\}$ (si y solo si $f(t)$ es real).

($\Longleftarrow$)

7.5. Transformada de Fourier de señales periódicas

Una de las condiciones impuestas para que una función $f(t)$ posea Transformada de Fourier es que su energía sea finita. Las señales periódicas o de potencia, poseen una energía infinita a lo largo del eje temporal, aunque la energía por periodo (potencia) es finita. Hemos visto la estrecha relación que existe entre una señal periódica y una aperiódica que conserve su forma a pesar que el periodo se extienda al infinito. Hemos destacado que la señales aperiódicas determinan un espectro continuo que conforma una **envolvente**. Los coeficientes de la serie de Fourier de la misma señal, pero periódica, poseen amplitudes acotadas por esa envolvente, distanciados en eje frecuencial por una frecuencia equivalente a la fundamental ω_0. Teniendo en cuenta esa relación podemos proponer la Transformada de Fourier de señales periódicas como:

$$f(t) \longleftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\delta(\omega - n\omega_0) \tag{7.8}$$

donde $f(t)$ es una señal periódica de período $T_0 = 2\pi/\omega_0$, y los C_n son los coeficiente de su descomposición en Serie Exponencial de Fourier.

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Si $f(t)$ es periódica con período $T_0 = 2\pi/\omega_0$ y cumple las condiciones de Dirichlet, entonces podemos hallar su descomposición en serie utilizando (6.2)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$$

donde si transformamos ambos miembros, y recordamos que los C_n son constantes complejas, obtenemos

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

utilizando la transformada de una constante y la propiedad de desplazamiento frecuencial ya vista.

($\Longleftarrow$)

Si a una función aperiódica, cuyo espectro es continuo aperiódico, la convertimos en una función periódica de período T_0 **sin modificar su forma** (simplemente replicándola), el espectro de la nueva función no será otra cosa que un espectro **discreto** que resulta de un muestreo cada ω_0 del espectro continuo original.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 7.5.1 *Calcule la transformada de Fourier del peine de deltas (figura 7.13)*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

Como vemos, esta función es periódica con período T_0. Sus coeficientes C_n son:

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$$

por lo tanto, utilizando la Transformada de Fourier para señales periódicas (7.8)

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0}\delta(\omega - n\omega_0)$$

$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

vemos que el peine de deltas se transformó en otro peine de deltas. Destaquemos que si el peine temporal se comprime (hacemos más pequeño T_0, los deltas de su espectro se alejan (aumenta ω_0) y viceversa.

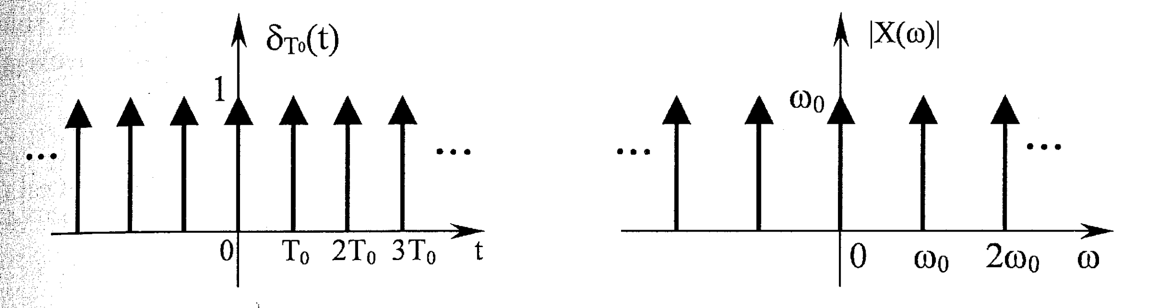


Figura 7.13: La transformada de un peine de deltas genera otro peine de deltas.

Evidenciemos la relación entre la función periódica y la aperiódica. Si tomamos solo el delta central del peine, su Transformada es uno (constante)

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

Al crear el peine temporal, ahora debemos "muestrear.^{es}*e espectro constante cada ω_0, lo que se visualiza perfectamente en el gráfico.*

7.6. Aplicaciones

Las aplicaciones de la Transformada de Fourier son tan variadas que pueden cubrir asignaturas completas en muchas áreas, no solo de la ingeniería, sino también en física y matemática teórica. El objetivo de esta sección es mostrar cómo se puede utilizar la transformada para resolver algunos problemas clásicos en ingeniería, y a la vez mostrar un método práctico para la representación de los diagramas de módulo y fase.

7.6.1. Respuesta en frecuencia de un sistema LTI continuo

Hemos demostrado anteriormente que la salida $y(t)$ de un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI), se relaciona con la entrada $x(t)$, mediante la integral de convolución:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

donde $h(t)$ es la respuesta impulsional del sistema (la salida al ingresar un delta $\delta(t)$ en la entrada).

Utilizando la propiedad de convolución, obtenemos

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

por lo tanto definimos a la respuesta en frecuencia de un sistema como

$$\boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}} \tag{7.9}$$

Donde típicamente graficamos su módulo y su fase:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{\Theta(\omega)}$$

De esta forma vemos que la salida está completamente determinada por la respuesta en frecuencia del sistema, y podemos escribir

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)||H(\omega)|$$
$$\Theta_Y(\omega) = \Theta_X(\omega) + \Theta_H(\omega)$$

donde a $|H(\omega)|$ lo denominamos *ganancia* o respuesta de magnitud del sistema. La magnitud del espectro de salida es la magnitud del espectro de entrada $|X(\omega)|$ multiplicado por la *ganancia* del sistema. El espectro de fases de la salida $\Theta_Y(\omega)$ es la suma entre la respuesta de fase del sistema $\Theta_H(\omega)$ y la de la entrada $\Theta_H(\omega)$. De esta manera comprendemos que al diseñar el sistema, estamos diseñando el $H(\omega)$ y podemos decidir qué zona del espectro de entrada amplificar y qué zona atenuar, así como con qué fase lo haremos para cada frecuencia ($\omega = 2\pi f$).

Si en la entrada de un sistema LTI colocamos un delta cuyo espectro es plano $\delta(t) \rightarrow 1$, a la salida observamos su respuesta impulsional, cuya transformada es su respuesta en frecuencia: $y(t) = h(t) \rightarrow Y(\omega) = H(\omega)$. Esto sucede ya que estamos excitando al sistema en forma pareja para todas las frecuencias.

Por el contrario, si deseamos observar qué sucede para una frecuencia en particular, podemos excitar al sistema LTI con un tono puro o con su equivalente complejo: $e^{i\omega_0 t} \rightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$. Se utilizó aquí la propiedad de desplazamiento frecuencial y la transformada de la función constante hallada a través de la propiedad de dualidad: $1 \rightarrow 2\pi\delta(\omega)$. Al ingresar con esta exponencial compleja *monotono* de frecuencia ω_0, a la salida observamos según la ecuación 7.9: $y(t) = H(\omega_0)e^{i\omega_0 t} \rightarrow Y(\omega) = 2\pi H(\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)$. Entonces, al excitar al sistema con una exponencial compleja de frecuencia ω_0 a la salida obtenemos la misma exponencial pero amplificada/atenuada y desfasado, en función de la respuesta en frecuencia del sistema. Para reconstruir la respuesta en frecuencia completa habría que realizar un barrido en frecuencia: por ejemplo, colocar una señal senoidal de amplitud unitaria y modificar su frecuencia. A la salida se obtendría el mismo seno pero cuya amplitud y desfasaje serán función de la frecuencia de excitación y el $H(\omega_0)$.

Si la señal de entrada es periódica con período $T_0 = 2\pi/\omega_0$, entonces su espectro será discreto (una sumatoria de deltas equidistantes, con distancia ω_0). Al multiplicar este espectro por la respuesta en frecuencia de módulos, a la salida volveremos a tener un espectro discreto (la señal de salida seguirá siendo periódica), pero cada componente quedará afectada, en función de su frecuencia, por una ganancia diferente.

Para una transmisión sin distorsión a través de un sistema LTI, la salida debe ser idéntica a la entrada, exceptuando su amplitud o un posible retardo"temporal

$$y(t) = Kx(t - t_0)$$

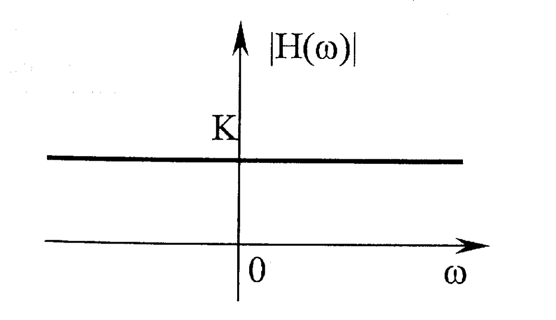
donde K es la constante de ganancia o atenuación, y t_0 el retraso temporal. Aplicando la Transformada de Fourier, obtenemos

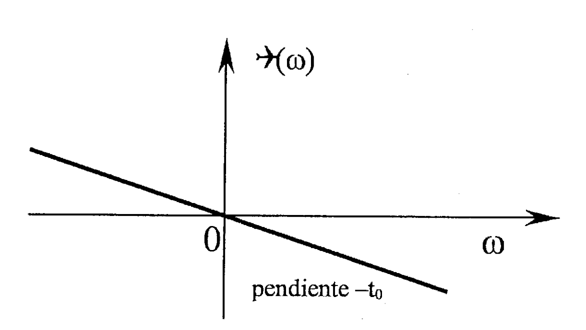
$$Y(\omega) = Ke^{-i\omega t_0}X(\omega)$$

y la respuesta en frecuencia es

$$H(\omega) = Ke^{-i\omega t_0}$$

$$|H(\omega)| = K \qquad arg\{H(\omega)\} = \Theta(\omega) = -i\omega t_0$$





7.6.2. Sistemas descriptos por ecuaciones diferenciales

Los sistemas descriptos por ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes son de especial interés ya que sus aplicaciones prácticas en modelización son muy habituales. Estas ecuaciones pueden ser generalizadas por

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

donde $x(t)$ es la entrada, $y(t)$ la salida, y la condición $M \leq N$. Aplicando Transformada de Fourier en ambos miembros

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} a_k(i\omega)^k Y(\omega) &= \sum_{k=0}^{M} b_k(i\omega)^k X(\omega) \\ Y(\omega)\sum_{k=0}^{N} a_k(i\omega)^k &= X(\omega)\sum_{k=0}^{M} b_k(i\omega)^k \end{aligned}$$

y despejando la respuesta en frecuencia,

$$H(\omega) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{N} b_k(i\omega)^k}{\sum\limits_{k=0}^{M} a_k(i\omega)^k} \tag{7.10}$$

7.6.3. Diagramas de Bode

Como vimos en la sección anterior, la salida de un sistema LTI es el producto de dos módulos. La herramienta que presentaremos a continuación intenta facilitar la confección de los diagramas de módulo y fase, resumiéndolos a simples sumas de diagramas **asintóticos**. Estos diagramas serán aproximados, aunque cuantificaremos claramente los errores cometidos.

Comencemos con el diagrama de módulos. Para lograr que el producto de espectros entre la entrada y el $H(\omega)$ se transforme en una suma, graficaremos a cada espectro de módulos como $20log_{10}(|X(\omega)|)$ y $20log_{10}(|H(\omega)|)$ en función de ω. El eje horizontal será logarítmico y el vertical estará calibrado en decibeles[dB]. De esta manera la salida será

$$\begin{aligned} |Y(\omega)|_{dB} &= 20log(|Y(\omega)|) = 20log(|X(\omega)||H(\omega)|) \\ &= 20log(|X(\omega)|) + 20log(|H(\omega)|) = |X(\omega)|_{dB} + |H(\omega)|_{dB} \end{aligned}$$

Para estandarizar la representación, tomaremos una respuesta en frecuencia genérica, como la vista en (7.10)

$$H(\omega) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{N} b_k(i\omega)^k}{\sum\limits_{k=0}^{M} a_k(i\omega)^k}$$

donde si hallamos las raíces del numerador y el denominador, las suponemos todas distintas, y las escribimos de la siguiente forma normalizada

$$H(\omega) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{N} (1 + \frac{i\omega}{z_k})}{\sum\limits_{k=0}^{M} (1 + \frac{i\omega}{p_k})} \tag{7.11}$$

A esta expresión le aplicaremos logaritmo y la multiplicaremos por 10. Luego intentaremos encontrar las asíntotas de las curvas resultantes, en función de las contantes z_k y p_k.

Como los diagramas de fase se suman directamente, solo utilizaremos el eje horizontal logaritmizado.

Para confeccionar los diagramas asintóticos, veamos tres ejemplos prácticos:

Ejemplo 7.6.1 *Dibuje el diagrama asintótico de Bode de las siguientes respuestas en frecuencia*

1. $H(\omega) = 1 + \frac{i\omega}{10}$
2. $H(\omega) = \frac{1}{1+i\omega/10}$
3. $H(\omega) = \frac{10^4(1+i\omega)}{(10+i\omega)(100+i\omega)}$

1. *En este caso, el $H(\omega)$ solo posee un término del numerador de la expresión (7.11) y ya está normalizado, por lo tanto procedemos a aplicar el logaritmo*

$$|H(\omega)|_{dB} = 20log|H(\omega)| = 20log\left|1 + i\frac{\omega}{10}\right|$$

donde el $z_0 = 10$. Vemos que para valores de ω cercanos a cero,

$$|H(\omega)|_{dB} = 20log|1| = 0 \qquad \omega \to 0$$

y para valores de ω grandes,

$$|H(\omega)|_{dB} = 20log\frac{\omega}{10} \qquad \omega \to \infty$$

En un gráfico logarítmico, esto es una recta de pendiente 20dB por década (una década es un aumento de 10 veces). Esta recta cruza al eje horizontal ω en 10; en ese punto el diagrama asintótico comete el error máximo, que es

$$|H(\omega)|_{dB} = 20log\left|1 + i\frac{10}{10}\right| = 20log\sqrt{2} \simeq 3dB$$

Para el diagrama de fases, tenemos

$$\Theta_H(\omega) = tan^{-1}\frac{\omega}{10}$$

donde

$$\Theta_H(\omega) = tan^{-1}\frac{\omega}{10} \to 0 \qquad \omega \to 0$$
$$\Theta_H(\omega) = tan^{-1}\frac{\omega}{10} \to \frac{\pi}{2} \qquad \omega \to \infty$$

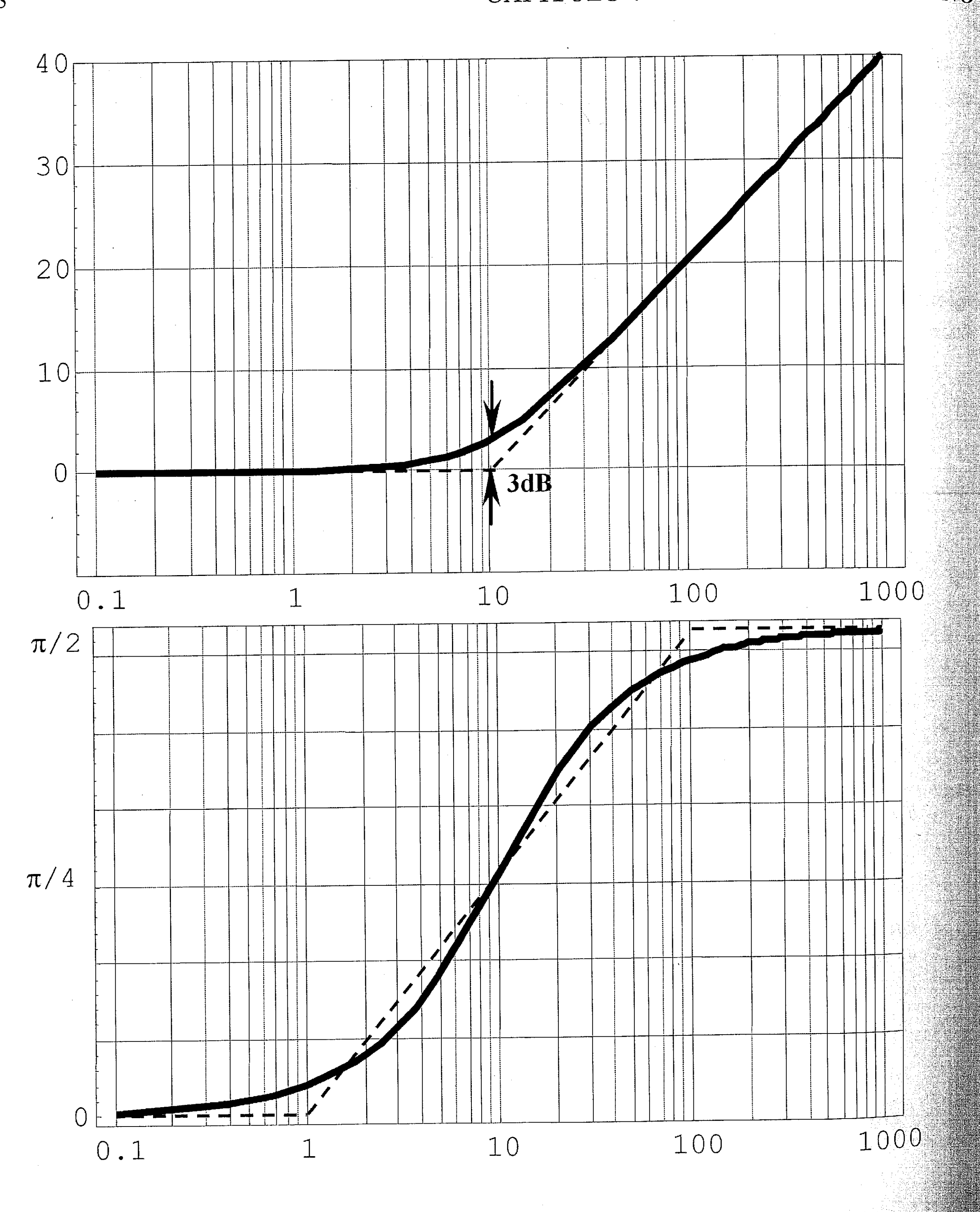


Figura 7.14: Diagramas de Bode

En este caso los errores más groseros se cometen una década antes y una después de la frecuencia determinada por $z_k = 10$.

Veamos los gráficos de Bode en la figura 7.14.

De este primer ejemplo, donde tenemos un término genérico del numerador con coeficiente $z_k = 10$, en la expresión normalizada, podemos arribar a las siguientes conclusiones:

- *El diagrama asintótico de módulo presenta una recta de pendiente +20dB por década* **a partir** *del valor de $\omega = z_k = 10$.*
- *El diagrama asintótico de fases presenta una recta de pendiente +45 grados por década* **desde una década antes y hasta una década después** *de $\omega = z_k = 10$.*

2. *En este caso, el $H(\omega)$ solo posee un término del denominador de la expresión (7.11) y también observamos que está normalizado. Procedemos igual que en el punto anterior,*

$$|H(\omega)|_{dB} = 20log|H(\omega)| = 20log\left|\frac{1}{1+i\omega/100}\right| = -20log\left|1+i\frac{\omega}{100}\right|$$

donde el $p_0 = 100$. Vemos que para valores de ω mucho menores que $p_0 = 100$,

$$|H(\omega)|_{dB} = -20log|1| = 0 \qquad \omega \to 0$$

y para valores de ω mucho mayores,

$$|H(\omega)|_{dB} = -20log\frac{\omega}{100} \qquad \omega \to \infty$$

En un gráfico logarítmico, esto es una recta de pendiente negativa -20dB por década. Esta recta cruza al eje horizontal ω en 100; en ese punto el diagrama asintótico vuelve a cometer el error máximo, que es

$$|H(\omega)|_{dB} = -20log\,|1+i| = -20log\sqrt{2} \simeq -3dB$$

Para el diagrama de fases, tenemos

$$\Theta_H(\omega) = -tan^{-1}\frac{\omega}{100}$$

donde

$$\Theta_H(\omega) = -tan^{-1}\frac{\omega}{100} \to 0 \qquad \omega \to 0$$
$$\Theta_H(\omega) = -tan^{-1}\frac{\omega}{100} \to -\frac{\pi}{2} \qquad \omega \to \infty$$

En este caso los errores más groseros se cometen una década antes y una después de la frecuencia determinada por $p_k = 100$.

Veamos los gráficos para este caso en la figura 7.15.

De este segundo ejemplo, donde ahora tenemos un término genérico del denominador con coeficiente $p_k = 100$, en la expresión normalizada, podemos arribar a las siguientes conclusiones:

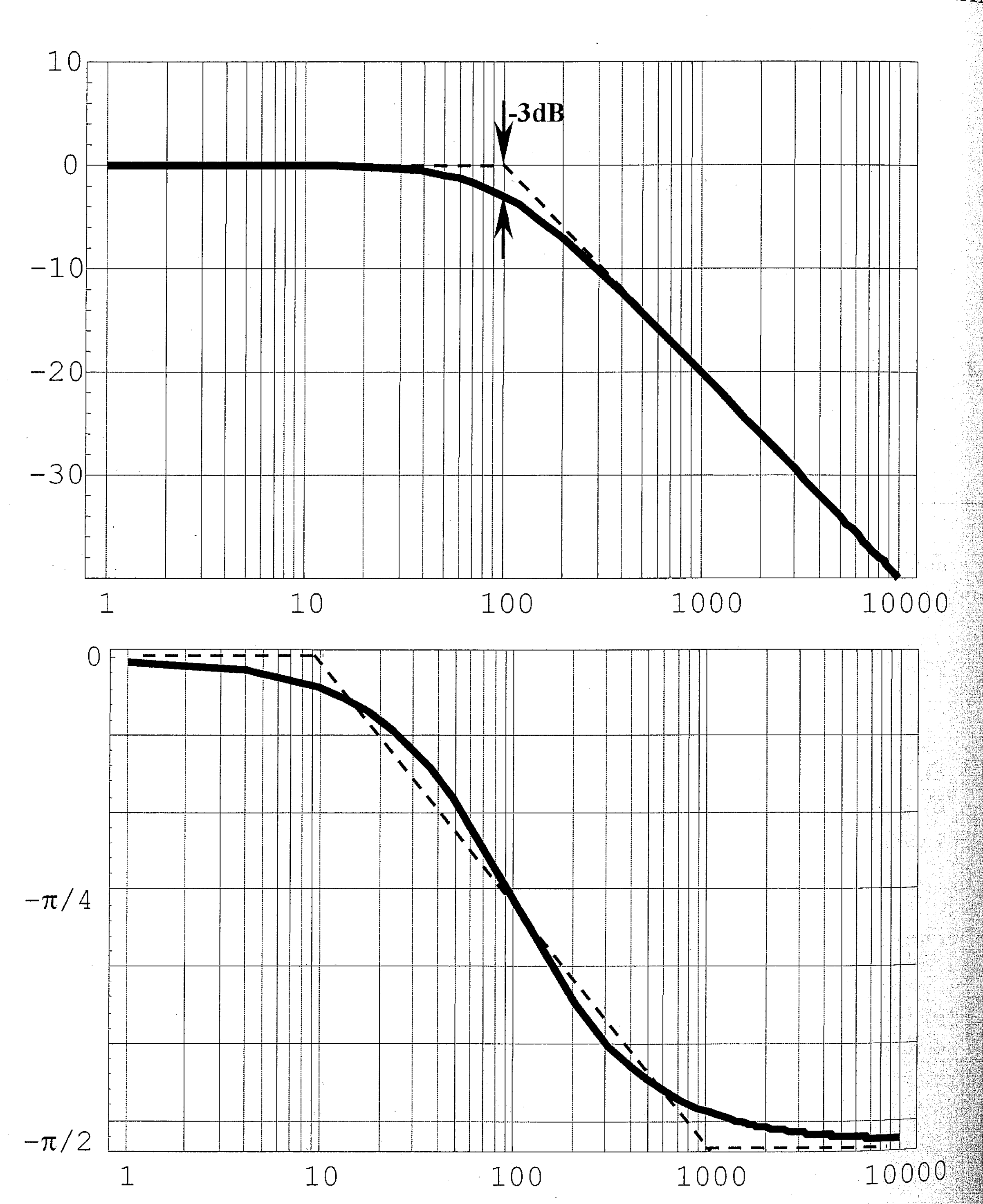


Figura 7.15: Diagramas de Bode

- *El diagrama asintótico de módulo presenta una recta de pendiente -20dB por década* **a partir** *del valor de* $\omega = p_k = 100$.
- *El diagrama asintótico de fases presenta una recta de pendiente -45 grados por*

década **desde una década antes y hasta una década después** *de* $\omega = p_k = 100$.

3. *En este tercer caso, donde integraremos las conclusiones anteriores, vemos que la expresión no está normalizada. Procedemos a normalizar*

$$H(\omega) = \frac{10^4(1+i\omega)}{10.(1+i\omega/10)100.(1+i\omega/100)} = \frac{10(1+i\omega)}{(1+i\omega/10)(1+i\omega/100)}$$

Ahora aplicamos el logaritmo,

$$|H(\omega)|_{dB} = 20log|H(\omega)| = 10log10 + 20log\,|1+i\omega| - 20log\,|1+i\omega/10| - 20log\,|1+i\omega/100|$$

En este caso, y recordando lo visto, tenemos que graficar rectas asintóticas que crecen en $\omega = 1$ *a 20dB/dec., en* $\omega = 10$ *compensan ese crecimiento (ya que hay una recta que desciende a -20dB/dec.) y en 100 vuelve a descender a -20dB/dec. Los errores máximos cometidos son siempre en los puntos donde se producen los quiebres :* $\omega = 1$, $\omega = 10$ *y* $\omega = 100$ *y pueden ser calculados muy fácilmente por el lector. Observe los resultados en la figura 7.16.*

Para el gráfico de fases, simplemente planteamos

$$\Theta_H(\omega) = tan^{-1}\omega - tan^{-1}\frac{\omega}{10} - tan^{-1}\frac{\omega}{100}$$

donde

$$\Theta_H(\omega) = 0 - 0 - 0 = 0 \qquad \omega \to 0$$
$$\Theta_H(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \qquad \omega \to \infty$$

7.6.4. Filtrado

Un filtro es un sistema que posee una transferencia tal que privilegia o permite el pasaje de determinadas bandas frecuenciales, e impide el paso de otras. La zona del espectro que permite pasar se la denomina *banda de paso* y la que no lo hace, *banda de atenuación*. El pasaje desde la banda de paso a la banda de atenuación, o viceversa, es una característica muy importante a la hora del diseño. Cuanto más *abrupto* sea esta transición, de mayor complejidad resultará el filtro real. El filtro real más sencillo se puede confeccionar con una resistencia y un capacitor en serie, donde la salida se toma como la tensión sobre el capacitor. Este filtro pasa-bajos posee una transición entre la banda de paso y la de atenuación de una pendiente muy chica (poco abrupta). La frecuencia para la cual se establece esa transición se la denomina *frecuencia de corte*. Para la presente sección nos limitaremos a enumerar solamente los filtros ideales de fase cero. Como la intención del filtro es afectar al módulo de la señal de salida, el diseño de los mismos se realiza en general sobre el módulo $|H(\omega)|$.

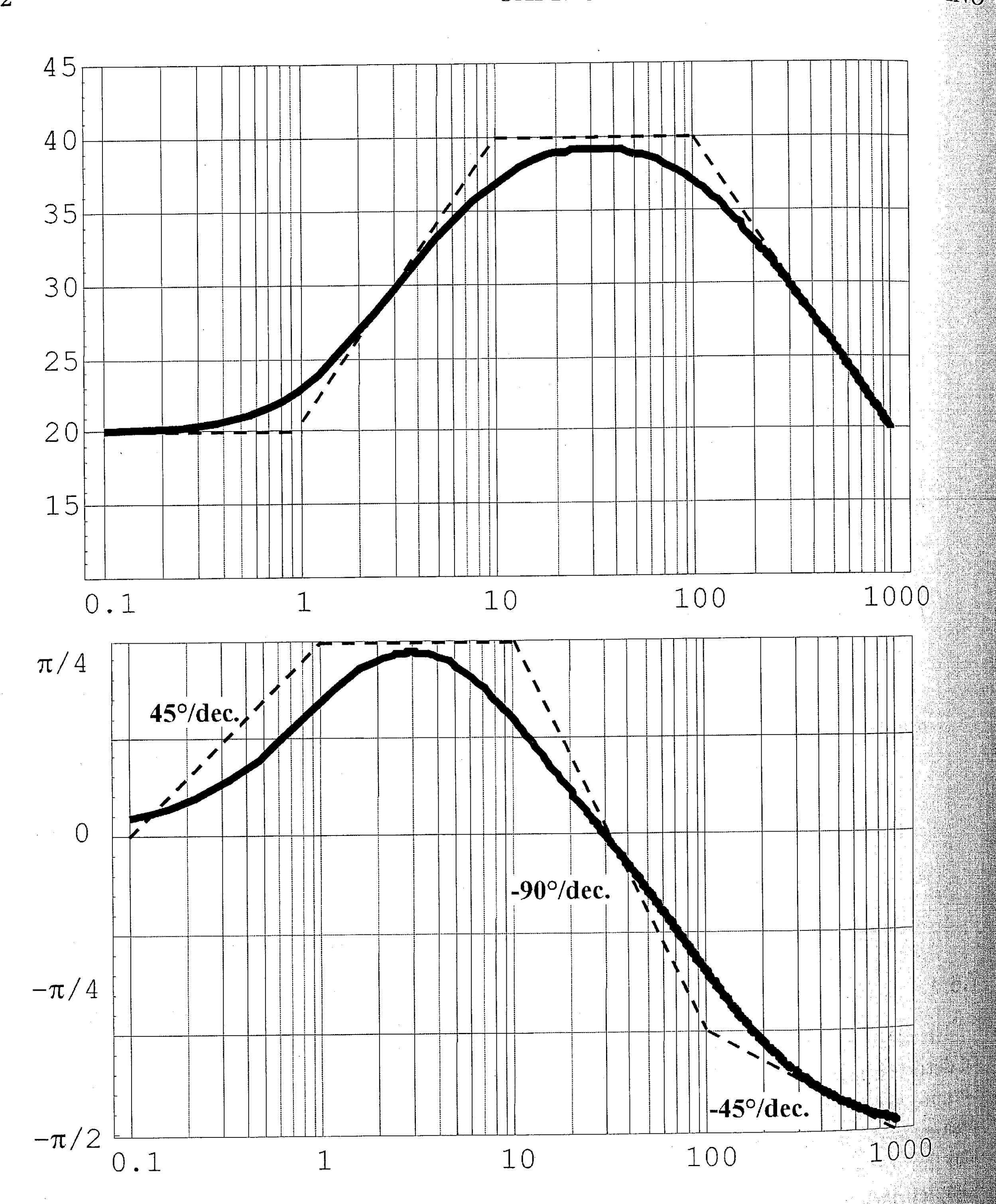


Figura 7.16: Diagramas de Bode

Filtro Pasa-Bajo ideal

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Filtro Pasa-Alto ideal

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 0 & \text{si } |\omega| < \omega_c \\ 1 & \text{si } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Filtro Pasa-Banda ideal

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_{ci} < |\omega| < \omega_{cs} \\ 0 & \text{para otro } \omega \end{cases}$$

donde ω_{ci} es la frecuencia de corte inferior y ω_{cs} es la frecuencia de corte superior.

Filtro Elimina-Banda ideal

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_{ci} < |\omega| < \omega_{cs} \\ 1 & \text{para otro } \omega \end{cases}$$

Con los filtros pasa-alto y pasa-bajo se pueden diseñar los pasa-banda y elimina-banda. Invitamos al lector a conectar en serie y en paralelo estos dos primeros para obtener los otros dos. Recuerde que al colocar dos bloques en serie la respuesta al impulso del conjunto es la convolución de las respuestas al impulso individuales. En el plano frecuencial esto implica una multiplicación. Colocando los bloques en paralelo, se suman las respuestas en tiempo y en frecuencia.

Con respecto a la respuesta de fase, realizando la antitransformada de estos filtros, se obtendrán respuestas al impulso no causales. Dicho de otro modo, estos filtros ideales producirían salidas previas al ingreso de la entrada. Como en la práctica, los filtros son causales, una posibilidad es desplazar las respuestas al impulso y retrasarlas t_0 segundos. Esto no produce cambios en la respuesta idea de módulo pero introduce una fase lineal de pendiente $-\omega t_0$. Es decir, el sistema requiere un tiempo finito para realizar el filtrado. Esta y otras consideraciones se tendrán en cuenta más adelante para el diseño de filtros digitales.

7.7. Resumen del capítulo

Presentamos y analizamos en este capítulo una herramienta de un valor teórico y práctico fundamental : La Transformada de Fourier. Una señal aperiódica de energía finita (cumpliendo las condiciones de Dirichlet) puede ser transformada, desde el dominio temporal al frecuencial, para obtener como resultado su .espectro.en módulo y fase. Las señales de energía finita tienen transformada de Fourier.

En este nuevo plano transformado, las variaciones de baja frecuencia en la señal temporal (lentas) estarán asociadas a amplitudes en la zona baja (cercano al origen) del espectro.

En el caso de variaciones bruscas (rápidas), las mismas se verán reflejadas en la zona alta del espectro. Si $f(t)$ es real: el espectro de módulos es par y el de fases impar. Desplazar una función en el tiempo no varía su espectro de módulo, solo el de fase. Las propiedades cumplen un rol principal para la simplificación de cálculos y ayudan a la comprensión de las aplicaciones.

Mediante la propiedad de derivación se pueden resolver fácilmente ecuaciones integro-diferenciales en régimen permanente, permitiendo despejar la respuesta impulsional transformada (respuesta en frecuencia) $H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$ (Salida/Entrada).

La propiedad de convolución pone de manifiesto cómo las propiedades intrínsecas del sistemas modifican el espectro de la señal de entrada, amplificando o atenuando bandas frecuenciales, que resulta finalmente en el espectro de salida. En la propiedad de modulación destacamos que al multiplicar una función temporal por un seno o un coseno de frecuencia ω_0, su espectro se convoluciona con deltas ubicados en $\pm\omega_0$. Esto desdoble el espectro desplazándolo a las frecuencias

Finalmente destacamos la Identidad de Párseval que asegura la conservación de la energía en la transformada, y presentamos los Diagramas de Bode para graficar los diagramas asintóticos de módulo y fase.

7.8. Tablas de propiedades y Transformadas

Cuadro 7.1: Propiedades de la Transformada de Fourier

	$f(t)$	$F(\omega)$
Linealidad	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)$
Desplazamiento temporal	$f(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0} F(\omega)$
Desplazamiento frecuencial	$e^{i\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
Escala	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} F(\frac{\omega}{a})$
Inversión temporal	$f(-t)$	$F(-\omega)$
Dualidad o simetría	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Derivación temporal	$f'(t)$	$i\omega F(\omega)$
Derivación frecuencial	$(-it)f(t)$	$F'(\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{i\omega}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$
Convolución	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
Modulación	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$

Cuadro 7.2: Transformadas de Fourier más usadas

$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$cos(\omega_0 t)$	$\pi\left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right)$
$sen(\omega_0 t)$	$-i\pi\left(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$
$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{i\omega + a}$
$te^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{(i\omega + a)^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert}, a > 0$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$\frac{a}{a^2 + t^2}$	$\pi e^{-a\lvert\omega\rvert}$
$e^{-at^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}$
$p_a(t) = 1(\text{si } \lvert t\rvert < a)$	$2a\frac{sen(\omega a)}{\omega a}$
$\frac{sen(at)}{\pi t}$	$p_a(\omega)=1(\text{si } \lvert\omega\rvert < a)$
$sgn(t)$	$\frac{2}{i\omega}$
$\sum_k \delta(t - kT_0)$	$\omega_0 \sum_k \delta(\omega - k\omega_0)$

7.9. Problemas propuestos

1. Calcule la transformada de Fourier de las siguientes señales y grafique el espectro de módulo y fase.

    a) $f(t) = \delta(t - t_0)$

    b) $f(t) = sgn(t)$ (función signo)

    c) $f(t) = u(t)$ (escalón)

    d) $f(t) = e^{-at}u(t)$ con $a > 0$.

    e) $f(t) = e^{-a|t|}$ con $a > 0$.

    f) $f(t) = p_a(t - t_0)$ (pulso de ancho $2a$)

    g) $f(t) = sen(at)/t$

    h) $f(t) = 1/(t^2 + a^2)$

    i) $f(t) = 1$

    j) $f(t) = e^{i\omega_0 t}$

    k) $f(t) = sen(\omega_0 t)$

    l) $f(t) = cos(\omega_0 t + \pi/4)$

    m) $f(t) = e^{-at}cos(\omega_0 t)u(t)$ con $a > 0$

    n) $f(t) = cos(\omega_0 t)u(t)$ con $a > 0$

    o) $f(t) = e^{-at}cos(\omega_0 t)u(t)$ con $a > 0$

    p) $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$

    q) $f(t) = t\,(u(t) - u(t-1))$ (utilice la propiedad de derivación)

    r) $f(t) = (1 - |t|)\,(u(t+1) - u(t-1))$ (utilice la propiedad de derivación o de convolución)

    s) $f(t) = \delta(t+4) + \delta(t) + \delta(t-4)$ (simplifique el resultado)

2. Las transformadas de Fourier de algunas funciones cuya energía no es finita pueden hallarse utilizando propiedades. Encuentre la transformada de Fourier de las siguientes funciones

    a) $sgn(t)$ (función signo).

    b) $u(t)$ (función escalón).

    c) $cos(\omega_0 t)u(t)$.

    d) $e^{-at}cos(\omega_0 t)u(t)$.

    e) $cos(t)/t$.

    RTA: a) La función signo puede escribirse en términos de la función escalón como $sgn(t) = 2u(t) - 1$. Derivando obtenemos $sgn'(t) = 2\delta(t)$ cuya transformada es 2.

Entonces, si la transformada buscada de la función signo es $X(\omega)$ la hallada para su derivada es $i\omega X(\omega)$ y despejando obtenemos

$$\boxed{sgn(t) \longrightarrow \frac{2}{i\omega}}$$

Observe que la función signo es impar y su transformada imaginaria pura.

b) La función escalón puede escribirse en términos de la función signo y una constante: $u(t) = sgn(t)/2 + 1/2$. La transformada de un delta es una constante: $A\delta(t) \longrightarrow A$ y utilizando dualidad la transformada de una constante es un delta: $A \longrightarrow 2A\pi\delta(\omega)$. Así entonces obtenemos por linealidad

$$\boxed{u(t) \longrightarrow \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)}$$

c) Al multiplicar en tiempo una función por un coseno, el efecto de modulación produce:

$$x(t).cos(\omega_0 t) \longrightarrow \frac{X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)}{2}$$

Así entonces usando el resultado anterior:

$$\boxed{cos(\omega_0 t)u(t) \longrightarrow \frac{1}{2i(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{2i(\omega + \omega_0)} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega - \omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega + \omega_0)}$$

d) Sabiendo que la transformada de la exponencial es $e^{-at}u(t) \longrightarrow 1/(i\omega + a)$, se aplica nuevamente la propiedad de modulación

$$\boxed{cos(\omega_0 t)e^{-at}u(t) \longrightarrow \frac{1}{2(i(\omega - \omega_0) + a)} + \frac{1}{2(i(\omega + \omega_0) + a)}}$$

e) Utilizando la transformada de la función signo y la propiedad de dualidad se obtiene

$$\frac{1}{t} \longrightarrow 2\pi i sgn(\omega)$$

donde se verifica que la función temporal $1/t$ es impar y su transformada imaginaria pura. Ahora aplicando nuevamente la modulación por un coseno se concluye

$$\boxed{\frac{cos(\omega_0 t)}{t} \longrightarrow \pi i[sgn(\omega - \omega_0) + sgn(\omega + \omega_0)]}$$

que también puede escribirse en la frecuencia en término de escalones como $u(-\omega - \omega_0) - u(\omega - \omega_0)$

3. Sea $F(\omega) = u(\omega+12) - u(\omega+8) + \delta(\omega) + u(\omega-12) - u(\omega-8)$. Halle la Transformada Inversa de Fourier $f(t)$.

   Rta: $1/2\pi + 4/\pi \frac{4sen(2t)}{2t} cos(10t)$

4. Una señal $f(t)$ acotada en banda (frecuencia máxima 10KHz), es multiplicada en el tiempo por $cos(2\pi 50000t) + sen(2\pi 100000t)$. Grafique un esquema de lo que sucede con su espectro.

5. Se armó en el laboratorio un circuito RC-serie.

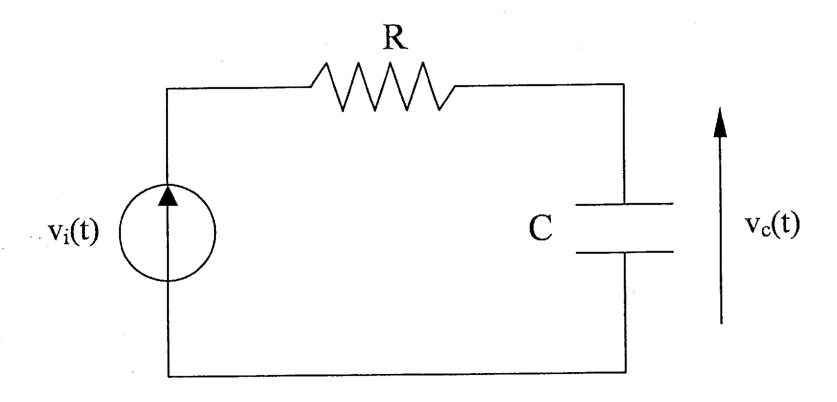


Figura 7.17: circuito RC-serie

La entrada al sistema es $V_i(t)$ y la salida es la tensión en el capacitor $V_c(t)$. Suponiendo que el capacitor está inicialmente descargado ($V_c(0) = 0V$), se pide:

a) Hallar la respuesta en frecuencia del sistema $H(\omega)$ y la respuesta impulsional $h(t)$. Grafíquela en módulo y fase.

b) Mencione al menos 3 criterios de ancho de banda razonables.

c) Suponga que los valores de los componentes son : $R = 100K\Omega$ y $C = 10\mu F$ y la tensión de entrada es:

i. $V_i(t) = e^{-t}u(t)$

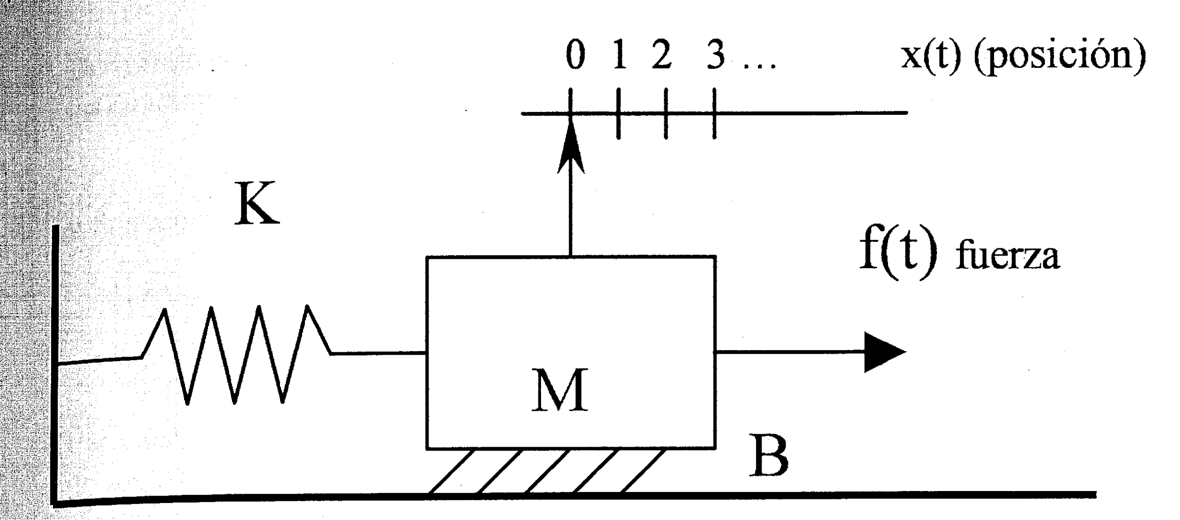
ii. $V_i(t) = cos(2t)$

iii. $V_i(t) = sen(10t)$ Calcule la tensión sobre el capacitor. Grafique los espectros de módulo de entrada y salida para cada caso.

d) Si en vez de tomar la salida como la tensión sobre el capacitor, la tomamos como la tensión sobre la resistencia. Calcule la nueva respuesta en frecuencia del sistema $H(\omega)$.

6. Un sistema mecánico compuesto por una masa M, un resorte de constante elástica y un rozamiento (proporcional a la velocidad) B, posee los elementos dispuestos de la siguiente manera:

   El sistema se encuentra inicialmente en reposo. Se pide:



a) Hallar la ecuación diferencial que relacione la posición de la masa $x(t)$ (salida) con respecto a la fuerza de entrada $f(t)$. Indicar claramente las unidades de todas las constantes.

b) Hallar el $H(\omega)$ y el $h(t)$ (respuesta impulsional). Grafique la respuesta en frecuencia del sistema en módulo y fase.

c) Comentar y dar ejemplos numéricos para los tres tipos de soluciones diferentes (dependiendo de los valores de M,K y B).

Rta: Respuesta en frecuencia $H(\omega) = \frac{1/M}{(i\omega)^2 + i\omega B/M + K/M}$

7. Considere un sistema con respuesta en frecuencia $H(\omega)$

$$H(\omega) \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| \; > \omega_c \end{cases}$$

donde a $\omega_c/2\pi$ se la denomina **frecuencia de corte**. Si en la entrada se ingresa la señal

$$x(t) = \frac{sen(at)}{\pi t}$$

Se pide

a) Grafique el espectro de módulo de la entrada, el $H(\omega)$ y la salida para

i. $a < \omega_c$

ii. $a > \omega_c$

b) Indique en qué casos hay distorsión de la entrada y qué clase de sistema es el ejemplificado.

8. Encuentre la respuesta impulsional $h(t)$ de un sistema LTI descripto por la siguiente ecuación diferencial

$$y'(t) + 2.y(t) = x(t) + x'(t) \qquad y(t=0) = 0$$

Rta: $h(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$

9. Considere un sistema LTI descripto por

$$y'(t) + 2.y(t) = x(t) \qquad y(t = 0) = 0$$

Encuentre y grafique la salida $y(t)$ para las siguientes entradas:

a) $x(t) = e^{-t}u(t)$

b) $x(t) = u(t)$ (respuesta indicial).

Rta: a) $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$, b) $\frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t)$

10. Considere un filtro pasa-bajos ideal, con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

La entrada del filtro es $x(t) = e^{-2t}u(t)$. Calcule el valor de la frecuencia de corte ω_c para que el filtro permita pasar solo la mitad de la energía de la señal de entrada.

Rta: $\omega_c = 2rad/s$.

11. Halle el ancho de banda de la señal

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$$

suponiendo un criterio de abarcar el 99 % de la energía total.

Rta: $BW_{99\,\%} = 2{,}3/a$ rad/s.

12. Un sistema lineal invariante en el tiempo con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ está descripto por la siguiente ecuación de primer orden con condiciones iniciales nulas (CIN): $x(t) = y'(t) + 2.y(t)$. Si en la entrada se coloca $x(t) = 2.sen(3t) + 4.cos(2t/5)$. Calcule la salida en régimen permanente utilizando Series de Fourier.

RTA: La respuesta transitoria y permanente de este problema se pueden hallar resolviendo la ecuación diferencial por métodos analíticos o Series de Fourier. En el primer caso, la salida es la suma de la solución homogenea más la particular: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$. La solución homogénea es directamente:

$$y_h(t) = K.e^{-2t}$$

donde K es la única constante arbitraria para una ecuación de primer orden. Para la solución particular proponemos una combinación lineal de senos y cosenos:

$$y_p(t) = A.sen(3t) + B.cos(3t) + C.cos(2t/5) + D.sen(2t/5)$$

Derivando $y_p(t)$ y reemplazando en la ecuación diferencial original se pueden hallar las constantes A, B, C, D

$$A = 4/13 \quad B = -6/13 \quad C = 25/13 \quad D = 5/13$$

y finalmente la respuesta queda

$$\boxed{y(t) = \underbrace{K.e^{-2t}}_{\text{transitorio}} + \underbrace{\frac{4}{13}sen(3t) - \frac{6}{13}cos(3t) + \frac{25}{13}cos(2t/5) + \frac{5}{13}sen(2t/5)}_{\text{permanente}}} \tag{7.12}$$

Para utilizar Series de Fourier es necesario escribir a la ecuación diferencial en término de los coeficientes de Fourier de la entrada (C_n) y los de la salida (G_n) que son la incógnita:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} in\omega_0.G_n e^{in\omega_0 t} + 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n e^{in\omega_0 t}$$

entonces despejando G_n obtenemos

$$G_n = \frac{C_n}{2 + in\omega_0} \tag{7.13}$$

La señal de entrada $x(t)$ es la suma de dos señales periódicas. Para que la suma sea periódica, es necesario que el cociente de periodos sea racional. En este caso $\omega_1 = 3 \rightarrow T_1 = 2\pi/3$ y $\omega_2 = 2/5 \rightarrow T_1 = 5\pi$ entonces $T_0 = 10\pi$ y $\omega_0 = 1/5$. Así entonces $x(t)$ puede escribirse como suma de exponenciales:

$$x(t) = 2\frac{e^{i3t} - e^{-i3t}}{2i} + 4\frac{e^{i2t/5} + e^{i2t/5}}{2}$$

y sabiendo que $\omega_0 = 1/5$ cada una se identifica con un C_n:

$$C_{15} = -i \quad C_{-15} = i \quad C_2 = 2 \quad C_{-2} = 2$$

Usando 7.13 calculamos los coeficiens de la serie de Fourier de la salida

$$G_{15} = -\frac{3+2i}{13} \quad G_{-15} = -\frac{3-2i}{13} \quad G_2 = \frac{25-5i}{26} \quad G_{-2} = \frac{25+5i}{26}$$

para entonces escribir $y(t)$ como

$$y(t) = -\frac{3+2i}{13}e^{i3t} - \frac{3-2i}{13}e^{-i3t} + \frac{25-5i}{26}e^{i2t/5} + \frac{25+5i}{26}e^{-i2t/5}$$

que puede simplificarse en la ecuación 7.12 juntando partes reales e imaginarias de cada exponencial. Note que utilizando series de Fourier solo se halla la respuesta de régimen permanente. También es interesante observar la ecuación 7.13 para entender que este sistema produce un efecto de filtro pasa bajos, ya que los coeficientes de Fourier de la salida (G_n) son cada vez mas chicos con respecto a los de la entrada (C_n) a medida que aumenta la frecuencia.

13. Hallar la resuesta al impulso $h(t)$ para un sistema de segundo orden (CIN) descripto por $x(t) = y''(t) + ay'(t) + by(t)$ para los siguientes casos: a) $a = 2, b = 1$. b) $a = 4, b = 5$. c) $a = 4, b = 3$.

RTA: La ecuación carácterística de este sistema de segundo orden es $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Las raíces para cada caso son: a) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (una raíz doble, sistema en amortiguamiento crítico). b) $\lambda_1 = -2 + i, \lambda_2 = -2 - i$ (sistema subamortiguado) c) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$ (sistema sobreamortiguado).

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación diferencial se obtiene

$$X(\omega) = (i\omega)^2 Y(\omega) + a(i\omega)Y(\omega) + bY(\omega)$$

Despejando la respuesta en frecuencia como el cociente del espectro de salida y de entrada resulta

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{(i\omega)^2 + a(i\omega) + b}$$

Analicemos ahora cada uno de los 3 casos reemplazando los valores de las constantes:

a) Amortiguamiento crítico. Una raíz doble.

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{(i\omega)^2 + 2(i\omega) + 1} = \frac{1}{(i\omega + 1)^2}$$

Utilizando la tabla de antitransformadas obtenemos la respuesta al impulso

$$\boxed{h(t) = te^{-t}u(t)}$$

b) Subamotiguado. 2 raíces complejas conjugadas.

$$H(\omega) = \frac{1}{(i\omega + 2 + i)(i\omega + 2 - i)}$$

llamado $s = i\omega$ y separando en fracciones simples obtenemos

$$H(\omega) = \frac{A}{(s + 2 + i)} + \frac{B}{(s + 2 + i)}$$

donde $A = i/2$ y $B = -i/2$. Entonces

$$H(\omega) = \frac{i}{2(i(\omega + 1) + 2)} - \frac{i}{2(i(\omega - 1) + 2)}$$

donde cada término se antitransforma utilizando la propiedad de desplazamiento frecuencial y la concida transformada de la función exponencial:

$$\boxed{h(t) = \frac{i}{2}e^{-2t}e^{-it} - \frac{i}{2}e^{-2t}e^{it} = e^{-2t}sen(t)u(t)}$$

c) Sobreamortiguado. 2 raíces reales distintas.

$$H(\omega) = \frac{1}{(i\omega + 1)(i\omega + 3)}$$

llamado $s = i\omega$ y separando en fracciones simples obtenemos

$$H(\omega) = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+3)}$$

donde $A = 1/2$ y $B = -1/2$. Entonces

$$H(\omega) = \frac{1}{2(i\omega + 1)} - \frac{1}{2(i(\omega + 3)}$$

donde cada término se antitransforma utilizando la conocida transformada de la función exponencial:

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)}$$

Aplicación en MatLab

```
%APLICACION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER
%Para la aplicación de la TF a las señales vistas (f), se implementa un
%algoritmo numérico. Posteriormente se afecta el espectro por una función
%transferencia (H) y se reconstruye la salida (Y). Los resultados se
%comparan con su expresión analítica (fa,h,ya)

%Vectores y constantes-----------------------------------------------
%Vector temporal
dt=0.01;
t=-10:dt:10;
%Vector Frecuencial
dw=0.01;
w=-10:dw:10;

%Señal de entrada: Pulso de ancho 2*a Pa(t)----------------------------
a=1;
f=esc(t+a)-esc(t-a);
%Transformada de Fourier por definición--------------------------------
for k=1:length(w),
  F(k)=sum(f.*exp(-i*w(k)*t)*dt);
end
%Solución analítica de la TF-------------------------------------------
Fa=2*a*sin(w*a)./(w*a);

%Visualización---------------------------------------------------------
figure;
subplot(311),plot(t,f),xlabel('t [s]'),ylabel('f(t)'),grid;
axis([t(1) t(end) min(f) max(f)]);
title(['Transformada de Fourier: Pulso de ancho ' num2str(2*a) ' s']);
subplot(312),plot(w,abs(F),'b'),xlabel('w [1/s]'),ylabel('F(W)'),grid
axis([w(1) w(end) min(abs(F)) max(abs(F))]);
legend('Solución analítica');
subplot(313),plot(w,abs(Fa),'r'),xlabel('w [1/s]'),ylabel('Fa(W)'),grid
axis([w(1) w(end) min(abs(Fa)) max(abs(Fa))]);
legend('Solución numérica');

%Aplicación de una función transferencia-------------------------------
%Filtro pasabajos RC---------------------------------------------------
R=1;
C=2;
H=1./(1+i*w*R*C);
%Cálculo de la salida para la entrada Pa(t)----------------------------
Y=H.*F;
%Cálculo de la antitransformada----------------------------------------
for k=1:length(t),
  y(k)=(1/(2*pi))*sum(Y.*exp(i*w*t(k))*dw);
end
%Respuesta temporal por convolución------------------------------------
%Respuesta al impulso
h=(1/(R*C))*exp(-t/(R*C)).*esc(t);
%Salida por convolución
ya=conv(h,f)*dt;
%Ajuste del tamaño del vector (el resultado de la convol. es L1+L2-1)
Lya=length(ya);
ya=ya(fix(Lya/4):Lya-fix(Lya/4)-1);

%Visualización---------------------------------------------------------
figure;
subplot(411),plot(w,abs(F)),xlabel('w [1/s]'),ylabel('F(W)'),grid;
axis([w(1) w(end) min(abs(F)) max(abs(F))]);
title('Aplicación de un filtro pasabajos y Antitransformada');
```

```
subplot(412),plot(w,abs(H)),xlabel('w [1/s]'),ylabel('H(W)'),grid;
axis([w(1) w(end) min(abs(H)) max(abs(H))]);
subplot(413),plot(w,abs(Y)),xlabel('w [1/s]'),ylabel('Y(W)'),grid;
axis([w(1) w(end) min(abs(Y)) max(abs(Y))]);
subplot(414),plot(t,real(y),'b',t,ya,'r'),xlabel('t
[s]'),ylabel('y(t)'),grid;
axis([t(1) t(end) min(abs(y)) max(abs(y))]);
legend('Por antitransformada','Por convolución');
```

Capítulo 8

Análisis de Fourier para señales discretas

8.1. Introducción

La Transformada de Fourier analizada hasta el momento solo puede ser aplicada en señales continuas, y por lo tanto no permite el análisis de sistemas LTI de tiempo discreto. Estos últimos pueden ser caracterizados por su respuesta al impulso $h[n]$ (el análogo al $h(t)$ en los sistemas continuos), que es la salida al colocar un impulso $\delta[n]$ en la entrada. La transformada de Fourier para señales discretas será la herramienta principal para el análisis y síntesis de dichos sistemas. Encontraremos la *respuesta en frecuencia* de los sistemas discretos destacando las similitudes y diferencias con su contraparte continua. Asimismo, el presente capítulo sentará las bases necesarias para la comprensión del *Teorema de Muestreo* que veremos en el capítulo siguiente.

Para continuar en forma análoga a la contraparte continua, dividiremos el capítulo en dos grandes secciones. La primera se ocupará de la Serie de Fourier para señales discretas periódicas, mientras que la segunda generalizará el concepto de serie para extenderlo, al igual que en tiempo continuo, a señales aperiódicas. Al final veremos algunas aplicaciones y un ejemplo práctico para la implementación de un algoritmo de cálculo que permita hallar el espectro de una señal discreta.

8.2. Serie de Fourier para señales discretas periódicas

Comenzaremos recordando que las señales discretas con las que trabajaremos, deben ser consideradas una secuencia de números como la esquematizada en la figura 8.1.

En el eje horizontal colocamos la variable n (entera) que crecerá siempre de a una unidad o una *muestra*. Entre dos muestras consecutivas simplemente no hay nada, y la distancia entre ellas **no es proporcional** al tiempo en que se las adquirió. La señal graficada pudo haber sido adquirida de a una muestra por segundo, o de a una muestra por hora. En el

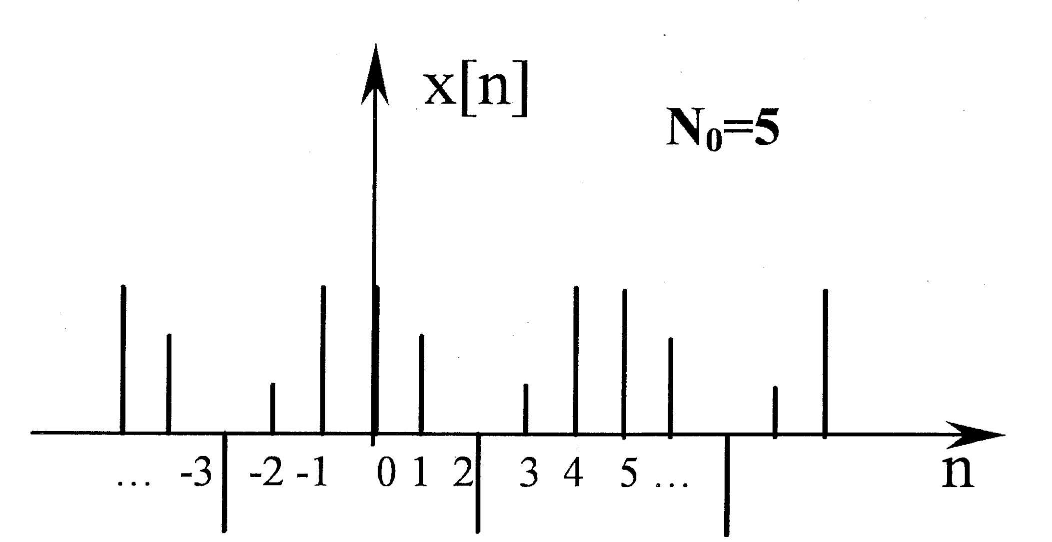


Figura 8.1: Señal discreta normalizada.

presente capítulo siempre analizaremos este tipo de señales discretas normalizadas. En el capítulo siguiente nos ocuparemos de la adquisición de señales desnormalizadas y el muestreo o digitalización de las mismas. Allí sí la frecuencia de muestreo jugará un rol principal. En todos los casos, la amplitud de cada muestra se considerará un valor real positivo o negativo.

Debe pensarse a estas señales como una sucesión de números almacenados en un listado de números (*array*) o simplemente en una columna de una planilla de cálculo.

Como vemos además en la figura 8.1, la señal graficada es periódica, con período $N_0 = 5$ muestras. La periodicidad de las señales discretas tienen unidades de muestras y no de segundos como en el caso temporal. Recordemos la definición de periodicidad.

Definición 8.2.1 *Una señal $x[n]$ discreta es periódica, si existe un N_0* **entero positivo** *tal que*

$$x[n] = x[n + N_0] = x[n + k.N_0]$$

donde el último término de la derecha destaca el hecho que si una señal periódica tiene un período de $N_0 = 5$ muestras, la señal también se repite cada 10 muestras, cada 15 y genéricamente cada $k \cdot N_0 = k \cdot 5$ muestras (con k entero). Al valor N_0 se lo denomina **período**.

La frecuencia de la señal se define clásicamente como la inversa del período $(1/N_0)$, aunque en el caso discreto normalizado su unidad no va a ser el *Hertz* ya que la variable n no se mide en segundos. De esta manera presentaremos la frecuencia angular normalizada con la letra omega mayúscula, siendo

$$\Omega = \frac{2\pi}{N_0}$$

Con esta simple definición podemos inferir la primer diferencia significativa entre las señales discretas periódicas y las continuas. El período N_0 debe ser un número entero de

muestras, por lo tanto su valor mínimo es 2 (si $N_0 = 1$ la señal sería una constante). Como $N_0 = 2$ es el período de repetición mínimo, la frecuencia máxima normalizada será:

$$\Omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

La señal más simple de alta frecuencia es $x[n] = cos(\Omega_0 n) = cos(\pi n) = (-1)^n$, donde cómo vemos es una señal alternada, que se repite cada 2 muestras, como muestra la figura 8.2.

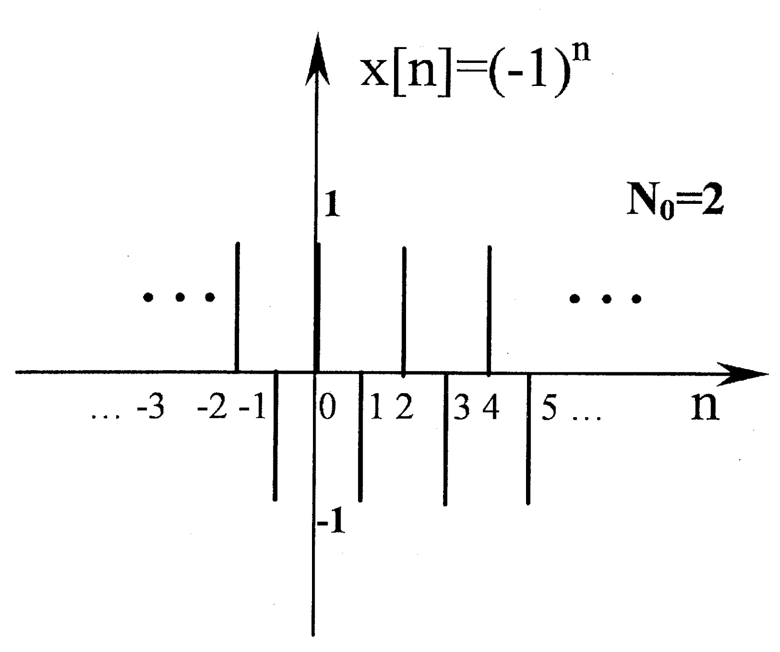


Figura 8.2: La señal discreta normalizada de mayor frecuencia.

Por lo tanto, **la frecuencia normalizada máxima de una señal discreta es** π.

8.2.1. Conjunto de funciones ortogonales

Recordando que en el caso continuo (6.2), la Serie de Fourier estaba determinada por un conjunto de funciones ortogonales relacionadas armónicamente, intentaremos extrapolar ese concepto al caso discreto. Recordemos además que el peso de cada función (coeficientes de la serie) estaba calculado como una *proyección ortogonal* de la función a aproximar sobre la función aproximante. Esta proyección aseguraba la minimización del error cuadrático medio como medida de diferencia entre la señal original y su descomposición en serie. Destaquemos además que, para el caso continuo, era necesario utilizar **todos** los infinitos coeficientes de la serie para que la energía entre la señal original, y la sintetizada mediante la serie, coincidieran. Veamos qué sucede en el caso discreto.

Denominamos a $\psi_k[t]$ un conjunto de funciones *ortogonales* en un intervalo $[N_1, N_2]$ si para un cualquier par de ellas $\psi_m[n]$ y $\psi_k[n]$ se cumple:

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \psi_m[n]\psi_k^*[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq k \\ T_0 & \text{si } m = k \end{cases} \tag{8.1}$$

donde ψ^* implica el complejo conjugado y $T_0 \neq 0$. A la integral (8.1) se la denomina en términos vectoriales, el producto interno o escalar y la designaremos como

$$< \psi_m, \psi_k >= \sum_{n=N_1}^{N_2} \psi_m[n]\psi_k^*[n] \tag{8.2}$$

Si además $T_0 = 1$ al conjunto de funciones se las denomina *ortonormales.*

Las funciones ortogonales que utilizaremos para nuestro desarrollo serán las exponenciales complejas discretas. Estas funciones difieren bastante de su contraparte continua, y este hecho generará algunas diferencias sustanciales es la serie.

8.2.2. Las exponenciales complejas discretas

La exponencial compleja discreta $e^{i\Omega_0 n}$ es una señal que posee dos características importantes vistas en el primer capítulo del libro:

- $e^{i\Omega_0 n}$ es una señal periódica en n **si y solo si** $\Omega_0/(2\pi)$ es un número racional. Esto la hace muy diferente a su contraparte continua $e^{i\omega_0 t}$ que era *siempre* periódica. Es decir, Ω_0 debe ser un múltiplo o submúltiplo de π.

- $e^{i\Omega n}$ es una señal periódica en Ω, y su período frecuencial es 2π. Recordemos que la señal $cos(\Omega_0 n) = cos(\pi/3n)$ es igual a $cos\left((\pi/3 + 2\pi)n\right) = cos(7\pi n/3)$. En las exponenciales complejas discretas, aumentar el Ω_0 va incrementando la frecuencia [1] de la señal solo hasta llegar a $\Omega_0 = \pi$. Luego la frecuencia comienza a disminuir, hasta que al llegar a $\Omega_0 = 2\pi$ recreamos la señal original. Este hecho **no se manifestaba** en las exponenciales continuas, para las cuales cada aumento de frecuencia (ω) producía una señal diferente irrepetible.

Probaremos a continuación que el conjunto de exponenciales complejas $e^{ik\Omega_0 n} = e^{ik(2\pi/N_0)n}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ es ortogonal en cualquier intervalo $N_0 = 2\pi.r/\Omega_0$.(El número entero r debe seleccionarse de tal manera que N_0 sea el entero más pequeño).

Demostración:

[1] Entendamos el concepto de frecuencia para señales discretas como la velocidad o tasa de cambio. Si una señal varía bruscamente de una muestra a otra, alternando entre valores positivos y negativos, esa señal posee componentes de alta frecuencia. Por el contrario, si entre dos muestras adyacentes no se percibe mucha variación de amplitud, diremos que la señal posee componentes de baja frecuencia.

($\Longrightarrow$)

Utilizaremos la siguiente relación, asociada a la convergencia de la serie geométrica de razón q:

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \begin{cases} N & \text{si } q = 1 \\ \frac{1-q^N}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases} \tag{8.3}$$

Si suponemos $q = e^{ik\Omega_0}$, entonces

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} e^{ik\Omega_0 n} = \begin{cases} N_0 & \text{si } k = 0, \pm N_0, \pm 2N_0, \ldots \\ \frac{1-e^{ik\Omega_0 N_0}}{1-e^{ik\Omega_0}} = 0 & \text{para otro } k \end{cases}$$

ya que $e^{ik(2\pi/N_0)N_0} = 1$. Las exponenciales de la sumatoria están relacionadas armónicamente ($\Omega_0, 2\Omega_0, 3\Omega_0 \ldots$), por lo tanto el período de la primer exponencial es $N_0 = 2\pi/\Omega_0$, y el de la segunda es $N_0/2$; pero si se repite cada $N_0/2$ muestras, también lo hará cada N_0 muestras. De esta manera la sumatoria de las infinitas exponenciales será periódica con período N_0. Tomando cualquier intervalo de N_0 muestras, escribimos

$$\sum_{<n=N_0>} e^{ik\Omega_0 n} = \begin{cases} N & \text{si } k = 0, \pm N_0, \pm 2N_0, \ldots \\ 0 & \text{para otro } k \end{cases} \tag{8.4}$$

Ahora introduciremos las exponenciales en la ecuación (8.2), y utilizando (8.4)

$$\sum_{n=<N_0>} \psi_m[n]\psi_k^*[n] = \sum_{n=<N_0>} e^{im\Omega_0 n} e^{-ik\Omega_0 n} = \sum_{n=<N_0>} e^{i(m-k)\Omega_0 n} = \begin{cases} N_0 & \text{si } m = k \\ 0 & \text{si } m \neq k \end{cases} \tag{8.5}$$

donde $m, k < N_0$. De esta manera, al demostrar que el producto interno es cero cuando $m = k$ demostramos la ortogonalidad de las exponenciales complejas sobre un intervalo $n =< N_0 >$.

($\Longleftarrow$)

8.2.3. La serie y sus coeficientes

Consideremos a continuación la representación de una señal discreta periódica $x[n]$ en términos de combinaciones lineales de exponenciales discretas:

$$x[n] = \sum_{k=<N_0>} C_k e^{ik\Omega_0 n} \tag{8.6}$$

donde $\Omega_0 = 2\pi/N_0$, y los C_k son los coeficientes a determinar para que la serie aproxime, en el sentido del error cuadrático medio, a $x[n]$. Estos C_k serán los coeficientes de la Serie de Fourier para señales discretas. Se utiliza el subíndice k porque el n representa ahora número de muestra (o el equivalente a tiempo). Destacamos que la sumatoria se realiza **solamente**

sobre N_0 exponenciales o N_0 coeficientes, ya que hemos demostrado que **solo hay N_0 exponenciales diferentes**. De esta manera la Serie de Fourier para señales discretas es una serie finita.

Para determinar los coeficientes C_k podemos pensar que la señal periódica a descomponer tiene un período de N_0 muestras, y por lo tanto podríamos plantear N_0 ecuaciones que, como las exponenciales complejas son ortogonales, serán linealmente independientes. Este sistema de ecuaciones matricial será compatible determinado, debido a que el determinante de la matriz compuesta por todas las combinaciones de exponenciales complejas para un determinado N_0 es siempre distinto de cero.

Para simplificar este análisis multipliquemos (8.5) a ambos miembros por $e^{-im\Omega_0 n}$ y realicemos una suma de N_0 componentes en n:

$$\sum_{n=<N_0>} x[n]e^{-im\Omega_0 n} = \sum_{n=<N_0>} \sum_{k=<N_0>} C_k e^{i(k-m)\Omega_0 n}$$
$$\sum_{n=<N_0>} x[n]e^{-im\Omega_0 n} = \sum_{k=<N_0>} C_k \sum_{n=<N_0>} e^{i(k-m)\Omega_0 n}$$

Utilizando (8.5), la segunda sumatoria de la derecha es cero a menos que $m-k$ sea múltiplo de N_0, en cuyo caso la sumatoria da N_0. Como tanto n, m y k están acotados al mismo intervalo dentro de N_0, concluimos

$$\sum_{n=<N_0>} x[n]e^{-im\Omega_0 n} = C_m N_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad m = k$$

por lo tanto, la señal periódica $x[n]$ y su descomposición en serie, son

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=<N_0>} C_k e^{ik\Omega_0 n}} \tag{8.7}$$

$$\boxed{C_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x[n]e^{-ik\Omega_0 n}} \tag{8.8}$$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 8.2.1 *Calcule la serie de Fourier de $x[n] = cos(\Omega_0 n)$ y de $x[n] = sen(\Omega_0 n)$. Grafique el espectro de módulo y fase del seno para $N_0 = 5$.*

Recordemos que para que el seno o el coseno sean periódicos, el cociente $(2\pi)/\Omega_0$ debe ser racional (para asegurar que exista un N_0 entero).

Descomponemos entonces el seno y el coseno, utilizando la relación] de Euler:

$$cos(\Omega_0 n) = \frac{e^{i\Omega_0 n}}{2} + \frac{e^{-i\Omega_0 n}}{2}$$
$$sen(\Omega_0 n) = \frac{e^{i\Omega_0 n}}{2i} - \frac{e^{-i\Omega_0 n}}{2i}$$

En vez de utilizar la fórmula de cálculo de los coeficientes (8.8), escribimos la serie a determinar:

$$x[n] = cos(\Omega_0 n) = \sum_{k=<N_0>} C_k e^{ik\Omega_0 n}$$

y por simple inspección notamos que la serie del coseno solo tiene 2 coeficientes:

$$C_1 = \frac{1}{2} \qquad C_{-1} = \frac{1}{2}$$

Y para el seno

$$C_1 = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2} \qquad C_{-1} = \frac{-1}{2i} = \frac{i}{2}$$

Grafiquemos los espectros para el caso del seno con $N_0 = 5$ en la figura 8.3.

El espectro de módulo del coseno es el mismo, el de fase es cero para todo k.

Vemos nuevamente que si $x[n]$ es real el espectro de módulo es par y el de fase impar.

Los espectros de módulo y fase son ambos periódicos con periodo N_0 muestras. Esto último es coherente con la periodicidad encontrada tanto en las exponenciales complejas como en los coeficiente C_k.

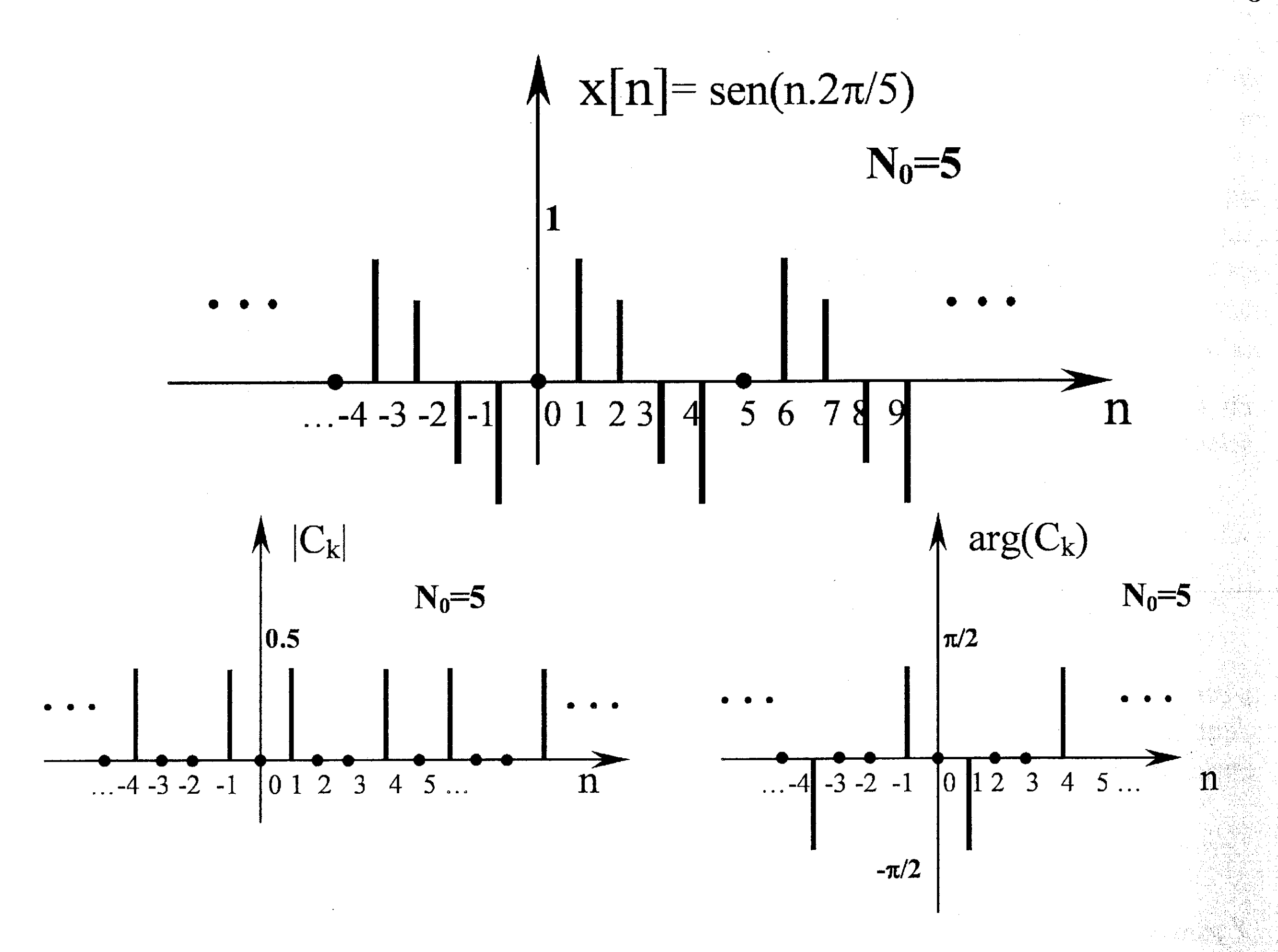


Figura 8.3: señal discreta periódica con $N_0 = 5$ y sus coeficientes.

Ejemplo 8.2.2 *Calcule la serie de Fourier de la secuencia periódica* $x[n] = \{3, 2, 1, 0\}$ *en la figura 8.4.*

Calculamos los coeficientes de la Serie de Fourier con la ecuación (8.8):

$$C_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x[n] e^{-ik\Omega_0 n} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-ik(2\pi/4)n} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-ik(\pi/2)n}$$

Como en este caso son solo cuatro coeficientes, calculemos cada uno por separado:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n] = \frac{1}{4}(3+2+1+0) = \frac{3}{2} \\
C_1 &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e{-}i,1.(\pi/2)n = \frac{1}{4}(3+2e{-}i\pi/2+1e{-}i\pi+0e{-}i3\pi/2) = \frac{1-i}{2} \\
C_2 &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e{-}i,2.(\pi/2)n = \frac{1}{4}(3+2e{-}i\pi+1e{-}i2\pi+0e{-}i4\pi) = \frac{1}{2} \\
C_3 &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e{-}i,3.(\pi/2)n = \frac{1}{4}(3+2e{-}i3\pi/2+1e{-}i3\pi+0e{-}i6\pi) = \frac{1+i}{2}
\end{aligned}
$$

Observe los gráficos de módulo y fase en la figura 8.4.

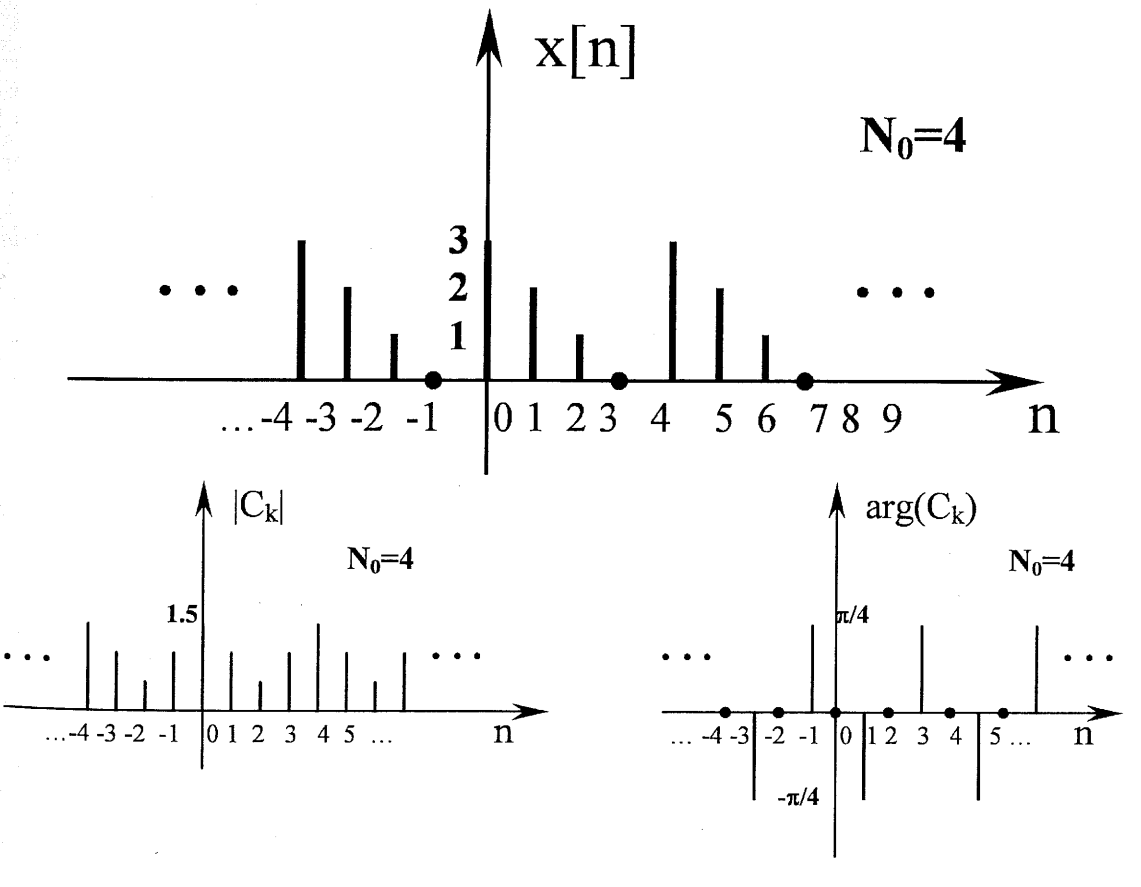


Figura 8.4: Arriba: Señal discreta periódica de período 4 muestras. Abajo:Espectro de módulo y fase.

Ejemplo 8.2.3 *Calcule la serie de Fourier de la señal cuadrada en la figura 8.5.*

Calculamos los coeficientes de la Serie de Fourier (8.8)

$$C_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x[n] e^{-ik\Omega_0 n} = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{9} x[n] e^{-ik(2\pi/10)n} = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{4} 1.e^{-ik(\pi/5)n}$$

y utilizando la convergencia de series geométricas (8.3), con $q = e^{-ik(\pi/5)}$ *y* $N_0 - 1 = 4$

$$C_k = \frac{1}{10} \frac{1 - e^{-ik(\pi/5)5}}{1 - e^{-ik(\pi/5)}} = \frac{1}{10} \frac{1 - e^{-ik\pi}}{1 - e^{-ik(\pi/5)}}$$

Intuitivamente intentaremos llevar esta expresión a la forma de $sen(x)/x$*, aunque sabemos que los* C_k *deben ser periódicos con período* 10*. Para esto, sacamos factor común en el numerador y en el denominador,*

$$C_k = \frac{1}{10} \frac{e^{-ik\pi/2}}{e^{-ik(\pi/10)}} \frac{e^{ik\pi/2} - e^{-ik\pi/2}}{e^{ik(\pi/10)} - e^{-ik(\pi/10)}} = \frac{1}{10} e^{-ik(2\pi/5)} \frac{sen(k\pi/2)}{sen(k\pi/10)}$$

El módulo del espectro se grafica en la figura 8.5.

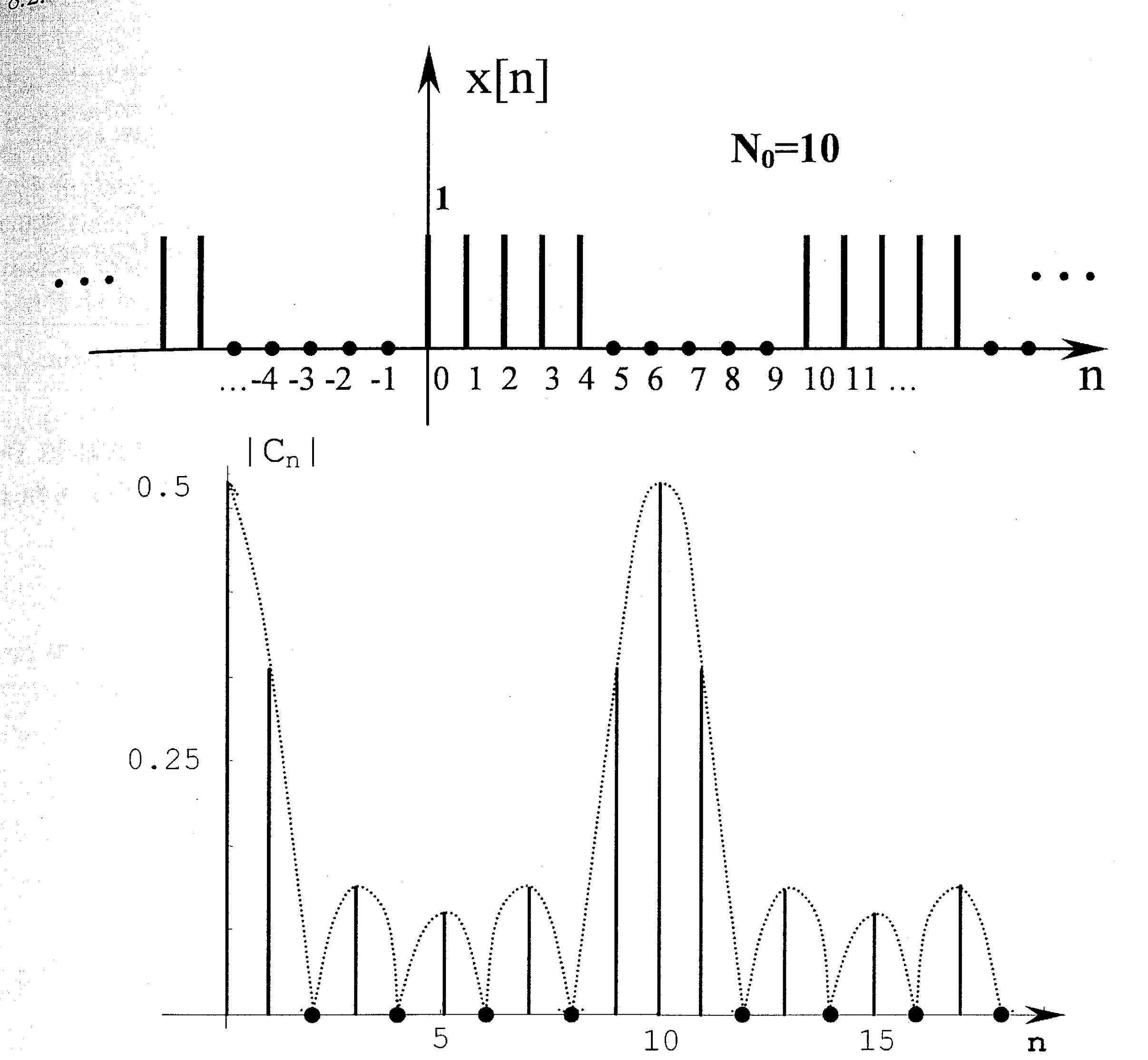


Figura 8.5: **Arriba:** Señal cuadrada discreta periódica. Abajo: Espectro de módulo periódico de la señal temporal cuadrada periódica.

8.2.4. Propiedades de la serie

Periodicidad de los coeficientes

Una señal discreta periódica, con período $N_0 = 5$ tendrá solamente 5 coeficientes C_k, del C_0 al C_4. Al calcular el C_5, este será igual al C_0 y así sucesivamente, por lo tanto:

$$C_k = C_{k+N_0}$$

Observemos las gráficas del ejemplo (8.2.1) para el caso $N_0 = 5$, donde vemos que el $C_{-1} = C_{-1+5} = C_4$. Podemos concluir entonces:

El espectro de módulo y el de fase de una señal discreta periódica, es discreto y periódico

Simetría en señales

Análogamente a lo que sucedía en el caso de señales temporales continuas, podemos descomponer a los coeficientes en su parte real y su parte imaginaria: $C_k = a_k - ib_k$. Si $x[n]$ es par, los coeficientes C_k serán reales y todos los $b_k = 0$. Si $x[n]$ es impar, los C_k serán imaginarios puros y $a_k = 0$. Como siempre el C_0 es el valor medio de la señal temporal, ya que:

$$C_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x[n]$$

Además, si $x[n]$ es real, se verifica que $C_k = C^*_{-k}$, donde el $*$ implica el conjugado. De esta manera comprobamos que los espectros de módulo son pares y los de fase impares.

Demostración:

$(\Longrightarrow)$

De la definición de los coeficientes (8.8), intercambiando k por $-k$ y como $x[n]$ es real $x[n] = x^*[n]$:

$$C_{-k} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x[n]e^{ik\Omega_0 n} = \left[\frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x[n]e^{-ik\Omega_0 n}\right]^* = C_k^*$$

conjugando ambos miembros

$$C_k = C^*_{-k}$$

$(\Longleftarrow)$

Es así como en el espectro de módulo los coeficientes son $(|C_k| = |C_{-k}|)$ y en el de fase $(arg\{C_k\} = -arg\{C_{-k}\})$. Note por ejemplo que $|C_1| = |C_{-1}|$ y $arg(C_1) = -arg(C_{-1})$.

Conservación de la potencia: Identidad de Párseval

Al descomponer una señal discreta periódica en una serie de Fourier, podemos entender a esa descomposición como una distribución ponderada de la energía total en términos frecuenciales, cada uno asociado a una exponencial compleja. Los coeficientes con mayor módulo reflejan una concentración mayor de energía para esa frecuencia particular. Recuerde que las bajas frecuencias son cercanas a cero y las altas cercanas a $\pm\pi$. Para valores más allá de π, se considera una disminución en frecuencia hasta llegar a 2π que corresponde nuevamente a las frecuencia bajas. Esto corrobora la periodicidad analizada del espectro de frecuencias.

Este pasaje entre el dominio temporal y el frecuencial, como vimos en el caso continuo, conserva la energía en la denominada identidad de Párseval:

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N_0-1} |C_k|^2$$

En este caso toda la energía de la señal temporal periódica está distribuida en sus N_0 coeficientes. En el caso continuo era necesario tomar los infinitos coeficientes C_n para igualar la energía de $x(t)$. Si se aproximaba $x(t)$ con un número de coeficientes finito, se producía una distorsión en la señal real. En el caso discreto, este fenómeno no se presenta. Si una señal tiene periodo $N_0 = 100$ muestras, entonces su serie tendrá 100 coeficientes y toda su energía estará representada en los mismos. Tomando los 100 coeficientes se representa el 100 % de la potencia de la señal original.

Demostración:

$(\Longrightarrow)$

Sean dos secuencias periódicas $x_1[n]$ y $x_2[n]$, con período N_0, y con Serie discreta de Fourier

$$x_1[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} D_k e^{ik\Omega_0 n} \qquad x_2[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} E_k e^{ik\Omega_0 n}$$

respectivamente, con $\Omega_0 = 2\pi/N_0$. La función $x[n] = x_1[n].x_2[n]$ es periódica con período N_0, ya que

$$x[n+N_0] = x_1[n+N_0].x_2[n+N_0] = x_1[n].x_2[n] = x[n]$$

Si calculamos los coeficientes de la serie de $x[n]$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} C_k e^{ik\Omega_0 n}$$

con

$$C_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-ik\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n]x_2[n]e^{-ik\Omega_0 n} \tag{8.9}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
C_k &= \sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n].x_2[n].e^{-ik\Omega_0 n} \\
&= \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n]\left(\sum_{l=0}^{N_0-1} E_l e^{il\Omega_0 n}\right) e^{-ik\Omega_0 n} \\
&= \sum_{l=0}^{N_0-1} E_l \left(\underbrace{\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n]e^{-i(k-l)\Omega_0 n}}_{D_{k-l}}\right) \\
C_k &= \sum_{l=0}^{N_0-1} E_l.D_{k-l}
\end{aligned}$$

si ahora en (8.9) colocamos a $k = 0$ obtenemos la denominada *Relación de Párseval*:

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n]x_2[n] = \sum_{l=0}^{N_0-1} E_l.D_{-l}$$

Para concluir con la identidad de Párseval imponemos a $x_2[n] = x_1^*[n]$(su conjugado). Los coeficientes de $x_2[n]$ serán:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_2[n]e^{-ik\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_1^*[n]e^{-ik\Omega_0 n} \\ &= \left(\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n]e^{ik\Omega_0 n}\right)^* \\ &= D_{-k}^* \end{aligned}$$

por lo tanto,utilizando la Relación de Párseval con $x_2[n] = x_1^*[n]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n]x_1^*[n] &= \sum_{l=0}^{N_0-1} D_{-l}^* D_{-l} = \sum_{l=0}^{N_0-1} D_l D_l^* \\ \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} |x_1[n]|^2 &= \sum_{l=0}^{N_0-1} |D_l|^2 \end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$

8.3. Transformada de Fourier para señales discretas

Ahora deseamos calcular el espectro de una señal discreta aperiódica. Siguiendo una analogía con el caso continuo, deberíamos estudiar qué sucede con el cálculo de los coeficientes de la Serie de Fourier al comenzar a extender el período N_0 de una señal periódica a infinito, siempre conservando su forma original (solo agregando ceros en los extremos). De esta manera construiremos una señal aperiódica y podríamos hallar su espectro.

Utilicemos dos funciones, una periódica $x_p[n]$ con período N, y otra aperiódica $x_a[n]$ definida como

$$x_a[n] = \begin{cases} x_p(t) & \text{si } |n| < N/2 \\ 0 & \text{si } |n| > N/2 \end{cases}$$

donde suponemos que N es par (esto no condiciona la demostración). Además la señal periódica $x_p[n]$ tendrá valores distintos de cero, solamente entre $\pm N_1$. Grafiquemos ambas:

De esta manera vemos que si extendemos N hasta infinito, pero mantenemos N_1 fijo, la señal periódica se transforma en aperiódica:

$$x_a[n] = \lim_{N\to\infty} x_p[n]$$

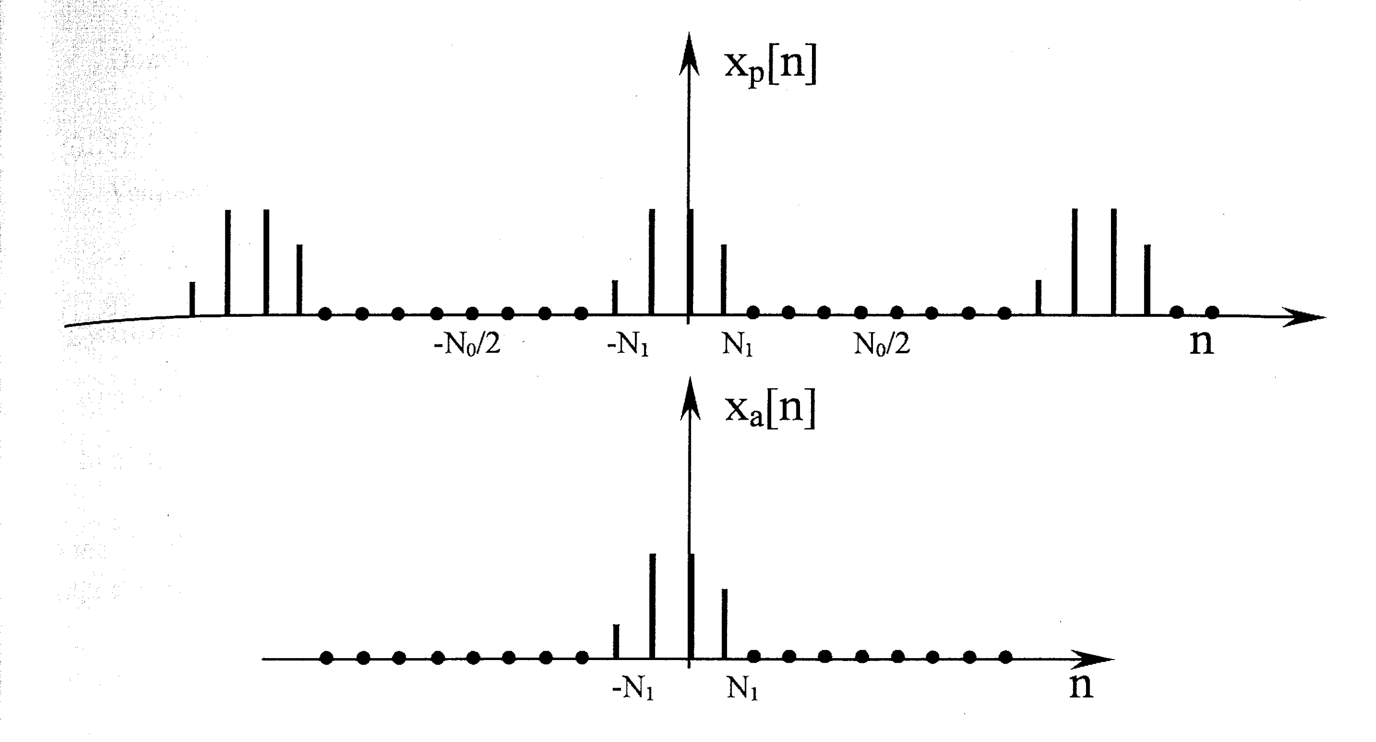


Figura 8.6: Señal periódica y su extensión aperiódica.

Veamos qué sucede con los coeficientes. La señal $x_p[n]$ se puede descomponer en serie utilizando (8.7)

$$x_p[n] = \sum_{k=<N>} C_k e^{ik\Omega_0 n}$$

donde los coeficientes se calculan como

$$C_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x_p[n] e^{-ik(2\pi/N_0)n}$$

y acotamos la sumatoria dentro de N_1.

Como $x_p[n]$ es igual a $x_a[n]$ dentro del intervalo de la sumatoria

$$C_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x_a[n] e^{-ik(2\pi/N_0)n}$$

y ya que la señal aperiódica no posee más valores,

$$C_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a[n] e^{-ik(2\pi/N_0)n}$$

Donde definimos a la *envolvente* de los coeficientes como

$$X(\Omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n} \tag{8.10}$$

Reemplazando,

$$C_k = \frac{1}{N_0} X\left(\frac{2\pi k}{N_0}\right) = \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0) \tag{8.11}$$

e introduciendo el C_k en la serie

$$x_p[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0)e^{ik\Omega_0 n}$$

donde recordamos que $1/N_0 = \Omega_0/2\pi$. Si ahora aplicamos límite en ambos miembros, para $\Omega_0 \to 0$ o $N_0 \to \infty$, la señal periódica se transforma en la aperiódica, y la sumatoria en una integral:

$$\begin{aligned} \lim_{N_0 \to \infty} x_p[n] &= \lim_{\Omega_0 \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(k\Omega_0)e^{ik\Omega_0 n}\Omega_0 \\ x_a[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)e^{i\Omega n} d\Omega \end{aligned}$$

La integral del lado derecho se debe realizar sobre cualquier intervalo de longitud 2π. Esto puede ser explicado de diferentes formas. Pensemos que comenzamos a incrementar N_0. Las serie poseerá cada vez más coeficientes[2], pero a medida que N_0 crece, Ω_0 decrece, y como la exponencial dentro de la sumatoria es $e^{ik\Omega_0 n}$ esta describirá a un vector dando una única vuelta entre 0 y 2π. Luego, tanto los coeficientes como el espectro se repiten.

Otra forma de ver el fenómeno es pensar que a medida que se aumenta el período, el espectro discreto pasa a ser continuo. Como la variable discreta daba pasos $k\Omega_0$, ahora estos pasos infinitesimales se convierten en una variable continua Ω. Como todas las exponenciales complejas son **periódicas en frecuencia** con período 2π, **el espectro de una señal aperiódica es continuo y periódico con período** 2π.

Presentemos entonces a la Transformada de Fourier para señales discretas y a la Transformada Inversa o antitransformada.

$$\boxed{X(\Omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n}} \tag{8.12}$$

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)e^{i\Omega n} d\Omega} \tag{8.13}$$

[2]Una señal periódica de periodo N_0 posee N_0 coeficientes C_k en su serie de Fourier.

Donde recordamos la relación entre los coeficientes de la serie y la envolvente.

$$C_k N_0 = X(k\Omega_0) \tag{8.14}$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 8.3.1 *Calcule la Transformada de Fourier de:*

a) $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$.

b) $x[n] = a^n u[n]$ *con* $1 > a > 0$.

c) $x[n] = u[n] - u[n-5]$

a) Utilicemos la definición de la Transformada de Fourier (8.12) con $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$*:*

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta[n] + \delta[n-1])\, e^{-i\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-1].e^{-i\Omega n} = 1 + e^{-i\Omega} \end{aligned}$$

Como vemos la transformada de la suma es la suma de las transformadas (Propiedad de linealidad(8.3.3)).

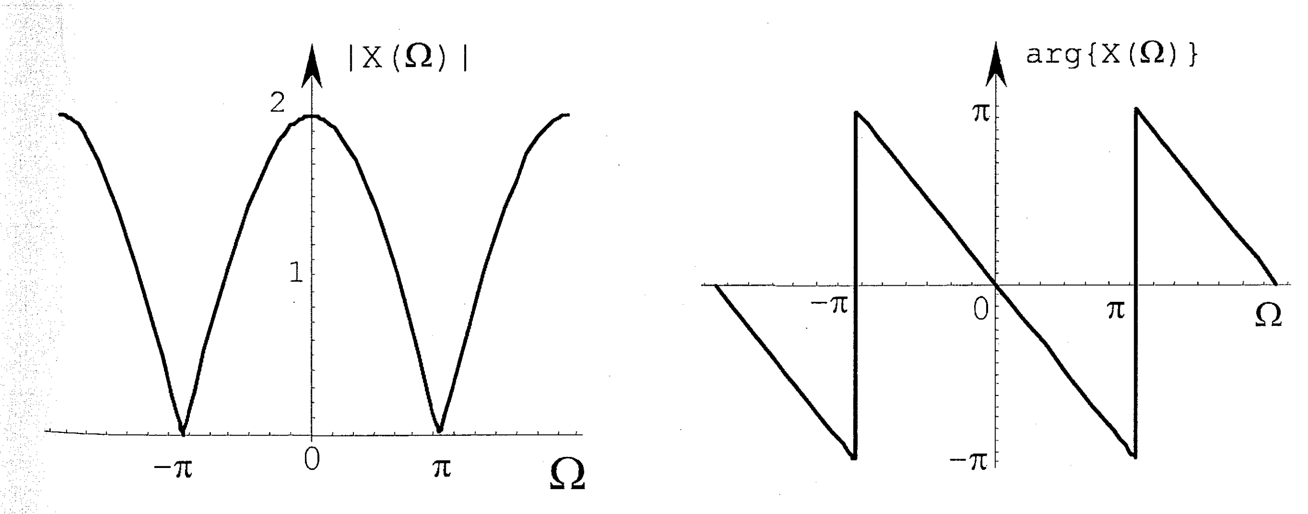


Figura 8.7: Espectro de módulo y fase del ejercicio a)

Como en el caso continuo, si $x[n]$ *no es par ni impar, la Transformada de Fourier posee una parte real y otra imaginaria:*

$$X(\Omega) = 1 + e^{-i\Omega} = 1 + cos(\Omega) - i.sen(\Omega)$$

y un módulo y una fase, en función de Ω *dados por*

$$
\begin{aligned}
|X(\Omega)| &= \sqrt{[1+cos(\Omega)]^2+[sen(\Omega)]^2} = \sqrt{1+cos^2(\Omega)+2.cos(\Omega)+sen^2(\Omega)} \\
&= \sqrt{2+2cos(\Omega)} = \sqrt{4.cos^2(\Omega/2)} = 2.cos(\Omega/2) \\
arg\{X(\Omega)\} &= arctg\left(-\frac{sen(\Omega)}{1+cos(\Omega)}\right)
\end{aligned}
$$

El espectro de la señal está concentrado en las bajas frecuencias (cercanas a 0*) como muestra la figure 8.7.*

b) Utilicemos nuevamente la definición de la Transformada de Fourier (8.12) con $x[n] = a^n u[n]$.

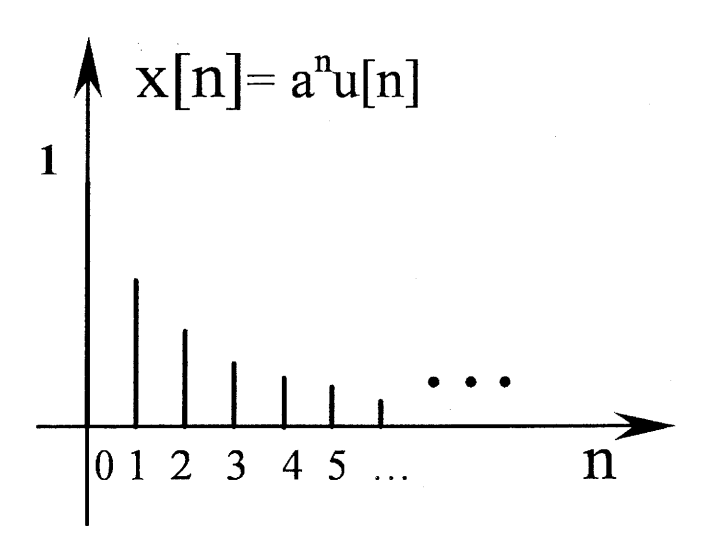


Figura 8.8: Exponencial decreciente discreta.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.e^{-i\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a.e^{-i\Omega}\right)^n$$

Utilizando la convergencia de la serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow |q|<1$$

con $q = a.e^{-i\Omega}$ *y* $|q| = |a.e^{-i\Omega}| = |a| < 1$ *(del enunciado), nos queda*

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-a.e^{-i\Omega}}$$

Nuevamente, como la función no es par ni impar, $X(\Omega)$ tiene parte real e imaginaria distinta de cero:

$$
\begin{aligned}
X(\Omega) &= \frac{1}{1 - a.cos(\Omega) + ia.sen(\Omega)} \\
&= \frac{1 - a.cos(\Omega)}{(1 - a.cos(\Omega))^2 + (a.sen(\Omega))^2} - i\frac{a.sen(\Omega)}{(1 - a.cos(\Omega))^2 + (a.sen(\Omega))^2}
\end{aligned}
$$

y calculemos el módulo y la fase en función de Ω:

$$
\begin{aligned}
|X(\Omega)| &= \frac{1}{\sqrt{(1 - a.cos(\Omega))^2 + (a.sen(\Omega))^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a.cos(\Omega)}} \\
arg\{X(\Omega)\} &= arctg\left(-\frac{a.sen(\Omega)}{1 - a.cos(\Omega)}\right)
\end{aligned}
$$

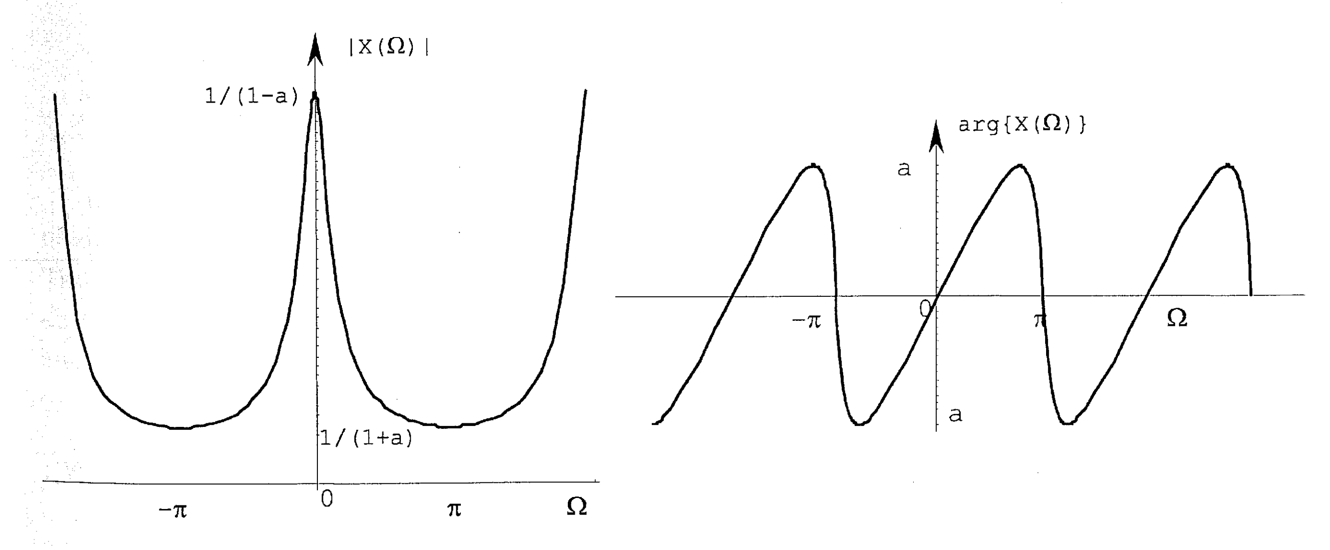


Figura 8.9: Espectro continuo y periódica de la señal temporal exponencial decreciente.

El espectro de esta señal está también concentrado en las bajas frecuencias. Note que si aumentamos el valor de a, la exponencial decreciente será más lenta y por lo tanto el ancho de su espectro será menor (quedará más concentrado en el centro $\Omega = 0$).

c) Esta función está relacionada con su extensión periódica analizada en el ejemplo 8.2.3. En ese ejemplo el período era $N_0 = 10$, y por lo tanto su serie poseía 10 coeficientes (periódicos). En este caso, al transformar una función aperiódica, el espectro será **continuo** *y notaremos que tiene la forma de la envolvente punteada oportunamente.*

Utilicemos la ecuación (8.12), donde acotaremos los límites de la sumatoria a un valor

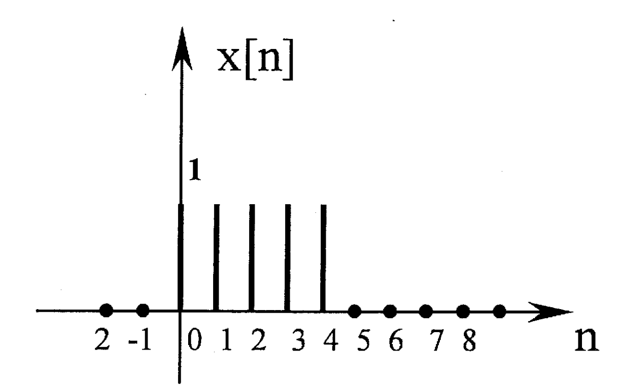


Figura 8.10: Señal cuadrada discreta aperiódica.

genérico N_1*, que en el caso particular del ejemplo será 4:*

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i\Omega n} = \sum_{n=0}^{N_1} 1.e^{-i\Omega n} =$$

utilizando la serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \forall q$$

con $q = e^{-i\Omega}$ *obtenemos*

$$\frac{1-e^{-i\Omega(N_1+1)}}{1-e^{-i\Omega}} = \frac{e^{-i\Omega(N_1+1)/2}}{e^{-i\Omega/2}} \frac{e^{i\Omega(N_1+1)/2} - e^{-i\Omega(N_1+1)/2}}{e^{i\Omega/2} - e^{-i\Omega/2}} =$$

$$X(\Omega) = e^{-i\Omega N_1/2} \frac{sen(\Omega(N_1+1)/2)}{sen(\Omega/2)}$$

Si del ejemplo 8.2.3, con $\Omega_0 = \pi/5$ *y* $N_0 = 10$*, calculamos en* C_k *en función del* N_1*:*

$$C_k = \frac{1}{10} e^{-ik(2\pi/5)} \frac{sen(k\pi/2)}{sen(k\pi/10)} = \frac{1}{N_0} e^{-ik(N_1/2)\Omega_0} \frac{sen(k\Omega_0 N_1/2)}{sen(k\Omega_0/2)}$$

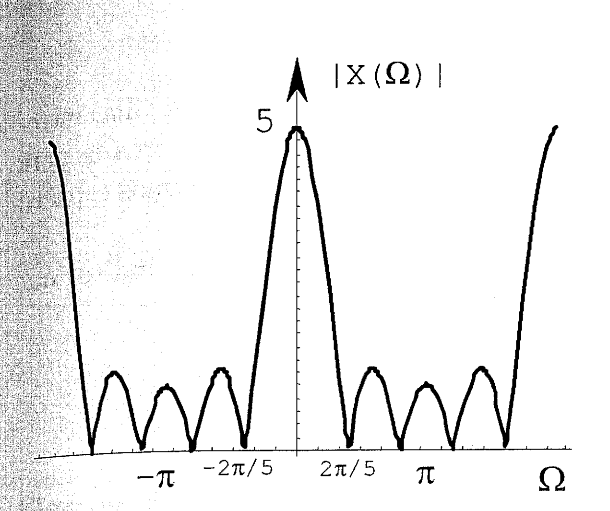
donde comprobamos (8.14)

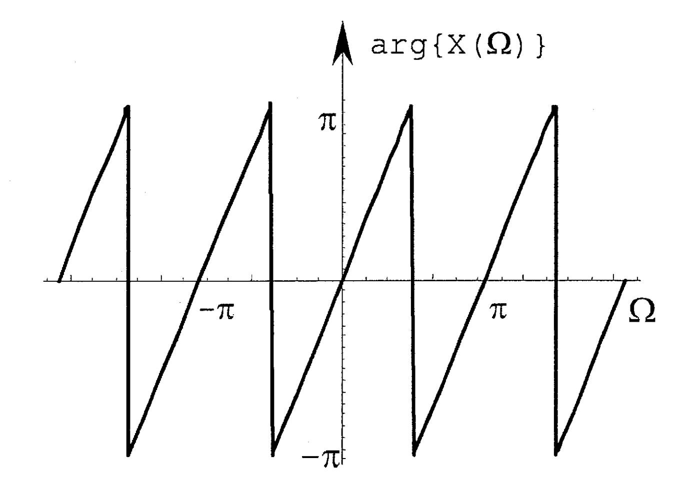
$$C_k N_0 = X(k\Omega_0)$$

Recordando que en el caso de la transformada de una función aperiódica, $X(k\Omega_0) \to \Omega$ *a medida que aumentamos el período* $N_0 \to \infty$ *y* $\Omega_0 \to 0$

Grafiquemos la transformada para el caso $N_1 = 4$*:*

$$X(\Omega) = e^{-i2\Omega} \frac{sen(5\Omega/2)}{sen(\Omega/2)}$$





La gráfica de fase se acotará entre 0 y π, pero debe recordarse que una fase de π coincide con una de $-\pi$.

Verifique que, si $x[n]$ es real, el espectro de módulo es siempre par y el de fase siempre impar.

8.3.1. Condiciones de existencia de la transformada

La Transformada de Fourier para señales discretas está planteada como una sumatoria donde la señal $x[n]$ multiplica a las exponenciales complejas $e^{-i\Omega n}$. Para que exista la Transformada, esta serie debe ser convergente. La identidad de Párseval reafirma la noción de energía finita tanto en el tiempo como en frecuencia. Esta condición se cumple si la energía de la señal $x[n]$ es finita, lo que significa que $x[n]$ es acotada en amplitud:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Si la energía de la señal es finita, entonces existe la Transformada de Fourier. Esta limitación no es muy restrictiva aunque veremos más adelante que existen algunas funciones con energía infinita de interés práctico. Por ejemplo, una exponencial creciente o una rampa no poseen transformada. Destaquemos además que algunas funciones particulares están en el límite de esta definición. Por ejemplo, esto sucede con el escalón $u[n]$ que tiene amplitud acotada pero energía infinita. A pesar de no cumplir con la condición de energía finita, calcularemos su transformada entendiendo que nos encontramos ante una situación muy particular que solo se resuelve utilizando propiedades.

Así como en el caso de variable continua, analizaremos el caso de la Transformada de Fourier para señales discretas periódicas. Estas señales poseen *potencia* finita y no energía finita. Su análisis se realizará en detalle más adelante en la sección 8.3.11, pág. 333.

8.3.2. Propiedades de la transformada

Para realizar los cálculos operativos de la transformada de manera más sencilla, introduciremos algunas propiedades fundamentales. El paralelismo entre la transformada para señales continuas y discretas es evidente en la mayoría de ellas, aunque prestaremos especial atención en algunos detalles que las diferencian.

En todas las propiedades utilizaremos la nomenclatura $x[n] \longrightarrow X(\Omega)$ para indicar que debemos introducir $x[n]$ en la sumatoria (8.12)para hallar su transformada

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\Omega n} \qquad \equiv \qquad x[n] \longrightarrow X(\Omega)$$

8.3.3. Linealidad

Esta propiedad ya fue utilizada en el ejemplo (8.3.1) parte a, y es una consecuencia directa de la posibilidad de distribuir la sumatoria de la definición.

Sean dos funciones discretas, de energía finita,$x_1[n]$ y $x_2[n]$, y dos constantes α y $beta$, entonces

$$\alpha.x_1[n] + \beta x_2[n] \longrightarrow \alpha.X_1(\Omega) + \beta.X_2(\Omega)$$

Probaremos la propiedad simplemente con:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha.x_1[n] + \beta x_2[n])\, e^{-i\Omega n} = \alpha \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]e^{-i\Omega n}}_{X_1(\Omega)} + \beta \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]e^{-i\Omega n}}_{X_2(\Omega)}$$

8.3.4. Desplazamiento en n

Esta propiedad es muy similar al caso continuo. El desplazamiento temporal provoca la aparición de una exponencial compleja en el plano transformado.

Sea

$$x[n] \longrightarrow X(\Omega)$$

si producimos un desplazamiento de n_0 muestras:

$$x[n - n_0] \longrightarrow e^{-i\Omega n_0} X(\Omega)$$

El desplazamiento temporal no produce un desplazamiento del espectro, simplemente altera el espectro de fase. Recuerde que $\left|e^{-i\Omega n_0} X(\Omega)\right| = |X(\Omega)|$.

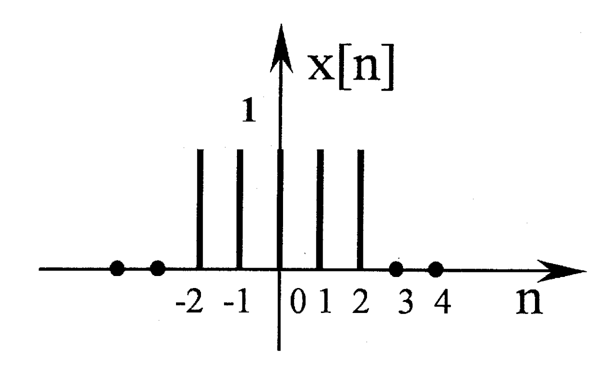


Figura 8.11: Señal cuadrada discreta aperiódica.

Ejemplo 8.3.2 *Calcule la transformada de $x[n] = u[n+2] - u[n-3]$ graficada en la figura 8.11.*

Esta función es la misma analizada en el ejemplo (8.3.1.c) pero desplazada hacia la izquierda 2 lugares. Aplicando la propiedad:

$$\begin{aligned} x[n] &\longrightarrow X(\Omega) \\ u[n] - u[n-5] &\longrightarrow e^{-i2\Omega}\frac{sen(5\Omega/2)}{sen(\Omega/2)} \\ x[n+2] &\longrightarrow e^{i2\Omega}X(\Omega) \\ u[n+2] - u[n-3] &\longrightarrow \frac{sen(5\Omega/2)}{sen(\Omega/2)} \end{aligned}$$

En este caso, como la función resultante temporal es par, entonces su transformada es real. Su espectro de módulo coincide con el graficado en el ejemplo, y el espectro de fase es cero para todo Ω.

8.3.5. Desplazamiento en frecuencia

Un efecto dual al hallado en la propiedad anterior es ver qué sucede si desplazamos el espectro de una señal. Enunciemos la propiedad

$$e^{i\Omega_0 n}x[n] \longrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

Como las funciones reales poseen un espectro par, al desplazar este espectro aparece una señal compleja en el campo temporal. Apliquemos esta propiedad en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8.3.3 *Calcule la transformada de $x[n] = a^n.u[n]$ con $0 > a > -1$.*

Este cálculo es muy similar al ejemplo (8.3.1b) pero en este caso a es negativa. Transcribimos el resultado para mayor comodidad:

$$a^n.u[n], 1 > a > 0 \longrightarrow \frac{1}{1 - a.e^{-i\Omega}}$$

Si a tiene un valor negativa, la exponencial decreciente se convierte en una señal alternada:

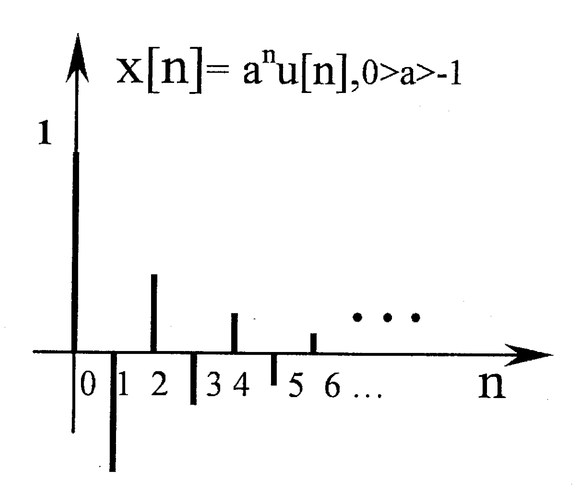


Figura 8.12: Exponencial decreciente alternada.

Esta nueva señal posee variaciones más bruscas en sus muestras temporales, y por lo tanto tendrá componentes de mayor módulo en alta frecuencia. Para calcular su transformada utilizando la propiedad de desplazamiento frecuencial, multipliquemos a la exponencial decreciente por una señal alternada $(-1)^n = e^{i\pi n}$. De esta manera las muestras pares querdarán intactas y las impares cambiarán de signo. Utilizando la propiedad:

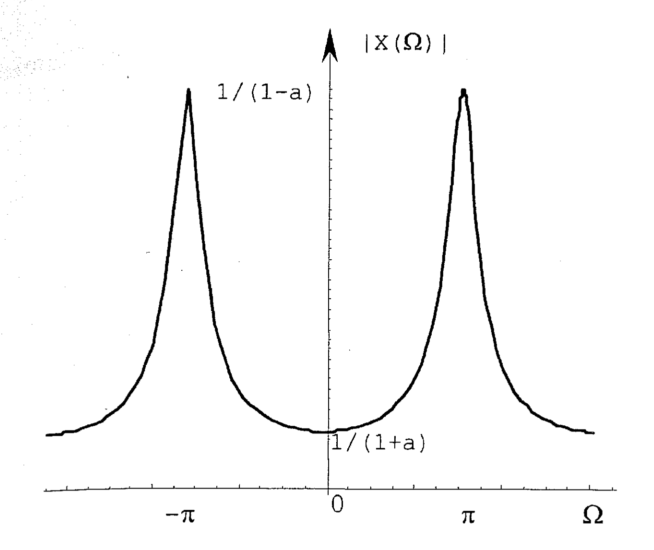
$$(-1)^n.a^n.u[n] = e^{-i\pi n}.a^n.u[n], 1 > a > 0 \longrightarrow \frac{1}{1 - a.e^{-i(\Omega+\pi)}} = \frac{1}{1 + a.e^{-i\Omega}}$$

El espectro de módulo y fase se observa en la figura 8.13. Vemos que el espectro se desplaza π. Este desplazamiento es muy significativo ya que todas los espectros de señales discretas son periódicos con período 2π, de manera que al desplazarlos π las componentes de alta frecuencia pasan a ser de baja frecuencia y viceversa.

Claramente se observa la concentración de la energía de la señal en la parte alta del espectro (zona cercana a π).

Escala, sub-muestreo y sobre-muestreo

El cambio de escala es un procedimiento bastante conflictivo al tratar señales discretas. Las muestras no están separadas por un tiempo en segundos determinado, sino simplemente son una secuencia de números. En la representación gráfica, entre dos muestras consecutivas



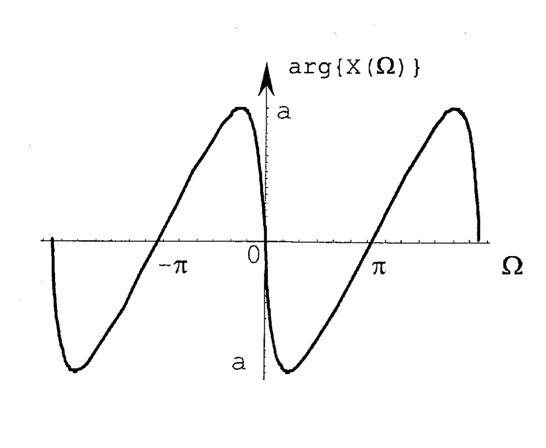


Figura 8.13: Espectro de la señal exponencial decreciente alternada.

no hay nada: no hay un valor de cero, simplemente no existen valores intermedios. Es por eso que acercar o alejar las muestras no produce ningún efecto sobre el espectro de la señal (es solo una modificación del gráfico). Para producir un cambio de escala tenemos la posibilidad de saltear muestras (sub-muestreo) o intercalar ceros entre muestras (sobre-muestreo).

Comencemos viendo el caso más sencillo, la transformada de $x[-n]$:

$$x[n] \longrightarrow X(\Omega)$$
$$x[-n] \longrightarrow X(-\Omega)$$

que hallamos simplemente planteando la transformada y colocando $x[-n]$ en (8.12):

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-i\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{i\Omega n} = X(-\Omega)$$

donde cambiamos n por $-n$ y recordamos que cambiar los límites de una sumatoria no altera en absoluto su suma total.

Veamos qué sucede ahora si tratamos de transformar $x[a.n]$ con a entero. Si escogemos $a > 1$ estamos simplemente salteando muestras, lo que no necesariamente acelera la señal. Esta posibilidad descarta muestras irrecuperables y no podemos hallar el nuevo espectro en función del anterior.

Para desacelerar la señal podemos intercalar ceros entre muestras. No podemos escoger un $0 < a < 1$ ya que debemos manejarnos siempre con números enteros. Para lograr el efecto deseado planteamos una nueva función $x_{(k)}[n]$ que intercala $k-1$ ceros entre muestras. Su definición en función de la señal original $x[n]$ es la siguiente:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{si } n \text{ es múltiplo de } k \\ 0 & \text{si } n \text{ no es múltiplo de } k \end{cases} \tag{8.15}$$

Esta expansión temporal provocará el efecto previsto, la compresión del espectro. Planteamos la propiedad:

$$x_{(k)} \longrightarrow X(k\Omega)$$

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Planteando la definición de la transformada:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]e^{-i\Omega n}$$

Realicemos el cambio de variables $n = m.k$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[mk]e^{-i\Omega m.k}$$

Utilizando la definición (8.15) , $x_{(k)}[mk] = x[m]$, por lo tanto:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-i(k\Omega)m} = X(k\Omega)$$

($\Longleftarrow$)

Dibujemos un ejemplo en la figura 8.14.

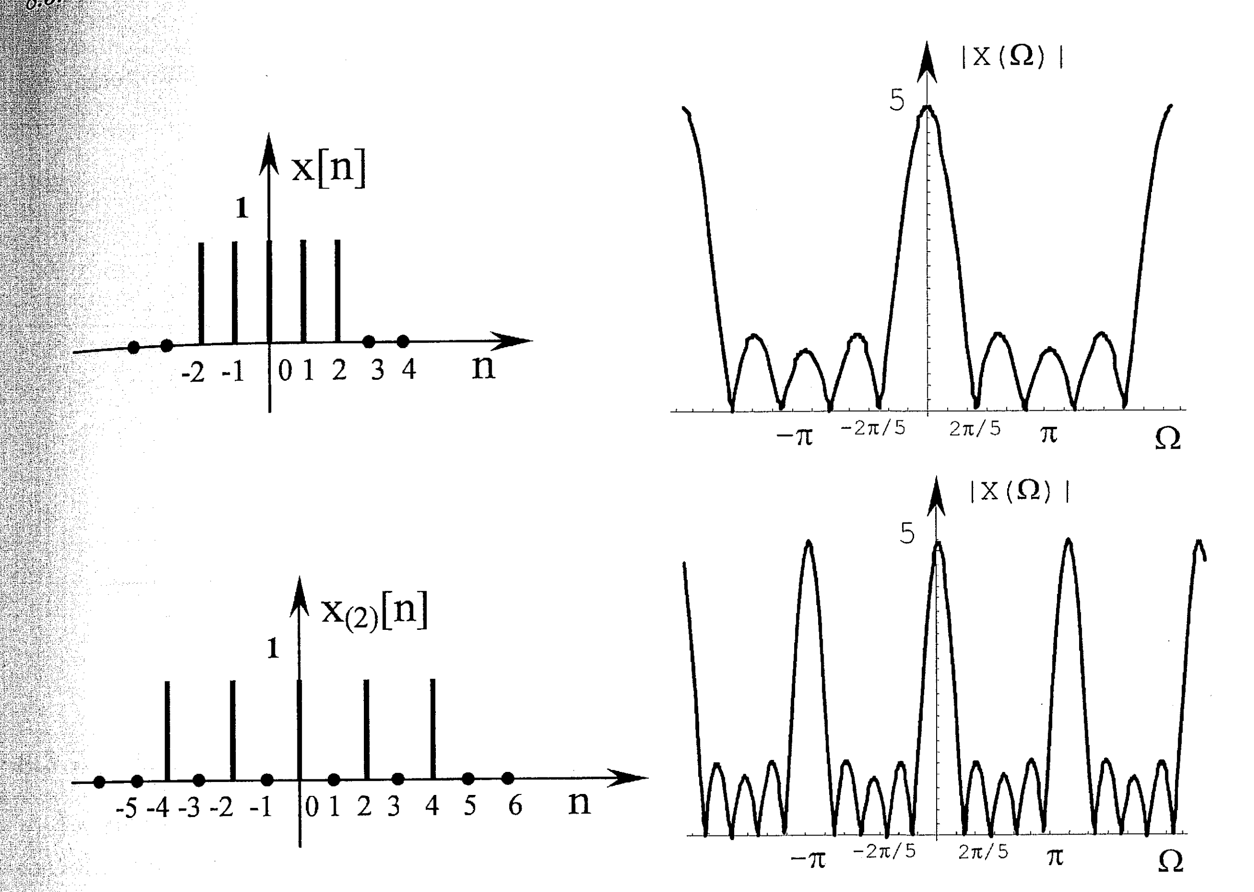


Figura 8.14: Efecto del sub-muestreo sobre el espectro.

8.3.6. Diferenciación en frecuencia

No se puede diferenciar (derivar) una señal discreta; solo podemos derivar el espectro, ya que es continuo:

$$n.x[n] \longrightarrow i\frac{\partial X(\Omega)}{\partial \Omega}$$

Demostración:

$(\Longrightarrow)$
Planteando la transformada (8.12):

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].e^{-i\Omega n}$$

derivando ambos miembros con respecto a Ω:

$$\frac{\partial X(\Omega)}{\partial \Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].(-in)e^{-i\Omega n}$$

como lo que queda dentro de la **sumatoria** es lo que se está transformando, entonces:

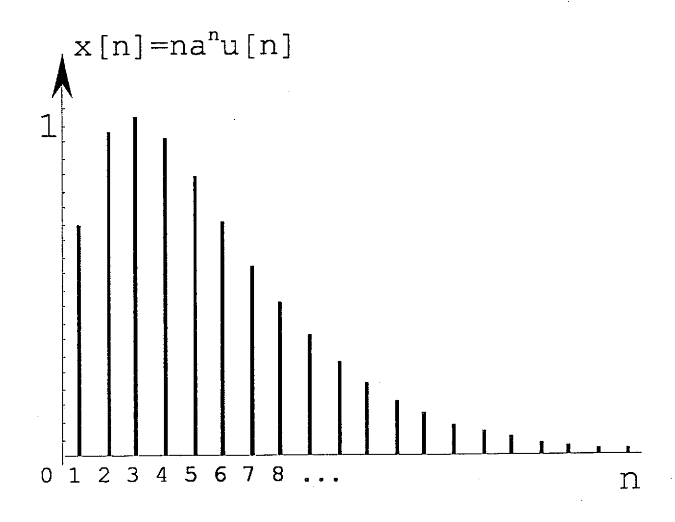
$$-inx[n] \longrightarrow \frac{\partial X(\Omega)}{\partial \Omega}$$
$$nx[n] \longrightarrow i\frac{\partial X(\Omega)}{\partial \Omega}$$

donde $1/-i = i$.

($\Longleftarrow$)

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 8.3.4 *Calcule la transformada de $n.a^n.u[n]$ con $0 < a < 1$.*



Utilizando la propiedad vista y el ejemplo (8.3.1c):

$$a^n.u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-a.e^{-i\Omega}}$$
$$n.a^n.u[n] \longrightarrow -\frac{a.i.e^{-i\Omega}}{(1-a.e^{-i\Omega})^2}$$

Observe el espectro resultante en la figure 8.15.

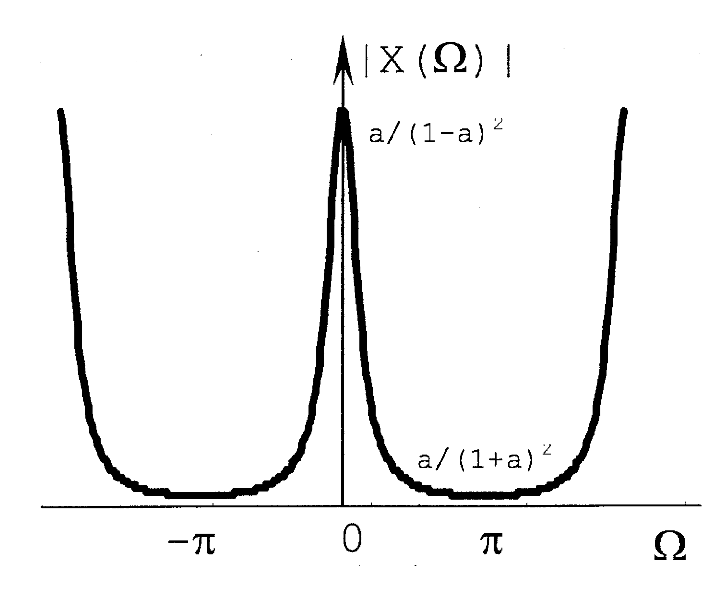


Figura 8.15: Espectro de $n.a^n.u[n]$ con $0 < a < 1$.

8.3.7. Convolución

La relación principal temporal en un sistema LTI, entre la entrada y la salida, es la convolución. Si $x[n]$ es la entrada, $h[n]$ la respuesta impulsional e $y[n]$ la salida:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

donde $*$ implica la convolución. Así como sucede en el campo continuo la convolución temporal implica un producto de los espectros. Planteamos la propiedad:

$$x_1[n] \longrightarrow X_1(\Omega) \qquad x_2[n] \longrightarrow X_2(\Omega)$$

$$\boxed{x_1[n] * x_2[n] \longrightarrow X_1(\Omega).X_2(\Omega)}$$

Demostración:

($\Longrightarrow$)
Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ dos señales discretas de energía finita, con transformadas $X_1(\Omega)$ y $X_2(\Omega)$ respectivamente. Utilizando la definición (8.12):

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_1[n] * x_2[n])e^{-i\Omega n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]e^{-i\Omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]e^{-i\Omega n}\end{aligned}$$

utilizando la propiedad de desplazamiento temporal en la segunda **sumatoria:**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]e^{-i\Omega k}X_2(\Omega) = X_2(\Omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]e^{-i\Omega k} = X_1(\Omega).X_2(\Omega)$$

$(\Longrightarrow)$

Así podemos diseñar el filtro deseado planteando la forma del espectro de módulo y el de fase. Antitransformando hallamos el $h[n]$. Para filtrar la entrada $x[n]$ podemos convolucionar el $h[n]$ directamente con $x[n]$ o calcular $X(\Omega)$, multiplicarlo por el $H(\Omega)$ para hallar $Y(\Omega)$ y antitransformar para encontrar $y[n]$.

$$y[n] = x[n] * h[n]$$
$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$$

$$\boxed{H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}}$$

La respuesta impulsional posee información acerca del comportamiento del sistema ante cualquier entrada. El $H(\Omega)$ es la denominada **respuesta en frecuencia del sistema** y tendrá un papel protagónico en el análisis de sistemas. Note que el espectro de salida tiene su módulo determinado por el módulo del espectro de entrada multiplicado por $|H(\Omega)|$ y la fase de salida como la suma entre la fase de entrada y $arg(H(\Omega))$.

Ejemplo 8.3.5 *Calcule la salida $y[n]$ de un sistema LTI con respuesta impulsional $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ cuando en la entrada se coloca $x[n] = u[n] - u[n-5]$.*

La respuesta en frecuencia de este sistema es la transformada de la respuesta impulsional: $h[n] \longrightarrow H(\Omega)$. Para hallarla utilicemos la transformada del delta en el origen:

$$\delta[n] \longrightarrow 1$$

la propiedad de desplazamiento

$$\delta[n-1] \longrightarrow 1.e^{-i\Omega}$$

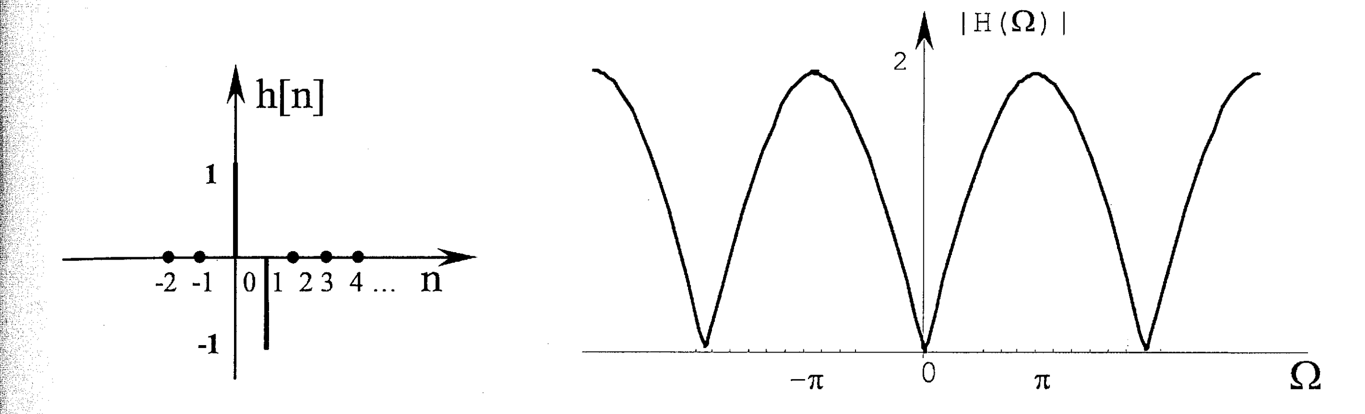
y la propiedad de linealidad:

$$\delta[n] - \delta[n-1] \longrightarrow 1 - e^{-i\Omega}$$

Separemos el $H(\Omega)$ en parte real e imaginaria y calculemos su módulo y su fase:

$$\begin{aligned}
H(\Omega) &= 1 - e^{-i\Omega} = 1 - cos(\Omega) + isen(\Omega) \\
|H(\Omega)| &= \sqrt{(1 - cos(\Omega))^2 + (sen(\Omega))^2} \\
&= \sqrt{1 + cos^2(\Omega) - 2cos(\Omega) + sen^2(\Omega)} \\
|H(\Omega)| &= \sqrt{2 - 2cos(\Omega)} = \sqrt{4sen^2(\Omega/2)} = 2.sen(\Omega/2) \\
arg\{H(\Omega)\} &= arctan\left(\frac{sen(\Omega)}{1 - cos(\Omega)}\right)
\end{aligned}$$

Dibujemos simplemente el espectro de módulos:



Esta respuesta debe ser multiplicada por el espectro de la señal de entrada $X(\Omega)$ para obtener el espectro de la señal de salida (esto implica multiplicar los módulos y sumar las fases):

$$Y(\Omega) = \underbrace{|X(\Omega)||H(\Omega)|}_{|Y(\Omega)|}\, e^{i\overbrace{(arg\{X(\Omega)\} + arg\{H(\Omega)\})}^{arg\{Y(\Omega)\}}}$$

Claramente esta respuesta atenúa las bajas frecuencias mientras que amplifica las altas: este es un filtro pasa-altos.

Si se analiza el efecto que produce el $h[n]$ al convolucionarlo con la entrada, este toma la entrada actual y le resta la muestra anterior; esto produce un efecto de derivación que está asociado a cancelar muestras contiguas de amplitud similar (baja frecuencia), mientras que acentúa a la muestras consecutivas con grandes diferencias.

Para hallar la salida debemos hallar la transformada de $x[n]$. Utilicemos el resultado del ejemplo (8.3.1c):

$$X(\Omega) = e^{-i2\Omega}\frac{sen(\Omega 5/2)}{sen(\Omega/2)}$$

reacomodando el $H(\Omega)$*:*

$$H(\Omega) = 1 - e^{-i\Omega} = e^{-i\Omega/2}\left(e^{i\Omega/2} - e^{-i\Omega/2}\right) = 2i.e^{-i\Omega/2}sen(\Omega/2)$$

al multiplicar $X(\Omega)$ *por* $H(\Omega)$ *obtenemos:*

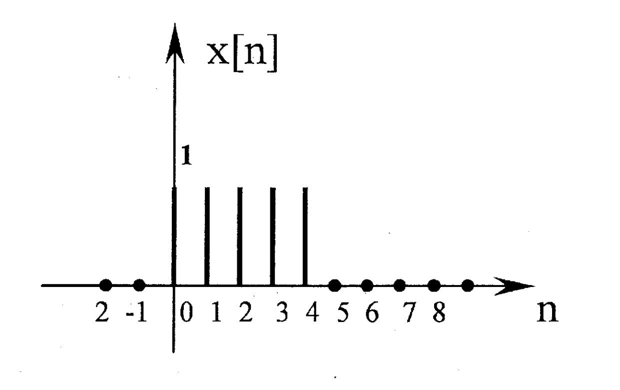
$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = 2i.e^{-i\Omega/2}sen(\Omega/2)e^{-i2\Omega}\frac{sen(\Omega 5/2)}{sen(\Omega/2)} = 2i.e^{-i5\Omega/2}sen(5\Omega/2)$$

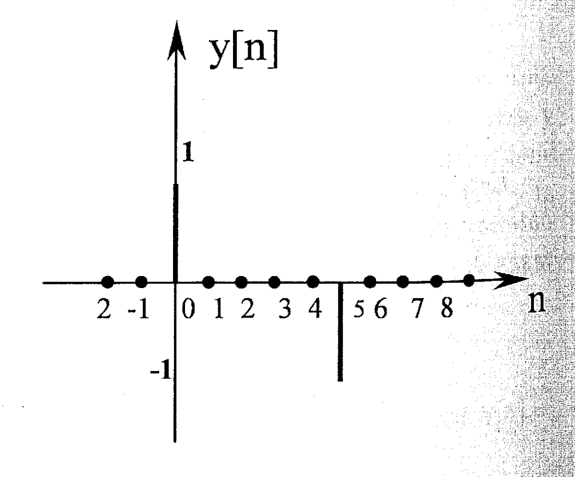
donde finalmente:

$$Y(\Omega) = 2i.e^{-i5\Omega/2}\frac{e^{i5\Omega/2} - e^{-i5\Omega/2}}{2i} = 1 - e^{-i5\Omega}$$

cuya antitransformada, por simple inspección es:

$$y[n] = \delta[n] - \delta[n-5]$$





Este resultado es muy sencillo de obtener si a cada muestra de $x[n]$ *le restamos su muestra anterior, como lo indica la convolución con el* $h[n]$ *planteado.*

8.3.8. Modulación

La propiedad de modulación es, de alguna manera, análoga a la vista en tiempo continuo. Es de especial interés ya que revela características interesantes de la Transformada de Fourier para señales discretas. Utilizaremos estas características en próximos temas y especialmente en el *Teorema de Muestreo.*

Utilicemos dos funciones $x_1[n]$ y $x_2[n]$, con sus respectivas transformada $X_1(\Omega)$ y $X_2(\Omega)$.

Transformemos el producto temporal de ambas utilizando (8.12):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n].x_2[n].e^{-i\Omega n}$$

reemplazando $x_2[n]$ como la antitransformada de $X_2(\lambda)$ (utilizamos λ en vez de Ω para no mezclar las variables):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n].\left(\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_2(\lambda)e^{i\lambda n}d\lambda\right).e^{-i\Omega n}$$

intercambiando el orden de la sumatoria y utilizando la propiedad de desplazamiento frecuencial:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_2(\lambda)\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n].e^{-i(\Omega-\lambda)n}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_2(\lambda)X_1(\Omega-\lambda)$$

por lo tanto

$$x_1[n].x_2[n] \longrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\Omega)\otimes X_2(\Omega)$$

donde el asterisco "⊗ïmplica la convolución periódica o circular (ya que el espectro de una señal discreta es periódico).

Apliquemos la propiedad en un ejemplo:

Ejemplo 8.3.6 *Aplique la propiedad de modulación para rehacer el ejemplo (8.3.3).*

En el ejemplo mencionado se pedía calcular la transformada de $a^n.u[n], 0 > a > -1$. *Vimos que esta señal es una versión alternada de la exponencial decreciente* $a^n.u[n], 1 > a > 0$. *Esto sucede ya que al ser a negativo las muestras pares son positivas y las impares negativas. Este efecto se logra multiplicando a la exponencial decreciente por la señal* $x_2[n] = (-1)^n$.

Veamos la transformada de la exponencial decreciente:

$$a^n.u[n], 1 > a > 0 \longrightarrow \frac{1}{1-a.e^{-i\Omega}}$$

Como sabemos la transformada del delta es uno:

$$\delta[n] \longrightarrow 1$$

y al calcular la antitransformada de un delta: $\delta(\Omega)$ *(un peine en realidad:* $\sum_k \delta(\Omega - k2\pi)$*), obtenemos:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \delta(\Omega)e^{i\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}$$

por lo tanto:

$$1 \longrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$

NOTA *:Recordemos que en realidad el delta en frecuencia debe ser periódico (con período 2π), es por eso que calculamos la integral sobre cualquier período de ancho 2π.*

Calculemos, ahora sí, la transformada de $x_2[n] = (-1)^n = e^{in\pi}$. Utilizando la propiedad de desplazamiento frecuencial

$$e^{i\Omega_0 n} \longrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

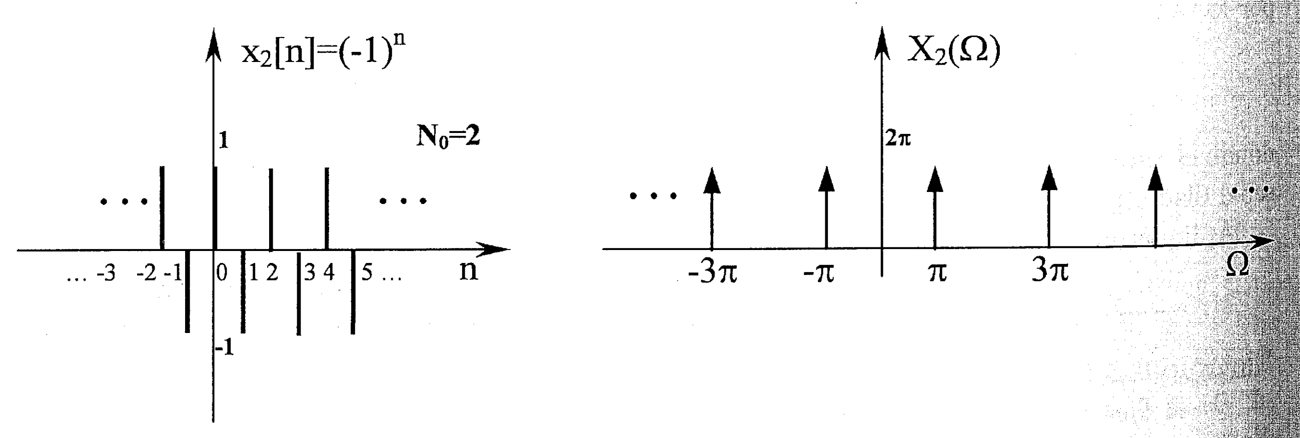
con $\Omega_0 = \pi$ y la transformada $1 \longrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$

$$1.e^{i\pi n} \longrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \pi)$$

como debe ser periódica con período 2π, finalmente:

$$e^{i\pi n} \longrightarrow 2\pi\sum_k \delta(\Omega - \pi + 2k\pi) = 2\pi\sum_k \delta(\Omega - (2k+1)\pi)$$

Veamos qué sucede gráficamente:



Cuando realizamos el producto entre $x_1[n] = a^n.u[n], 1 > a > 0$ y $x_2[n] = (-1)^n$, debemos realizar la convolución de sus espectros. Como la transformada de $x_2[n]$ son deltas centrados en $\pm\pi$, y la convolución con un delta centra la función en ese lugar, el efecto producido es el corrimiento del espectro en π. Esto provoca que las bajas frecuencias se desplacen hacia las altas y viceversa. Este fue exactamente el mismo efecto descripto en el ejemplo (8.3.3).

8.3.9. Propiedad de acumulación

La acumulación o sumatoria es el equivalente discreto a la integración temporal. La propiedad impone :

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longrightarrow \frac{1}{1-e^{-i\Omega}}X(\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega) \qquad |\Omega| < \pi$$

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Para demostrar esta propiedad es conveniente comenzar encontrando la transformada del escalón discreto:

$$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

donde la incógnita será:

$$x[n] = u[n] \longrightarrow X(\Omega) = ?$$

Plantemos para esto

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

y transformando en ambos miembros, con $\delta[n] \longrightarrow 1$ y la propiedad de desplazamiento temporal

$$1 = (1 - e^{-i\Omega})X(\Omega)$$

por lo tanto

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-i\Omega}} + \alpha\delta(\Omega) \qquad |\Omega| < \pi$$

donde se incluyó un delta en $\Omega = 0$ para salvar la discontinuidad. Para encontrar el valor de la constante α, descompongamos al escalón (como a cualquier función) en su parte par y su parte impar:

$$u[n] = u_{par}[n] + u_{impar}[n]$$

donde

$$u_{par}[n] = \frac{1}{2}\left(u[n] - u[-n]\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta[n]$$

y despejando la parte impar

$$u_{impar}[n] = u[n] - u_{par}[n] = u[n] - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta[n]$$

transformando ambos miembros, con $\delta[n] \longrightarrow 1$ y $1 \longrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$:

$$u_{impar}[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - e^{-i\Omega}} + \alpha\delta(\Omega) - \pi\delta(\Omega) - \frac{1}{2}$$

como la transformada de una función impar debe ser imaginaria pura, entonces $\alpha = \pi$, y

$$\frac{1}{1 - e^{-i\Omega}} = \frac{1}{1 - cos\Omega - i.sen\Omega} = \frac{1 - cos\Omega}{2 - 2\cos\Omega} + i\frac{sen\Omega}{2 - 2\cos\Omega} = \frac{1}{2} + i\frac{sen\Omega}{2 - 2\cos\Omega}$$

concluimos entonces:

$$u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-e^{-i\Omega}} + \pi\delta(\Omega) \qquad |\Omega| < \pi$$

Con esta transformada podemos ahora hallar la demostración de la propiedad de acumulación. Veamos que al convolucionar cualquier función $x[n]$ con un escalón, obtenemos utilizando la definición de convolución:

$$x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

ya que $u[n-k] = 0$ para $k > n$. Utilizando la propiedad de convolución $x_1[n] * x_2[n] \longrightarrow X_1(\Omega)X_2(\Omega)$, con $x_1[n] = x[n]$ y $x_2[n] = u[n]$:

$$x[n] * u[n] \longrightarrow X(\Omega)\left(\frac{1}{1-e^{-i\Omega}} + \pi\delta(\Omega)\right)$$

entonces, con $\delta(\Omega)X(\Omega) = \delta(\Omega)X(0)$:

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = \frac{1}{1-e^{-i\Omega}}X(\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega)$$

$(\Longrightarrow)$

8.3.10. Relación de Párseval

Una de las condiciones satisfactorias que poseen las transformadas vistas hasta el momento es la conservación de la energía. Vimos como los coeficientes de la serie poseen la potencia de la secuencia periódica que representan. Esto efectivamente sucede en la transformada de Fourier para señales discretas, y se lo suele denominar *Identidad de Párseval*:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

donde sobre el lado derecho aparece una integral ya que el espectro, ahora de una señal aperiódica, es continuo.

Demostración:

$(\Longrightarrow)$
Tomemos dos funciones aperiódicas $x_1[n]$ y $x_2[n]$, con transformadas de Fourier $X_1(\Omega)$ y $X_2(\Omega)$ respectivamente. Si creamos una función $x[n] = x_1[n].x_2[n]$ y utilizamos la propiedad de modulación:

$$x[n] = x_1[n].x_2[n] \longrightarrow X(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega)$$

Si ahora $x_2[n] = x_1^*[n]$ (conjugado), entonces

$$\begin{aligned} X_2(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] e^{-i\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1^*[n] e^{-i\Omega n} \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] e^{i\Omega n} \right)^* = X_1^*(-\Omega) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$x_1[n].x_1^*[n] \longrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) \otimes X_1^*(-\Omega)$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1[n]|^2 e^{-i\Omega n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\lambda) X_1^*(-(\Omega - \lambda)) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\lambda) X_1^*(-\Omega + \lambda) d\lambda \end{aligned}$$

si ahora igualamos $\Omega = 0$ en ambos miembros

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\lambda) X_1^*(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X_1(\lambda)|^2 d\lambda$$

$(\Longleftarrow)$

8.3.11. La Transformada de Fourier para secuencias periódicas

En forma análoga al caso continuo, notamos que la transformada de Fourier produce una función continua *envolvente* que contiene a los coeficientes C_k de la extensión periódica de la función transformada. Esto queda confirmado si recordamos, de la demostración de la transformada (4.3), que

$$C_k = \frac{X(k\Omega_0)}{N_0}$$

Esta igualdad permite calcular los coeficientes C_k de una función periódica con solo tener la transformada de una función aperiódica compuesta por un solo período de la misma.

Para calcular analíticamente la transformada de Fourier de una función periódica $x[n]$ con $\Omega_0 = 2\pi/N_0$, planteamos su desarrollo en serie:

$$x[n] = \sum_{k=<N_0>} C_k . e^{ik\Omega_0 n} \tag{8.16}$$

y utilizando $1 \longrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$ y la propiedad de desplazamiento frecuencial:

$$e^{ik\Omega_0 n} \longrightarrow 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

donde debemos recordar que estos deltas, como siempre en el espectro de cualquier señal periódica, deben ser periódicos con período 2π; por lo tanto en realidad son un peine de deltas situados en $\Omega_0, \Omega_0 \pm 2\pi, \Omega_0 \pm 4\pi \ldots$.

Si ahora transformamos ambos miembros de la expresión (8.16), obtenemos, **solo para** $\pi > \Omega > -\pi$

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=<N_0>} C_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

Para el resto del eje Ω simplemente hay que replicar la expresión para hacerla periódica

Podemos además dejar la expresión en función de muestras de la envolvente $(X(k\Omega_0))$ utilizando (4.3):

$$C_k = \frac{X(k\Omega_0)}{N_0}$$

y

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=<N_0>} \frac{X(k\Omega_0)}{N_0} \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

donde reconocemos $\Omega_0 = 2\pi/N_0$. Concluimos entonces con la expresión para calcular la transformada de Fourier de una señal discreta periódica utilizando la envolvente y multiplicándola por un peine de deltas de distancia Ω_0:

$$\boxed{X(\Omega) = \Omega_0 \sum_{k=<N_0>} X(k\Omega_0)\delta(\Omega - k\Omega_0)}$$

Ejemplo 8.3.7 *Calcular la transformada de Fourier de la señal periódica, de período $N_0 = 4$, graficada en la figura 8.16.*

Calculemos la transformada de los dos métodos posibles. Primero calculemos los coeficientes C_k de la Serie de Fourier y armemos el espectro como:

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=<N_0>} C_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

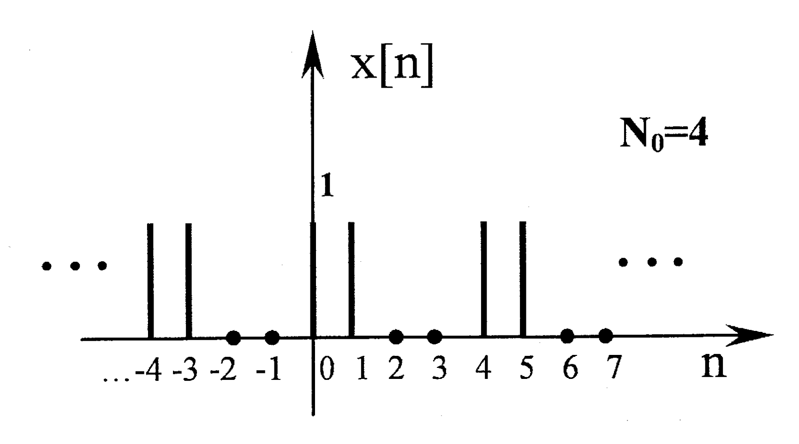


Figura 8.16: Señal periódica de $N_) = 4$

Por otro lado calculemos la transformada de Fourier de la señal aperiódica (tomando un período y descartando el resto), y confeccionemos

$$X(\Omega) = \Omega_0 \sum_{k=<N_0>} X(k\Omega_0)\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

para confirmar el resultado.

Para calcular los coeficientes de la serie utilicemos (8.8) con $\Omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$:

$$C_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x[n]e^{-ik\Omega_0 n} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-ik(\pi/2)n}$$

Como la señal tiene un período de $N_0 = 4$, *solo habrá 4 coeficientes, por lo tanto:*

$$C_0 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n] = \frac{1}{4}(1+1+0+0) = \frac{1}{2}$$

(Recuerde que el C_0 *es el valor medio o promedio)*

$$C_1 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-i,1.(\pi/2)n} = \frac{1}{4}\left(1 + \underbrace{e^{-i(\pi/2)}}_{-i}\right) = \frac{1-i}{4}$$

$$C_2 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-i,2.(\pi/2)n} = \frac{1}{4}\left(1 + \underbrace{e^{-i\pi}}_{-1}\right) = 0$$

finalmente

$$C_3 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-i,3.(\pi/2)n} = \frac{1}{4}\left(1 + \underbrace{e^{-i3\pi/2}}_{i}\right) = \frac{1+i}{4}$$

Entonces la transformada queda, para $2\pi > \Omega > 0$:

$$
\begin{aligned}
X(\Omega) &= 2\pi \sum_{k=0}^{3} C_k \delta(\Omega - k\pi/2) \\
&= 2\pi C_0 \delta(\Omega) + 2\pi C_1 \delta(\Omega - \pi/2) + 2\pi C_2 \delta(\Omega - \pi) + 2\pi C_3 \delta(\Omega - 3\pi/2) \\
X(\Omega) &= \pi\delta(\Omega) + \pi \frac{1-i}{2} \delta(\Omega - \pi/2) + \pi \frac{1+i}{2} \delta(\Omega - 3\pi/2)
\end{aligned}
$$

Espectro que hay que replicar para que sea periódico con período 2π.

Por otro lado podemos calcular la transformada de $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ como

$$X(\Omega) = 1 + e^{-i\Omega} = 1 + cos(\Omega) - i.sen(\Omega)$$

que en módulo y fase, como vimos, es

$$
\begin{aligned}
|X(\Omega)| &= 2.cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) \\
arg\{X(\Omega)\} &= arctg\left(\frac{-sen\Omega}{1 + cos\Omega}\right)
\end{aligned}
$$

calculemos los valores de la envolvente para $k\Omega_0 = k\pi/2$:

$$
\begin{aligned}
X(0) = 1 + cos(0) - i.sen(0) = 2 \\
X(\pi/2) = 1 + cos(\pi/2) - i.sen(\pi/2) = 1 - i \\
X(\pi) = 1 + cos(\pi) - i.sen(\pi) = 0 \\
X(3\pi/2) = 1 + cos(3\pi/2) - i.sen(3\pi/2) = 1 + i
\end{aligned}
$$

finalmente con $\Omega_0 = \pi/2$

$$
\begin{aligned}
X(\Omega) &= \Omega_0 \sum_{k=<N_0>} X(k\Omega_0)\delta(\Omega - k\Omega_0) = \pi/2 \sum_{k=0}^{3} X(k\pi/2)\delta(\Omega - k\pi/2) = \\
&= \pi\delta(\Omega) + \pi \frac{1-i}{2} \delta(\Omega - \pi/2) + \pi \frac{1+i}{2} \delta(\Omega - 3\pi/2)
\end{aligned}
$$

confirmamos el resultado. Grafiquemos los espectros en la figura 8.17



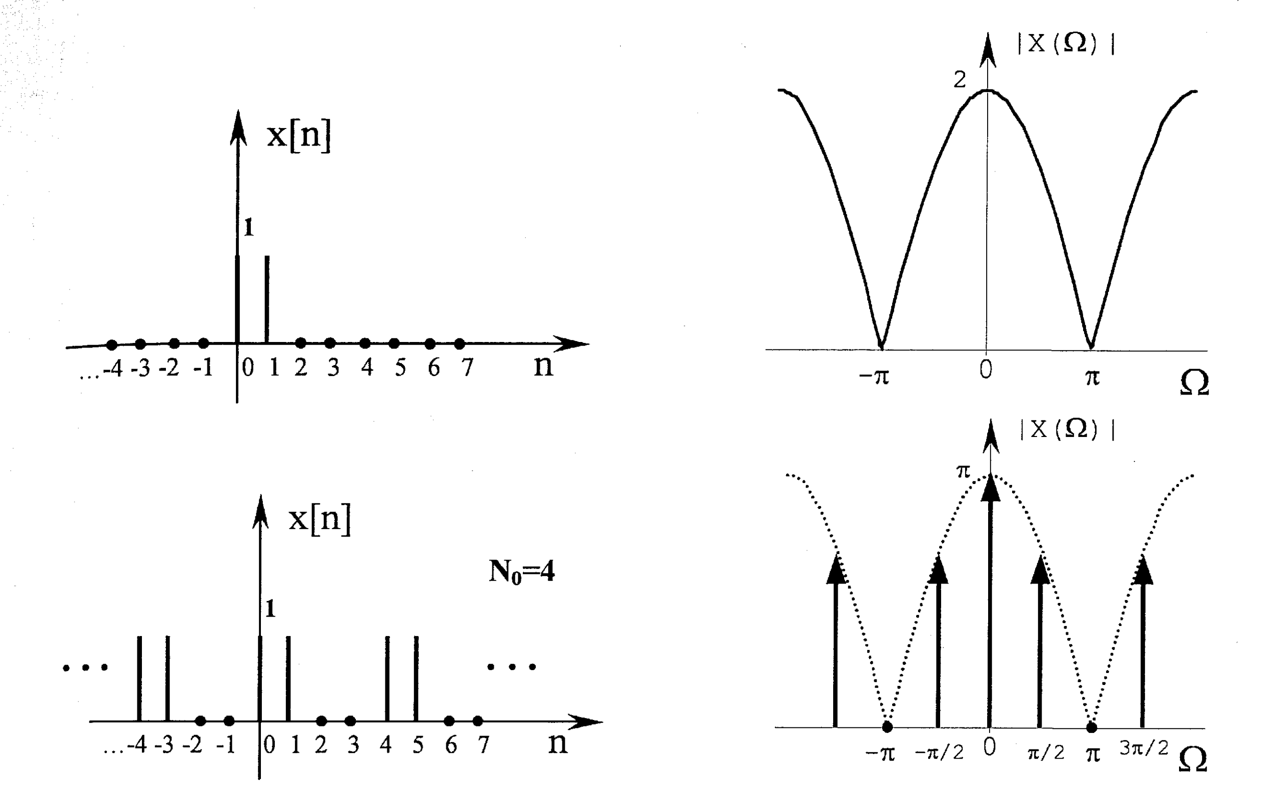


Figura 8.17: Espectros de señales periódicas y aperiódicas.

8.4. Aplicaciones a sistemas LTI

Apliquemos la transformada vista para resolver y analizar sistemas LTI. Estos sistemas son muy utilizados y sobre todo los confeccionados con ecuaciones en diferencias.

8.4.1. Respuesta en frecuencia de un sistema LTI discreto

En los sistemas lineales invariantes en el tiempo, la salida $y[n]$ se puede calcular convolucionando la entrada $x[n]$ con la respuesta impulsional $h[n]$. La respuesta impulsional $h[n]$ es la salida del sistema al colocar un delta $\delta[n]$ en la entrada:

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

Como sabemos el $h[n]$ nos ofrece mucha información intrínseca acerca del sistema. Utilicemos la propiedad de convolución de la transformada de Fourier para señales discretas y

escribamos

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \underbrace{|X(\Omega)||H(\Omega)|}_{|Y(\Omega)|}\, e^{i\left(\overbrace{arg\{X(\Omega)\} + arg\{H(\Omega)\}}^{arg\{Y(\Omega)\}}\right)}$$

entonces

$$\boxed{H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}}$$

Donde el $H(\Omega)$ es la respuesta en frecuencia del sistema discreto.

El espectro de la señal de salida se halla multiplicando el espectro de la señal de entrada por la respuesta en frecuencia del sistema. De esta forma podemos diseñar el $H(\Omega)$ para poder atenuar o amplificar determinadas bandas de frecuencia. Debemos recordar que el $H(\Omega)$ es la transformada del $h[n]$, y por lo tanto su espectro es periódico, de período 2π. Los valores de Ω cercanos a $0, \pm 2\pi, \ldots$ son de baja frecuencia, y los cercanos a $\pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ son de alta frecuencia. Toda señal discreta normalizada posee un espectro periódico con periodo 2π.

Para hallar la salida debemos antitransformar el $Y(\Omega)$. La operación temporal de convolución puede parecer más efectiva, ya que solo debemos antitransformar el $H(\Omega)$ para obtener el $h[n]$, y convolucionarlo con la entrada. Para realizar esta operación en tiempo real es necesario que al ingresar una muestra, el sistema tenga almacenado todas la muestras anteriores necesarias para calcular el producto entre el $h[n]$ (espejado y desplazado) con la señal de entrada almacenada. Es así como si el $h[n]$ posee 256 muestras, debemos almacenar las últimas 256 muestras de entrada para multiplicarlos con los 256 coeficientes del $h[n]$.

El desarrollo de algoritmos de optimización del cálculo de la transformada de Fourier, sumado a la velocidad de las computadoras actuales, permiten que la realización de la transformada de la entrada, el producto con la respuesta en frecuencia y la antitransformada del resultado, sean calculadas (para filtros con $h[n]$ largos) más rápidamente que la convolución temporal. El algoritmo por excelencia utilizado para calcular la DFT en forma optimizada es conocido como FFT (transformada rápida de Fourier). La FFT permite hallar, sin ningún error o diferencia de resultados con la DFT, la transformada de Fourier de una señal discreta. El tiempo computacional de la FFT es mucho menor al de la DFT. Consulte el apéndice C a partir de la pág. 541 para una descripción completa del algoritmo.

8.4.2. Sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias

Así como en el caso continuo podíamos aplicar la transformada a la resolución de ecuaciones diferenciales, en tiempo discreto podemos aplicar la transformada para resolver sistemas de ecuaciones en diferencias. Tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto la transformada se enfrenta al problema de las condiciones iniciales. La transformada de Fourier solo evalúa la *respuesta en régimen permanente* de los sistemas.

Un sistema LTI discreto genérico, con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$, tendrá la siguiente ecuación en diferencias:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k.y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k.x[n-k]$$

al aplicar la transformada en ambos miembros, utilizando la propiedad de linealidad y la de desplazamiento temporal, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{N} a_k.e^{-ik\Omega}Y(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k.e^{-ik\Omega}X(\Omega)$$

de donde podemos despejar la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ del sistema:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k.e^{-ik\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k.e^{-ik\Omega}}$$

Vemos que la respuesta no es más que un cociente de polinomios, al cual se le puede realizar la expansión en fracciones parciales para antitransformar cada fracción por separado.

Veamos un ejemplo simple para afianzar el método a utilizar:

Ejemplo 8.4.1 *Calcule la respuesta en frecuencia de un sistema LTI de entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ descrito por la siguiente ecuación en diferencias:*

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$

Antes de calcular la respuesta en frecuencia es conveniente analizar cual es el comportamiento del sistema. Observando la ecuación notamos que la salida, en un determinado instante, es el promedio entre la entrada actual y la anterior. Al promediar dos muestras estamos realizando un **alisado** *de la señal de entrada. Este es el efecto de un filtro pasa-bajos y por lo tanto debemos observar una respuesta en frecuencia que atenúe las regiones cercanas a π (alta frecuencia), y responda en forma plana en las zonas cercanas a* 0.

Apliquemos la transformada en ambos miembros y despejemos el $H(\Omega)$:

$$Y(\Omega) = \frac{X(\Omega) + e^{-i\Omega}X(\Omega)}{2}$$

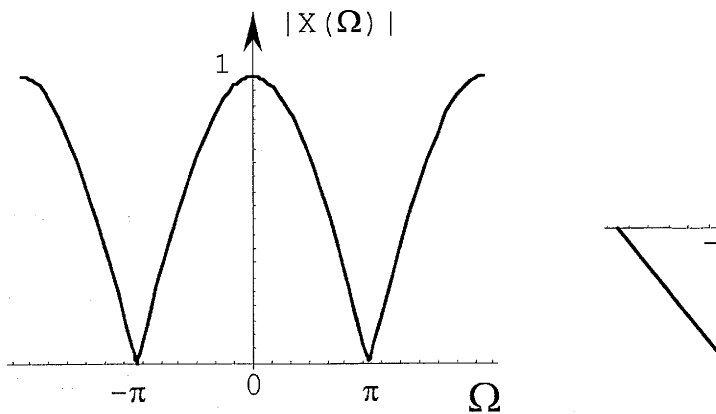
$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1 + e^{-i\Omega}}{2}$$

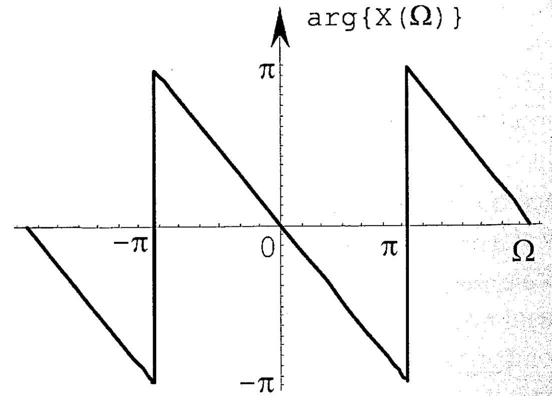
En este caso tan sencillo era simple también hallar el $h[n]$ por simple inspección, ya que colocando $x[n] = \delta[n]$ podemos escribir:

$$h[n] = \frac{\delta[n] + \delta[n-1]}{2}$$

El $H(\Omega)$ ya fue analizado como señal en ejemplo anteriores (8.3.1) con solo una constante de diferencia y por lo tanto reescribimos su módulo y fase, junto con las gráficas de módulo y fase:

$$\begin{aligned} |X(\Omega)| &= cos(\Omega/2) \\ arg\{X(\Omega)\} &= arctg\left(-\frac{sen(\Omega)}{1+cos(\Omega)}\right) \end{aligned}$$





Vemos claramente en el espectro de módulo el efecto de filtrado. Esta respuesta no es exactamente la deseada pero sirve al propósito del ejemplo. Encontraremos en próximos capítulos, métodos de diseño de filtros más sofisticados.

8.5. La Transformada de Fourier Discreta: DFT

Como ya mencionamos, las grandes ventajas operativas que presenta la transformada de Fourier para en el análisis y síntesis de sistemas, se vería opacada sin un algoritmo de implementación que nos permita calcularla fácil y rápidamente. La mención de la palabra *algoritmo* no es arbitraria ya que, como es de suponer, implementaremos la transformada en una computadora.

Para comenzar pensemos que deseamos calcular el espectro de una secuencia $x[n]$. Esta secuencia deberá ser aperiódica ya que debe estar almacenada en algún lugar físico (de capacidad finita). Por el momento supongamos que tenemos a la señal almacenada en un *array de datos* (listado o *array* de datos). Si deseamos realizar la transformada de una señal

aperiódica, su espectro será **continuo** y por lo tanto irreproducible en una computadora. Es por eso que plantearemos la DFT, siglas que no traduciremos para no confundirla con la transformada de Fourier para señales discretas. La DFT nos permitirá hacer los cálculos necesarios sobre el *array* $x[n]$ para poder calcular su transformada.

La definición de la DFT es:

Definición 8.5.1 *Sea $x[n]$ una señal discreta de duración finita, con $x[n] = 0$ para $N_0 \leq n \leq 0$*

$$DFT\{x[n]\} = X[k] = \sum_{n=<N_0>} x[n]e^{-ik\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \tag{8.17}$$

donde N_0 es el largo del array y N son la cantidad de puntos del espectro a calcular. Generalmente se adopta $N = N_0$.

La antitransformada o IDFT es:

$$IDFT\{X[k]\} = x[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} X[k]e^{ik\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \tag{8.18}$$

La nomenclatura para la transformada es:

$$x[n] \longrightarrow X[k]$$

Hay relaciones muy estrechas de la DFT tanto con la serie como con la transformada de Fourier para señales discretas.

Si analizamos la relación con la serie de Fourier la conclusión es inmediata. Al realizar una DFT de una señal aperiódica, estamos suponiendo que lo que poseemos (hipotéticamente) es **un período** de una señal periódica. De esta manera, al comparar la ecuación (8.17) con la del cálculo de los coeficientes C_k de la serie (8.8), notamos que solo difieren en la constante N_0:

$$X[k] = N_0.C_k$$

Si ahora comparamos la ecuación de cálculo de la DFT con la de la transformada (8.12), notamos que la DFT es simplemente un "muestreo uniforme cada $k2\pi/N$"del espectro obtenido $X(\Omega)$:

$$X[k] = X\left(\Omega = \frac{2k\pi}{N}\right)$$

Note que este muestreo se realiza en N lugares (y no en N_0 lugares), de esta forma de una señal de $N_0 = 256$ muestras se puede obtener un espectro de $N = 16$ muestras o de $N = 512$ muestras. Recuerde que en el caso de la serie, con $N_0 = 256$ muestras de período, obtenemos 256 coeficientes C_k; por lo tanto si se precisa un $N > N_0$ se debe completar con ceros el final de la señal para que $N = N_0$ [3].

La DFT presenta varias características muy importantes y convenientes:

[3] Esto se denomina "zero padding "(agregado de ceros).

1. Es reversible, se puede ir de $x[n]$ a $X[k]$ y viceversa.

2. Si se elige el largo N_0 una potencia de 2 (o se rellena con ceros para lograrlo), existe un algoritmo de cálculo muy eficiente y rápido denominado FFT. Consulte el apéndice C.

3. La DFT posee muchas de las propiedades vistas para la transformada de Fourier, por lo tanto es sencillo interpolar los cálculos de una a otra.

4. Tanto la señal de partida $x[n]$, como la de llegada $X[n]$ son finitas, y por lo tanto todos los cálculos se pueden implementar digitalmente en una computadora.

8.5.1. Propiedades de la DFT

Antes de enumerar las propiedades de la DFT, y descubrir su estrecha similitud con la transformada de Fourier, debemos introducir el concepto de desplazamiento circular. Como la señal a transformar $x[n]$ posee solo N_0 muestras, debemos definir qué sucede si realizamos un desplazamiento de la misma en cualquier dirección.

Definamos el desplazamiento en módulo N:

Definición 8.5.2 *Si $x[n]$ es una señal discreta de longitud N y realizamos un desplazamiento de módulo N:*

$$x[n - n_0]_{modN}$$

las muestras que sobren a la derecha reentrarán desde la izquierda y viceversa.[4]

Gráficamente se observa de la siguiente manera:

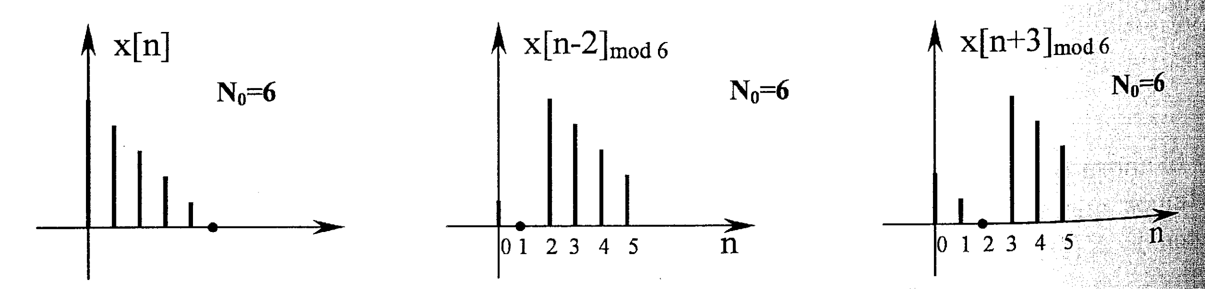


Figura 8.18: Desplazamiento en módulo N.

El desplazamiento definido de esta forma se aplica a todas las propiedades donde se lo mencione y es necesario prestar especial atención en el caso de la convolución circular (su nombre se condice con el efecto estudiado). Al calcular la convolución circular se debe tener en cuenta que los desplazamientos de las funciones son circulares.

Enunciemos las propiedades, considerando que se utilizan las secuencias finitas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ de duración N_0 muestras:

[4] Es el efecto clásico de la instrucción rotate."en cualquier lenguaje ensamblador.

Linealidad

Sean α y β escalares, entonces

$$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \longrightarrow \alpha X_1[k] + \beta X_2[k]$$

Desplazamiento temporal

Siguiendo la definición del desplazamiento circular:

$$x[n - n_0]_{modN_0} \longrightarrow e^{-ik(2\pi/N_0)n_0} X[k]$$

Desplazamiento en frecuencia

Siguiendo la definición del desplazamiento circular, pero aplicado a la señal transformada (que también es de longitud finita):

$$e^{ik_0(2\pi/N_0)n} x[n - n_0] \longrightarrow X[k - k_0]_{modN_0}$$

Conjugada

$$x^*[n] \longrightarrow X^*[-k]_{modN_0}$$

Donde aclaramos que es módulo N_0 ya que el $X[-1] = X[-1 + N_0]$, y el asterisco * implica el conjugado.

Inversión temporal

$$x[-n]_{modN_0} \longrightarrow X[-k]_{modN_0}$$

Dualidad

Esta propiedad es interesante ya que pone en evidencia que la única diferencia entra la transformada (DFT) y la antitransformada (IDFT) es la constante N_0 y el signo de la exponencial. Reproduzcamos las expresiones (8.17)(8.18) para mayor comodidad:

$$DFT\{x[n]\} = X[k] = \sum_{n=<N_0>} x[n] e^{-ik\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$IDFT\{X[k]\} = x[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} X[k] e^{ik\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

Este simple cambio (un signo y una constante) son muy prácticos a la hora de implementar el algoritmo de cálculo, ya que se utiliza casi el mismo algoritmo para transformar que para antitransformar.

La propiedad, recordando que $x[n]$ (minúscula) es la señal temporal, y $X[k]$ (mayúscula) la señal transformada, es:

$$X[n] \longrightarrow N_0.x[-k]$$

La cual debe ser interpretada de la siguiente manera: Si se toman los coeficientes de la transformada de $x[n]$ (los $X[k]$), se los divide por N_0 y se los vuelve a transformar, obtenemos nuevamente la señal de partida pero ordenada según $x[-k]$.

Convolución circular

La nomenclatura para la convolución circular entre $x_1[n]$ y $x_2[n]$ es $x_1[n] \otimes x_2[n]$. Enunciemos la propiedad:

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \longrightarrow X_1[k]X_2[k]$$

donde la definición de la convolución periódica o circular es

$$x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} x_1[m]x_2[n-m]_{modN_0}$$

Modulación o multiplicación temporal

Análogamente a lo que sucede con la transformada, y teniendo en cuenta la definición de convolución circular descripta en la propiedad anterior, enunciamos:

$$x_1[n]x_2[n] \longrightarrow \frac{1}{N_0}X_1[k] \otimes X_2[k]$$

donde

$$X_1[k] \otimes X_2[k] = \sum_{m=0}^{N_0-1} x_1[m]x_2[k-m]_{modN_0}$$

Relación de Párseval

$$\sum_{n=<N_0>} |x[n]|^2 = \frac{1}{N_0} \sum_{k=<N_0>} |X[k]|^2$$

8.5.2. Algoritmo de implementación de la DFT en C

Para implementar este algoritmo se eligió el lenguaje C ya que es ampliamente utilizado y permite una simple extrapolación hacia cualquier otro lenguaje.

Para el ejemplo supondremos que tanto la señal temporal $x[n]$ como su transformada $X[k]$ son señales complejas [5].Esto nos permitirá aplicar casi el mismo algoritmo para la transformada y la antitransformada. Además supondremos que $N = N_0$, esto significa que para una señal de N_0 muestras, calcularemos N_0 coeficientes.

El algoritmo estará compuesto por dos bucles del tipo *for* anidados. El externo calculará cada $X[k]$, y el interno realizará la sumatoria de la expresión para cada n. Como $x[n]$ posee parte real y parte imaginaria, y debemos realizar el producto con la exponencial $e^{-ik(2\pi/N_0)n}$, separemos este producto en su parte real y su parte imaginaria. Utilicemos $x_{real}[n]$ y $x_{imag}[n]$ como entrada temporal (donde si la señal temporal es real, todos los $x_{imag}[n]$ serán cero), y separemos la exponencial para realizar el producto. Utilicemos $\Omega_0 = 2\pi/N_0$:

$$\begin{aligned} x[n].e^{-ik\Omega_0 n} &= [x_{real}[n] + i.x_{imag}[n]] \cdot [cos(k\Omega_0 n) - i.sen(k\Omega_0 n)] \\ &= \underbrace{x_{real}[n]cos(k\Omega_0 n) + x_{imag}[n]sen(k\Omega_0 n)}_{REAL} + \\ &\quad +i.\left(\underbrace{x_{imag}[n]cos(k\Omega_0 n) - x_{real}[n]sen(k\Omega_0 n)}_{IMAGINARIA}\right) \end{aligned}$$

Para calcular cada $X[k]$ hay que *acumular* N_0 valores que son el resultado de este producto, transcribamos la fórmula de cálculo (8.8) con $N = N_0$:

$$DFT\{x[n]\} = X[k] = \sum_{n=<N>} x[n]e^{-ik(\frac{2\pi}{N})n}$$

Además comentamos a continuación algunos aspectos relativos exclusivamente al lenguaje C. Todas las variables utilizadas son del tipo *float* y se almacenan dinámicamente utilizando la instrucción *new*[6]. La memoria se libera, luego de llamar a la subrutina de DFT, utilizando la instrucción *delete* [7]. Se incluye el encabezado *math.h* para disponer de las funciones *seno* y *coseno* utilizadas en el algoritmo. Se define la constante *pi* y la constante N. Esta última vale 256, y es tanto el largo de la señal de entrada, como el número de puntos del espectro que se calcularán ($N = N_0$).

[5] En el transcurso del libro siempre consideramos que las señales temporales eran reales, aunque la transformada de Fourier puede aplicarse a señales complejas.

[6] La instrucción *new* pertenece al C++, su equivalente en C es *malloc*. Ambas cumplen la función de reserva dinámica de memoria.

[7] Su equivalente en C es *free*

Para calcular la transformada inversa (IDFT) podemos utilizar el mismo algoritmo, pero debemos conjugar la entrada (en este caso el $X[k]$), calcular la DFT, volver a conjugar el resultado y dividir por N. Esto es:

$$x[n] = IDFT\{X[k]\} = \frac{1}{N}\left[DFT\{X^*[k]\}\right]^*$$

ya que podemos escribir

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{N}\left[\sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{ik(2\pi/N)n}\right] = \frac{1}{N}\left[\sum_{n=0}^{N-1} X^*[k]e^{-ik(2\pi/N)n}\right]^* \\ x[n] &= IDFT\{X[k]\} = \frac{1}{N}\left[DFT\{X^*[k]\}\right]^* \end{aligned}$$

El programa se muestra en la figura 8.19.

El algoritmo descripto permite calcular la transformada de Fourier pero tiene un alto costo en término de cantidad de operaciones. Para realizar la DFT de una señal de $N = 256$ muestras se necesitan realizar $256^2 = 65536$ productos y sumas complejas. Para disminuir esta cantidad de operaciones existe un algoritmo mucho más eficiente denominado FFT (Fast Fourier Transform). En este caso la cantidad de operaciones se reduce a $(256/2)log_2(256)$. Esta relación logarítmica es esencial en la disminución de tiempos de cálculo, y es la que permite que la FFT sea el algoritmo por excelencia para el cálculo de la transformada. Consulte el apéndice C.

8.6. Resumen del capítulo

En este capítulo extendimos las aplicaciones de la transformada de Fourier para que la misma pueda ser aplicada en señales discretas. Observamos las similitudes con su par continuo y resaltamos sus eventuales diferencias. La transformada de Fourier para señales discretas da siempre como resultado un espectro **periódico**. Este espectro será discreto si la secuencia en n es periódica, o será continuo si la señal en n es aperiódica. De esta manera las zonas de baja frecuencia serán las cercanas a $\Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \ldots$ y las de alta frecuencia serán las cercanas a $\Omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi \ldots$.

A la transformada de la respuesta impulsional $h[n]$ de un sistema LTI se la denomina respuesta en frecuencia" $H(\Omega)$. Aprovechando la propiedad de convolución podemos hallar el espectro de la señal de salida de un sistema LTI, simplemente multiplicando el espectro de la señal de entrada por el $H(\Omega)$: $Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$.

En todo el capítulo se utilizó la variable Ω que no posee unidades, y es la denominada *frecuencia normalizada*.

Implementamos sobre el final un algoritmo (DFT) que permite calcular la transformada de Fourier de una señal discreta utilizando una computadora.

```
; Cálculo de ls DFT de (x_real+i.x_imag) en (X_real+i.X_imag) de N muestras.

#define N 256
#define pi 3.1415926535897
#include "math.h"

DFT(float *x_real, float *x_imag, float *X_real, float *X_imag);

void main(void)
{
float *x_real, *x_imag, *X_real, *X_imag;
x_real=new float[N]; x_imag=new float[N];
X_real=new float[N]; X_imag=new float[N];

; llenar los valores de x_real y x_imag a transformar
....
DFT(x_real,  x_imag,  X_real, X_imag);

; en X_real y X_imag está el resultado buscado.
delete x_real;  delete x_imag; delete X_real; delete X_imag;
}
DFT(x_real,  x_imag,  X_real, X_imag)
{
 float omega0 = 2.0*pi/(float)(N);
 for{int k=0;k<N;k++}
 {
  X_real[k]=0;
  X_imag[k]=0;
   for{int n=0;n<N;n++}
   {
    X_real[k]+=x_real[n]*cos(k*omega0*n)+ x_imag[n]*sin(k*omega0*n);
    X_imag[k]+=x_imag[n]*cos(k*omega0*n)-x_real[n]*sin(k*omega0*n);
   }
 }
```

Figura 8.19: Programa para calcular la DFT en C

8.7. Tablas de Propiedades y Transformadas

Cuadro 8.1: Propiedades de la Transformada de Fourier

$x[n]$	$X(\Omega)$
$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$	$\alpha X_1(\Omega) + \beta X_2(\Omega)$
$x[n - n_0]$	$e^{-i\Omega n_0} X(\Omega)$
$e^{i\Omega_0 n} x[n]$	$X(\Omega - \Omega_0)$
$x_k[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{si } n \text{ es múltiplo de } k \\ 0 & \text{si } n \text{ no es múltiplo de } k \end{cases}$	$X(k\Omega)$
$x[-n]$	$X(-\Omega)$
$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-i\Omega})X(\Omega)$
$n.x[n]$	$i\frac{\partial X(\Omega)}{\partial \Omega}$
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-e^{-i\Omega}} X(\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega)$
$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(\Omega) X_2(\Omega)$
$x_1[n] x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$

Cuadro 8.2: Transformada de Fourier de señales habituales

$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-i\Omega n_0}$
$x[n]=1$	$2\pi\delta(\Omega).\|\Omega\| < \pi$
$e^{i\Omega_0 n}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0), \|\Omega\| < \pi, \|\Omega_0\| < \pi$
$cos(\Omega_0 n)$	$\pi\left(\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right), \|\Omega\| < \pi, \|\Omega_0\| < \pi$
$sen(\Omega_0 n)$	$-i.\pi\left(\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)\right), \|\Omega\| < \pi, \|\Omega_0\| < \pi$
$u[n]$	$\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{1-e^{-i\Omega}}, \|\Omega\| < \pi$
$-u[-n-1]$	$-\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{1-e^{-i\Omega}}, \|\Omega\| < \pi$
$a^n.u[n], \|a\| < 1$	$\frac{1}{1-a.e^{-i\Omega}}$
$-a^n.u[-n-1], \|a\| > 1$	$\frac{1}{1-a.e^{-i\Omega}}$
$(n+1)a^n u[n]$	$\frac{1}{(1-ae^{-i\Omega})^2}$
$a^{\|n\|}, \|a\| < 1$	$\frac{1-a^2}{1-2acos(\Omega)+a^2}$
$\frac{sen(\alpha n)}{\pi n}, 0 < \alpha < \pi$	$X(\Omega)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \|\Omega\| \leq \alpha \\ 0 & \text{si } \alpha < \|\Omega\| \leq \pi \end{cases}$
$x[n]=\begin{cases} 1 & \text{si } \|n\| \leq N_1 \\ 0 & \text{si } \|n\| > N_1 \end{cases}$	$\frac{sen[\Omega(N_1+1/2)]}{sen(\Omega/2)}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k.N_0]$	$\Omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0), \Omega_0=2\pi/N_0$
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}a^n u[n], \|a\| < 1$	$\frac{1}{(1-ae^{-i\Omega})^2}$

8.8. Problemas propuestos

1. Calcule la Serie de Fourier de las siguientes señales periódicas, de período N_0, donde solo se describe un período (Si se informa una secuencia, el primer elemento es el que corresponde a x[0]):

   a) $x[n] = \{0, 1, 2, 3\}$ con $N_0 = 4$.

   Rta: $x[n] = \frac{3}{2} + (-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2})e^{i\pi n/2} - \frac{1}{2}e^{i\pi n} + (-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2})e^{i3\pi n/2}$

   b) $x[n] = \{0, 1, 0, -1\}$ con $N_0 = 4$.

   c) $x[n] = sen(n\pi/6) + cos(n\pi/4)$.(Halle N_0).

   d) $x[n] = a^n.[u[n] - u[n - N_0]$, $|a| < 1$.

   Rta: $C_k = \frac{1-a^{N_0}}{N_0} \frac{1}{1-ae^{-ik\Omega_0}}$

   e) $x[n] = cos^2(n\pi/8)$.(Halle N_0).

   f) $x[n] = \delta[n] + \delta[n - 5]$ con $N_0 = 6$.

   Rta: $C_k = \frac{1}{6}(1 + e^{-ik5\pi/3})$, $\Omega_0 = \pi/3$

2. Verifique la Identidad de Párseval para los casos $a)$, $b)$ y $f)$ del ejercicio anterior.

3. Calcule la transformada de las siguientes funciones aperiódicas

   a) $x[n] = \{0, 1, 2, 3\}$.

   b) $x[n] = \delta(n) - \delta(n - N_0)$

   Resuelto: Utilizamos la transformada del delta y la propiedad de desplazamiento:

$$\delta[n] - \delta[n - N_0] \longrightarrow 1 - e^{-i\Omega N_0} = e^{-i\Omega N_0/2}\left(e^{i\Omega N_0/2} - e^{-i\Omega N_0/2}\right)$$

   finalmente $X(\Omega) = 2ie^{-i\Omega N_0/2}sen(\Omega N_0/2)$ cuyo módulo es $|X(\Omega)| = 2|sen(\Omega N_0/2)|$. Observe el gráfico en la figura 8.20 para distintos valores de N_0.

   c) $x[n] = u[n] - u[n - N_1]$. Dibuje el espectro de módulo.

   d) $x[n] = u[n + 1] - u[n - 2]$. Dibuje el espectro de módulo.

   e) $x[n] = n.a^n.u[n]$ con $1 > a > 0$.

   f) $x[n] = \delta[n + 1] - \delta[n] + \delta[n - 1]$. Dibuje el espectro de módulo.

   g) $x[n] = (n + 3)u[n + 3] - 2nu[n] + (n - 3)u[n - 3]$

   h) $x[n] = a^n cos(\Omega_0 n)u[n]$. Dibuje el espectro de módulo.

   Resuelto: Utilizando la propiedad de desplazamiento en frecuencia pero aplicada a la función exponencial

$$a^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-i\Omega}}$$

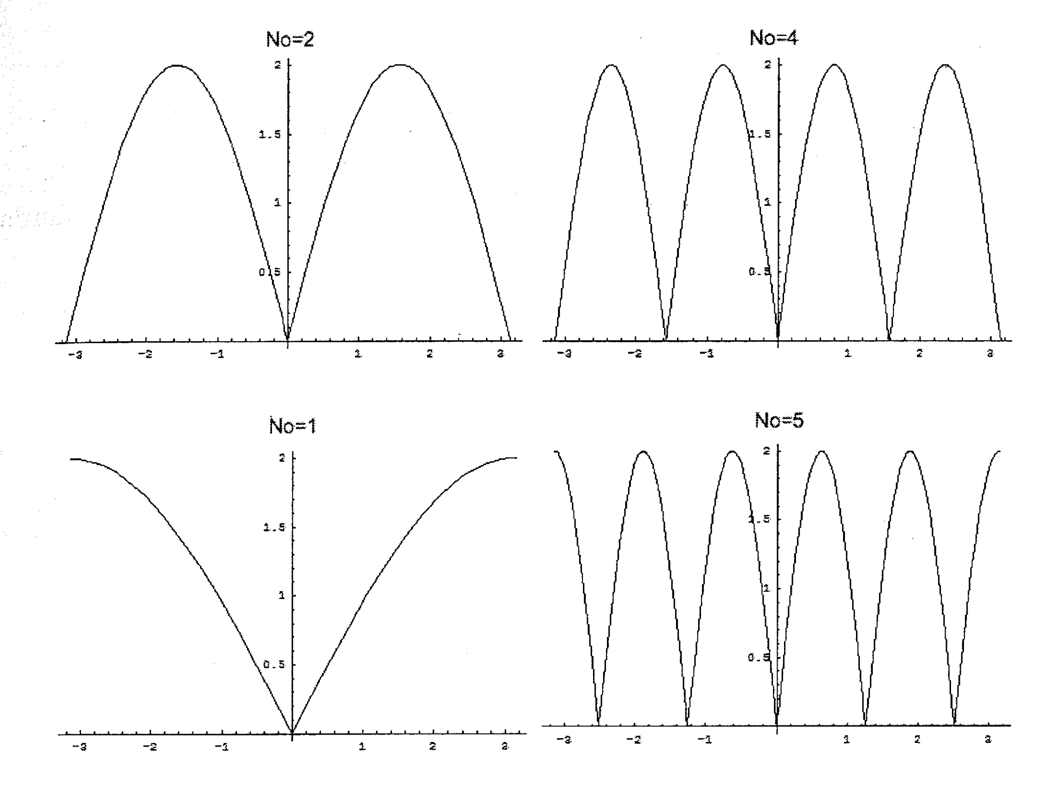


Figura 8.20: Módulos del espectro de $x[n] = \delta(n) - \delta(n - N_0)$ para distintos valores de N_0

y queda entonces

$$a^n cos(\Omega_0 n)u(n) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - ae^{-i(\Omega+\Omega_0)}} + \frac{1}{1 - ae^{-i(\Omega-\Omega_0)}}\right)$$

graficada en la figura 8.21 para $a = 0.6, \Omega_0 = \pi/4$ y para $a = 0.4, \Omega_0 = \pi/4$.

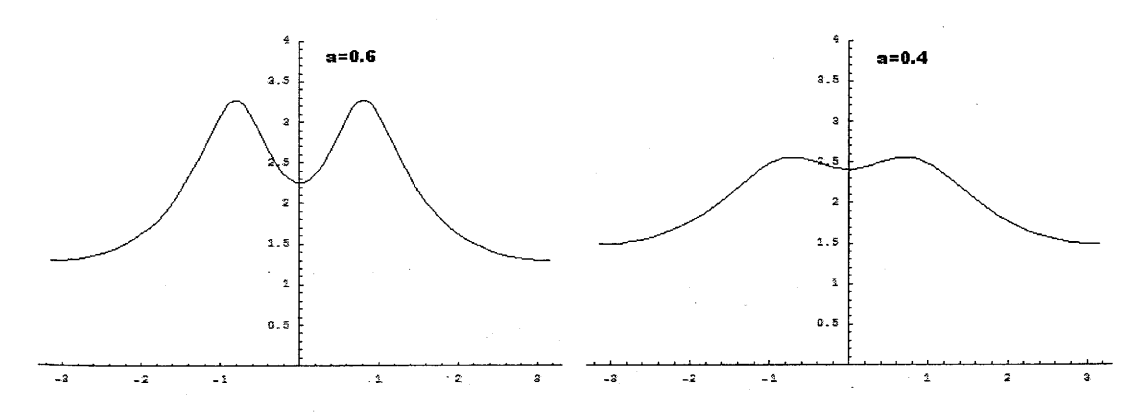


Figura 8.21: Modulo del espectro $x[n] = a^n cos(\Omega_0 n)u[n]$

i) $x[n] = sen(\Omega_0 n)u[n]$. Dibuje el espectro de módulo.

j) $x[n] = (1/2)^n.cos(3\pi n/5)u[n]$.

k) $x[n] = (1/2)^n.u[n+3]$.

l) $x[n] = (1/4)^{|n|}$.

Resuelto: Escribimos a la función como suma de sus partes derecha e izquierda:

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{|n|} = \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n]}_{x_1(n)} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u[-n] - \delta[n]$$

Se eligió esta forma de escribir ya que se identifica el segundo término como el opuesto del primero ($x_1[n]$)y se puede utilizar la propiedad $x_1[-n] \longrightarrow X_1(-\Omega)$. Observe que se agregó un delta en el origen para cancelar una suma superpuesta de $x_1[n]$ y $x_1[-n]$. Así entonces, conociendo la transformada de una exponencial escribimos

$$\begin{aligned} x_1[n] &\longrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-i\Omega}} \\ x_1[-n] &\longrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{i\Omega}} \\ x(n) = x_1[n] + x_1[-n] - 1 &\longrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-i\Omega}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-i\Omega}} - 1 \end{aligned}$$

y sacando factor común y luego simplificando resulta

$$X(\Omega) = \frac{15/16}{1-\frac{1}{2}cos(\Omega)+\frac{1}{16}}$$

El gráfico del módulo se observa en la figura 8.22.

m) $x[n] = sen(\pi n/6)/(\pi n)$.

4. Calcule, para cada caso, la respuesta en frecuencia del sistema LTI de entrada $x[n]$ y salida $y[n]$. Calcule además el $h[n]$ y dibuje un bosquejo del espectro de módulo.

a) $y[n] = (x[n] + x[n-1] + x[n+1])/3$.

Rta: $H(\Omega) = \frac{1+2cos(\Omega)}{3}$

b) $y[n] = x[n+1] - x[n-1]$.

Rta: $H(\Omega) = i2sen(\Omega)$

c) $y[n] = x[n] + x[n-N_1]$.

Rta: $H(\Omega) = 2sen(N_1\Omega/2)e^{i(\pi/2-N_1\Omega/2)}$

d) $y[n] = x[n-1] - x[n-2]$.

Rta: $H(\Omega) = 2sen(\Omega/2)e^{i(\pi/2-3\Omega/2)}$

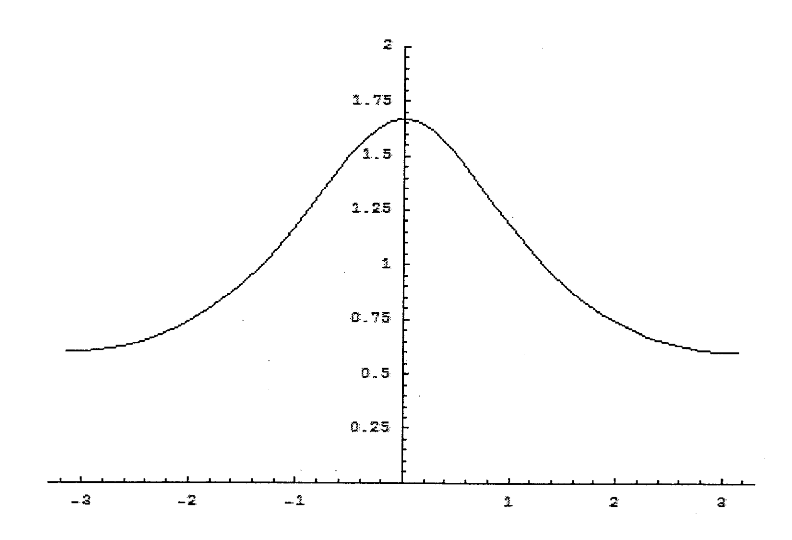


Figura 8.22: Módulo del espectro $x[n] = (1/4)^{|n|}$

e) $x[n] = y[n] - a.y[n-1]$.

Rta: $H(\Omega) = \frac{1}{1-ae^{-i\Omega}}$

f) $x[n] = y[n] - 2.r.cos(\Theta)y[n-1] + r^2.y[n-2]$ con $1 > r > 0$ y $\pi \geq \Theta \geq 0$.

g) $y[n] - 0{,}3y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] - x[n-2]$.

Rta: $H(\Omega) = \frac{2(1+isen(\Omega))}{e^{i\Omega}-0{,}3}$

5. Sea el $h[n]$ la respuesta impulsional de un sistema LTI, halle la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$:

   a) $h[n] = \delta[n] - 5\delta[n-1] + 2\delta[n-2]$.

   b) $h[n] = (1/4)^{n+1}u[n+1]$.

   c) $h[n] = \{2, 2, -2, -2\}$.

6. Calcule el $h[n]$ de un filtro pasa-bajos ideal, con frecuencia de corte $\Omega = \pm\Omega_c$ y respuesta de fase $arg\{H(\Omega)\} = -n_0\Omega$

   Rta: $h[n] = \frac{sen(\Omega_c(n-n_0))}{\pi(n-n_0)}$

7. Calcule el $h[n]$ y la respuesta en frecuencia del sistema LTI de la figura 8.23.

   Siendo $h_0[n] = \delta[n-2]$, $h_1[n] = (0{,}25)^n u[n]$, $h_2[n] = \delta[n-1]$, $h_0[n] = 5\delta[n-1]+\delta[n+1]$.

8. Calcule la respuesta en frecuencia del sistema LTI de la figura 8.24.

   Rta: $H_T(\Omega) = \frac{G(\Omega)}{1+G(\Omega)H(\Omega)}$

9. Encuentre la antitransformada de

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1-ae-i\Omega)^2} \qquad |a| < 1$$

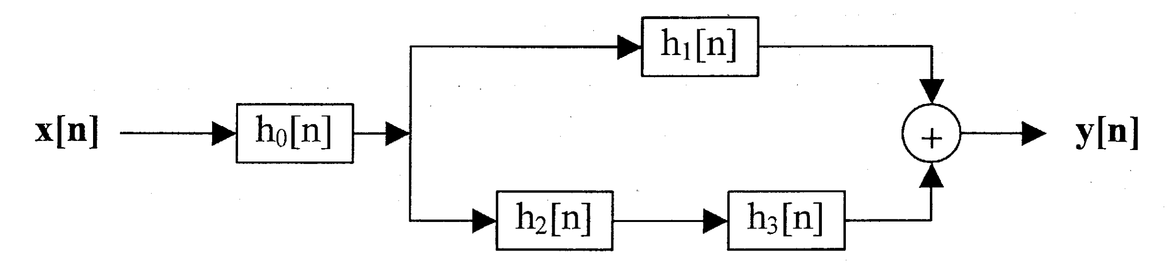


Figura 8.23: Diagrama en bloques

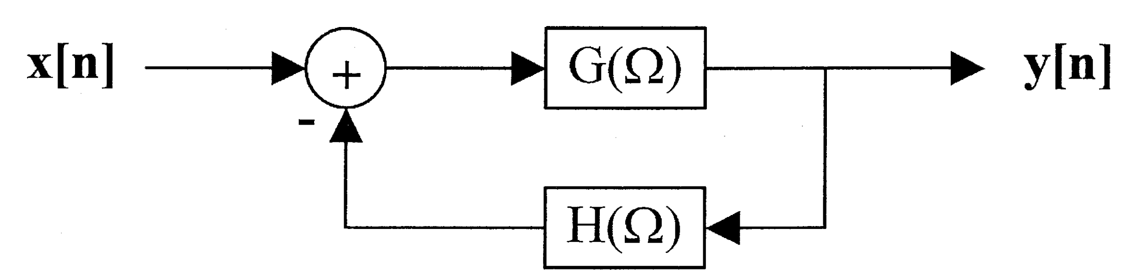


Figura 8.24: Diagrama en bloques

utilizando la propiedad de convolución.

Rta: $h[n] = a^n(n+1)u[n]$

10. Si la salida de un sistema LTI es $y[n] = (1/3)^n.u[n]$ si colocamos en la entrada $x[n] = (1/2)^n.u[n]$. Calcule el $h[n]$.

    Rta: $h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}(1/3)^n u[n-1]$

11. Si la respuesta impulsional de un sistema LTI es $h[n] = (1/2)^n.u[n]$, calcule la salida ante las siguientes entradas:

    a) $x[n] = (1/4)^n.u[n]$.

    Rta: $y[n] = \left[(1/2)^{n-1} - (1/4)^n\right] u[n]$

    b) $x[n] = (-1)^n$.

    Rta: $y[n] = (-2)^n/3$

    c) $x[n] = (n+1)(3/4)^n.u[n]$.

    Rta: $y[n] = \left[(1/2)^{n-2} + 3(n-1)(3/4)^n\right] u[n]$

12. Encuentre la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ y la respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema descripto por la siguiente ecuación en diferencias: $x[n] = y[n-2] + a.y[n-1] + b.y(n)$ en los casos i) $a = -8, b = 16$ ii) $a = 4, b = 5$ iii) $a = 4, b = 3$. Dibuje los diagramas de polos y ceros.

Aplicación en MatLab

```
%SERIE Y TRANSFORMADA DE FOURIER PARA SEÑALES DISCRETAS
%El cálculo de la serie de Fourier para señales discretas puede efectuarse
%mediante un ciclo "for" de manera de implementar la expresión analítica.
%Utilizando un vector de coeficientes de tamaño superior a N0 (período de
%la señal) puede observarse la periodicidad del espectro en frecuencia. La
%estimación de la envolvente (transformada, Ck*N0) puede observarse
%aumentando el período considerado (mediante el agregado de ceros) y
%realizando el cálculo mediante un vector "w" de pasos 2*pi/N (que tienden
%a dw). Si bien el espectro resultante es DISCRETO (DFT), utilizando la
%función "plot" (interpoladora) en lugar de "stem", puede obtenerse una
%estimación convincente de la envolvente continua (TFSD).


%SERIE DE FOURIER PARA SEÑALES DISCRETAS-----------------------------------
%Periodo N0
N0=4;
%Vector n (1 período de la señal periódica)
np=0:N0-1;
%1 Periodo de la señal de entrada: Rampa------------------------------------
f=0:N0-1;
%Vector k (cálculo de los ck)
%Si bien sólo son necesarios calcular N0 Ck's, se utilizan más para observar
%la periodicidad del espectro.
k=-2*N0:2*N0;
%Frecuencia normalizada
W0=2*pi/N0;
%Vector nW0
w=k*W0;
%Cálculo de la de los coeficientes de la serie de Fourier------------------
for m=1:length(k),
  F(m)=(1/N0)*sum(f.*exp(-i*k(m)*W0*np));
end
%Reconstrucción de la señal-------------------------------------------------
fr=0;
%Vector n de reconstrucción
nr=-10:10;
%Se toma un sólo período del espectro y se reconstruye sobre un vector nr
for m=1:4
  fr=fr+F(m)*exp(i*k(m)*W0*nr);
end
%Visualización--------------------------------------------------------------
figure;
subplot(311),stem(np,f,'b'),xlabel('n'),ylabel('f[n] (1 periodo)'),grid;
axis([-N0 2*N0 min(f) max(f)]);
title(['Serie de Fourier señales discretas: Rampa periódica N0=' num2str(N0)]);
subplot(312),stem(w,abs(F),'r'),xlabel('nW0'),ylabel('abs(F(nW0))'),grid
axis([-3*pi 3*pi min(abs(F)) max(abs(F))]);
title('Espectro de Amplitud discreto (0,2*pi Bajas frec.; pi Altas frec.)');
subplot(313),stem(nr,fr,'m'),xlabel('n'),ylabel('fr[n]'),grid
axis([nr(1) nr(end) min(fr) max(fr)]);
title('Señal reconstruida desde la serie');

%TRANSFORMADA DE FOURIER PARA SEÑALES DISCRETAS-----------------------------
%Se extenderá N0 (agregando ceros) y se calcularán los Ck*N0 para observar
%la envolvente:
%Conformación señal aperiódica: Rampa con N0 extendido----------------------
f=[zeros(1,20) 0:N0-1 zeros(1,20)];
%Long de la señal aperiódica
N=length(f);
%Vector n de la señal aperiódica
na=0:N-1;
%Vectores k y kW0 (cálculo de los CkN0). Se utilizan más de N0 valores para
%observar la periodicidad de la envolvente
k=-100:100;
nw=2*pi/N;
w=k*nw;
```

```
%Cálculo de la de los coeficientes de la serie de Fourier------------------
for m=1:length(w),
  F(m)=sum(f.*exp(-i*w(m)*na));
end
%Cálculo de la Expresión analítica------------------------------------------
Fa=exp(-i*w)+2*exp(-2*i*w)+3*exp(-i*3*w);
%Visualización--------------------------------------------------------------
figure;
subplot(211),stem(na,f,'b'),xlabel('n'),ylabel('f[n] (aperiodica)'),grid;
axis([na(1) na(end) min(f) max(f)]);
title(['Estimación de la Transformada de Fourier para señales discretas: Rampa N='
num2str(N)]);
subplot(212),plot(w,abs(Fa),'b',w,abs(F),'r'),xlabel('w'),ylabel('abs(F(W))'),grid;
axis([-3*pi 3*pi min(abs(F)) max(abs(F))]);
legend('Expresión Analítica', 'Algoritmo',1);
title('Espectro de Amplitud CkN0 (0,2*pi Bajas frec.; pi Altas frec.)');
```

Capítulo 9

Muestreo

9.1. Introducción

El presente capítulo tiene como objetivo cerrar un bloque conceptual que comenzó con la serie Fourier para señales periódicas, abarca la transformada de Fourier para señales continuas e involucra a la transformada de Fourier para señales discretas. Los conceptos que verteremos en forma ordenada nos permitirán convertir una señal continua en una discreta, analizando en detalle los inconvenientes y las condiciones particulares que implica este proceso. Con el advenimiento de tecnologías que permiten el procesamiento digital de señales a altas velocidades, la conversión de una señal continua en una discreta, su procesamiento digital, y su regreso al campo continuo, constituye una alternativa atractiva para el procesamiento de señales en tiempo real. Muchos circuitos analógicos han sido reemplazados en la actualidad por algoritmos numéricos eficaces y aun mas potentes en el campo discreto. En este mismo sentido, se han construido procesadores DSP especializados en el procesamiento digital de señales en tiempo real. En el presente capítulo nos limitaremos a mostrar brevemente las técnicas de muestreo más comunes y, sobretodo, a fijar conceptos ya vistos y analizados. Comencemos entonces con el Teorema del Muestreo.

9.2. Teorema de muestreo

El procesamiento digital de señales analógicas (continuas) se puede subdividir en cuatro etapas:

1. La señal que se desea procesar puede provenir de diferentes fuentes de energía. La primer etapa de un sistema de adquisición debe contemplar el **acondicionamiento de la señal**. Esto implica, la conversión de la fuente en una señal eléctrica de una amplitud y una relación señal/ruido adecuadas para ser digitalizadas e ingresadas a un sistema de conversión analógico/digital. Para dar un ejemplo típico, los niveles de tensión de las tecnologías TTL estándar van de 0 a 5 Volt.

2. La señal analógica acondicionada (eléctrica) se digitaliza: se adquieren muestras o valores puntuales de la señal continua a un intervalo temporal T_s. Este intervalo suele ser periódico, y en ese caso se denomina al muestreo *uniforme*. Cada uno de los valores de amplitud muestreados deben ser *cuantificados* en un número de bits para que puedan ser ingresados a una computadora. Este proceso completo se denomina conversión A/D.

3. Se utiliza una computadora (o cualquier microprocesador o sistema que permita procesar los datos digitales) para almacenar temporalmente algunos valores y procesar los datos en forma digital. Los procesos y cálculos que se realizan sobre las muestras pueden ser muy variados e involucran desde el filtrado, adaptación o reconocimiento de patrones, estimación de espectros u otros.

4. En algunos casos, el resultado del proceso debe ser reconvertido desde el dominio digital nuevamente al campo continuo. Este proceso para generar una nueva señal analógica se conoce como conversión D/A.

Es muy importante comprender que debemos separar claramente estos ítems para poder enfocarlos desde un punto global, trabajando con el total del sistema, y desde un punto individual, para poder llevarlos a la práctica. Existen infinidad de problemas que exceden el presente texto, como por ejemplo la cuantificación digital de las muestras tomadas y el *ruido* que esto introduce a la señal muestreada. Sin embargo es necesario centrarnos en el segundo punto planteado y preguntarnos de qué manera podemos, con solo un número finito de muestras adquiridas, obtener una señal digital que represente *adecuadamente* a su contraparte continua.

Es intuitivo pensar que si se adquieren muestras discretas sucesivas en un intervalo regular de T_s segundos de una señal continua, entre ellas pueden suceder fenómenos o variaciones que no se verán reflejados en estas muestras. Esto naturalmente nos lleva a pensar que para obtener un mejor muestreo es necesario que el intervalo de muestreo T_s sea lo más pequeño posible de manera que *la información de la señal continua se vea plasmada en su representación discreta*. La pregunta fundamental que responderemos a continuación es qué tan pequeño debe ser el periodo de muestreo T_s y cuales son las propiedades principales que lo determinan.

Comencemos haciendo un diagrama esquemático del sistema de muestreo, que mostramos en la figura 9.1.

Note que utilizamos la convención de los paréntesis para señales continuas, a pesar de haber introducido la variable discreta n. Es intuitivo pensar que la adquisición de las muestras debe hacerse en un instante de tiempo muy corto cada T_s segundos, casi instantáneamente y sin afectar a la señal original. En otras palabras, el tiempo en que el interruptor está cerrado debería ser mínimo. Para lograr este objetivo es conveniente utilizar algunos bloques más reconocidos, como el multiplicador, y permitir que el mismo sea controlado por un tipo arbitrario de señal de muestreo. Veamos un nuevo diagrama en la figura 9.2.

La señal $m(t)$ es la señal de muestreo que activa o desactiva la llave que toma las muestras. Comencemos entonces con el muestreo más simple, el cual coloca un peine de

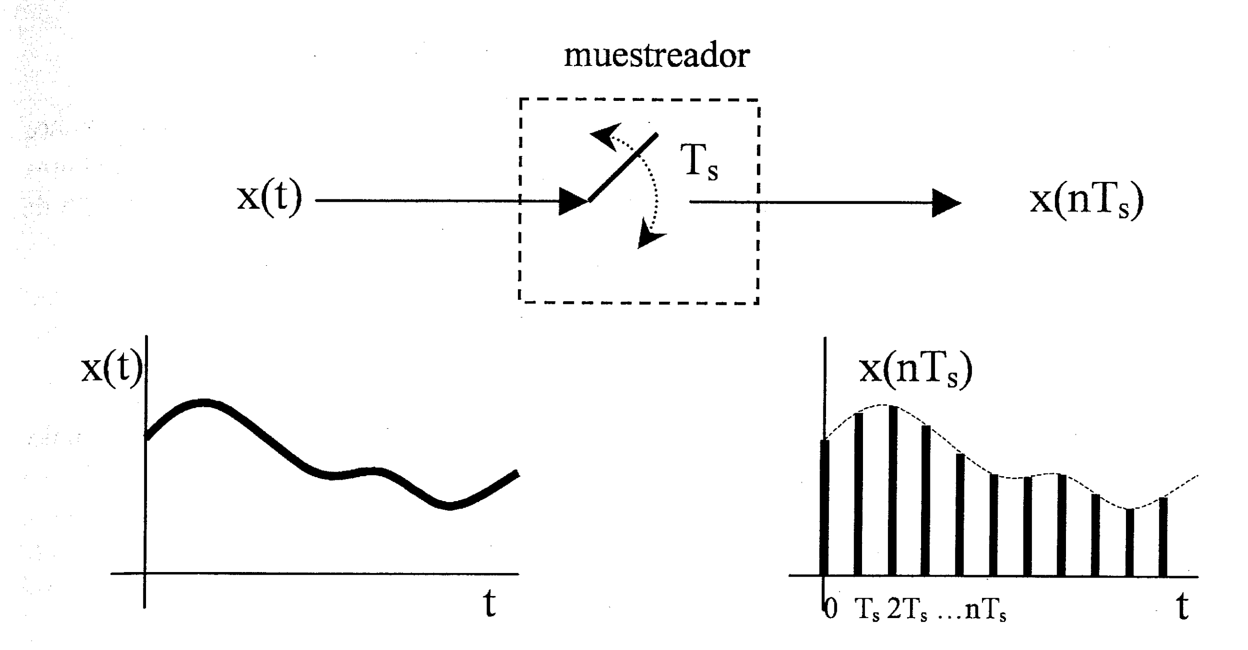


Figura 9.1: Esquema de un sistema de muestreo en base a un interruptor.

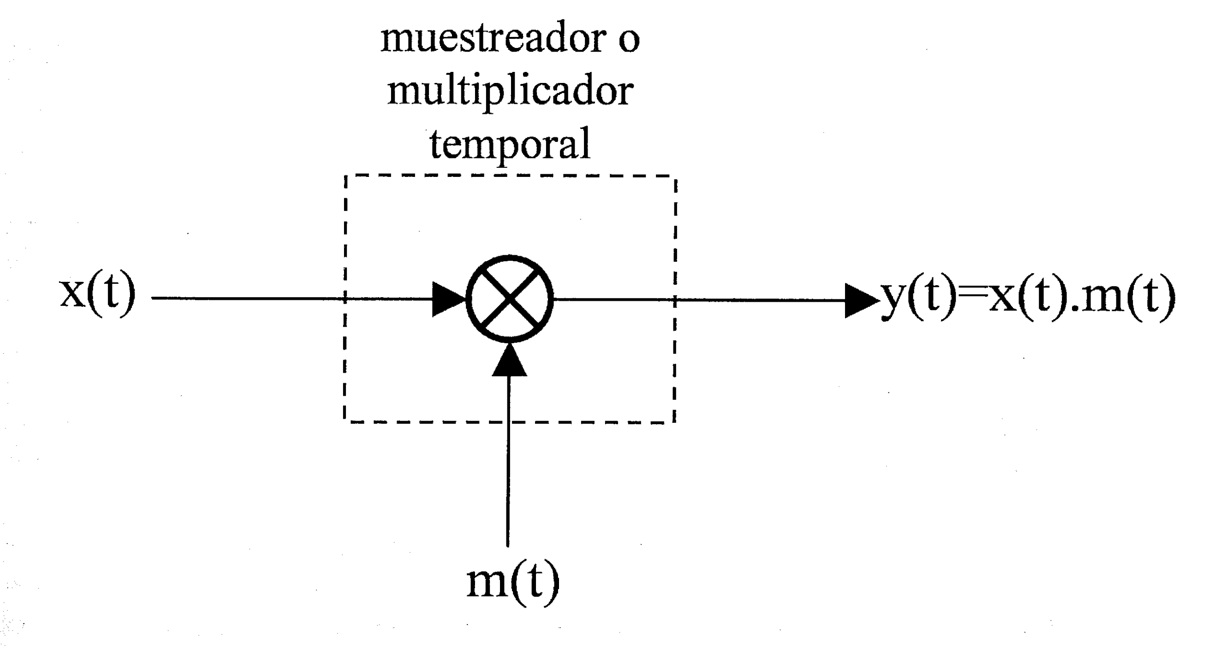


Figura 9.2: Esquema de un sistema de muestreo en base a un multiplicador temporal.

deltas como señal de muestreo. En este caso ideal estamos suponiendo que la llave se cierra y captura toda la energía de la señal prácticamente en un tiempo cero. A pesar de ser un modelo **ideal**, será de gran utilidad para comprender el fenómeno desde un punto de vista espectral.

9.2.1. Muestreo con tren de impulsos

El tren de impulsos o peine de deltas es una señal ideal para muestrear, ya que indica un momento preciso en tiempo donde se adquiere la muestra y además almacena en su área la amplitud que posee la señal temporal en ese instante. Recordemos entonces el tren de impulsos como:

$$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Como esta es una señal periódica, podemos utilizar la transformada de Fourier para señales periódicas y hallar su espectro. Reproduzcamos a continuación los resultados obtenidos en el ejemplo 7.5.1

$$M(\omega) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

donde si T_s es el intervalo o período de muestreo, definimos a

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

como la **frecuencia de muestreo**. Grafiquemos los resultados en la figura 9.3.

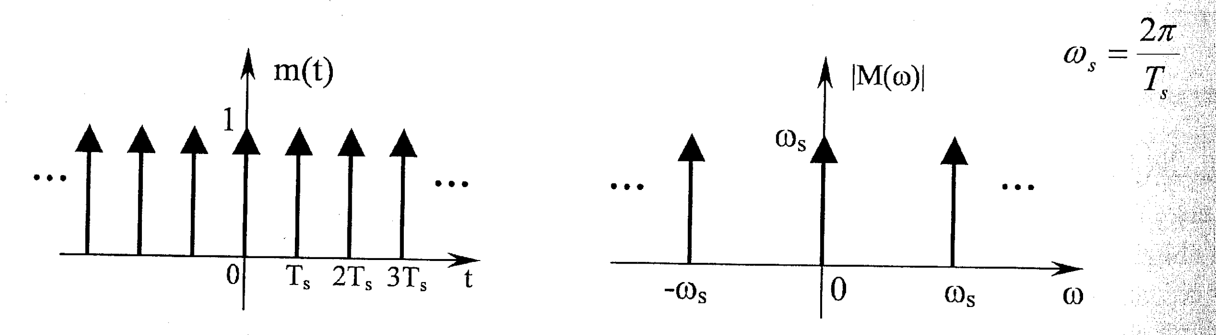


Figura 9.3: Espectro de un peine de deltas.

Para deducir el teorema del muestreo simplemente seguiremos pasos muy intuitivos. Comencemos graficando una señal arbitraria que se desea muestrear $x(t)$ y a su espectro en la figura 9.4.

Esta señal posee una característica muy importante y *fundamental* para que la misma pueda ser muestreada: es una señal **acotada en banda**. Esto significa que tiene un ancho de banda máximo que denominamos como ω_M. En otras palabras, la energía de la señal en el espectro, está concentrada y posee una frecuencia a partir de la cual no se detecta más energía. Distinguir este fenómeno en el tiempo es complicado, aunque de alguna manera se podría decir que no se observarán .ºscilaciones.º variaciones bruscas de frecuencia superiores a $\omega_M = 2\pi f_M$.



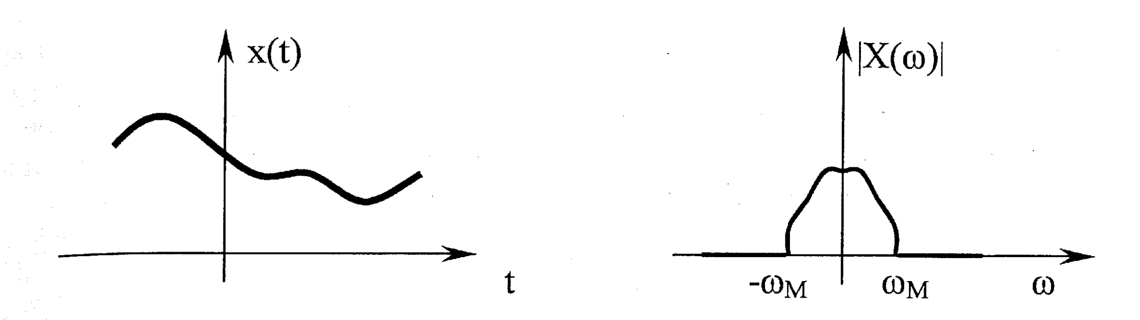


Figura 9.4: Señal acotada en banda.

A primera vista, esto puede parecer una restricción importante para muestrear una señal, aunque es razonable comenzar a pensar que para procesar una señal real, el sistema de adquisición debe tener alguna restricción respecto a la frecuencia máxima que acepta en su entrada. Es decir, el ancho de banda del sistema de adquisición se refiere a la mayor componente frecuencial que puede aceptar en su entrada. Todo sistema de adquisición posee un circuito a la entrada que permite ingresar señales analógicas hasta cierto valor máximo de frecuencia. Los límites están normalmente dispuestos por el diseñador o son restricciones puramente circuitales. Comentaremos estos detalles en un momento.

Al aplicar esta señal a la entrada de nuestro muestreador debemos **multiplicarla en el tiempo** por la señal de muestreo, que en este caso es un tren de impulsos:

$$y(t) = x(t).m(t) = x(t). \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT_s)$$

Observe que el bloque de multiplicación multiplica señales **en el tiempo**. Graficamos el resultado de esta operación en la figura 9.5.

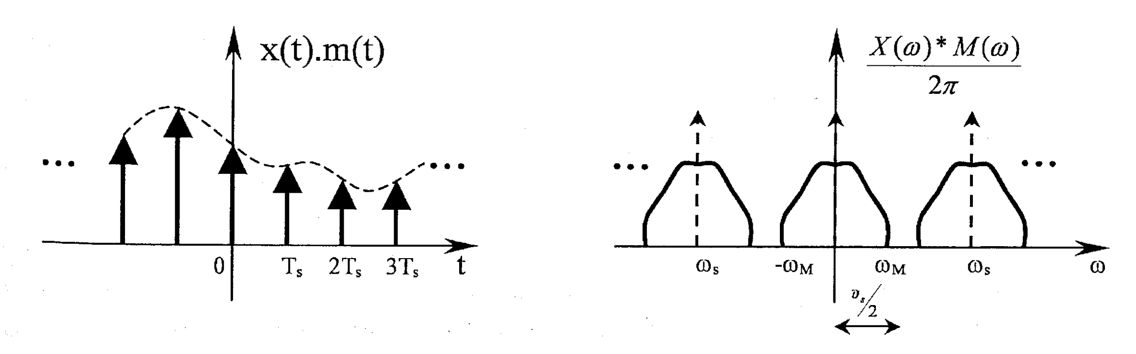


Figura 9.5: Señal temporal muestreada y su espectro periódico.

Debemos hacer notar algunos detalles:

- Al multiplicar dos señales temporales, para calcular el espectro resultante debemos utilizar la propiedad de modulación de la transformada de Fourier:

$$x(t).m(t) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * M(\omega)$$

que impone la *convolución* de los espectros.

- Al convolucionar el espectro (acotado entre $\pm\omega_M$) de la señal a muestrear $x(t)$ con el espectro **periódico** del tren de impulsos, obtenemos un espectro continuo **periódico**.

- Los dos puntos anteriores se reconfirman al visualizar las señales resultado en tiempo y frecuencia. En tiempo tenemos una señal que está compuesta por deltas frecuenciales espaciados T_s y con amplitudes $x(kT_s)$. Esta señal, aun es continua aunque de alguna manera solo tiene valor para determinados instantes de tiempo, lo que la convierte en una señal discreta. Es muy importante resaltar que a pesar de ser discreta **existe una separación entre muestras gobernada por el periodo de muestreo** T_s. A simple vista se comprueba que su espectro es ahora periódico, como el de cualquier señal discreta. Este espectro periódico es periódico con período ω_s y no 2π como el de las señales discretas normalizadas que se habían analizado hasta el momento. Este cambio de variables puede analizarse de la siguiente forma. La variable Ω que se utilizó hasta ahora para la frecuencia angular discreta es la *frecuencia normalizada* y se utiliza si tenemos en cuenta que las muestras temporales están una tras la otra ($\{x[0], x[1], x[2] \ldots\}$) y no existe nada entre ellas. En ese caso la frecuencia máxima es $\pm\pi$ y la mínima cero. Si ahora consideramos una señal continua discretizada, con un intervalo de muestreo T_s, la frecuencia máxima pasa a ser $\omega_s/2$ como se destaca en el gráfico.

- El espectro de la señal original poseía toda la energía de la señal temporal y por lo tanto la describía en su totalidad. Ese espectro está ahora *replicado*, con su forma **inalterada**, y por lo tanto con solo tener las muestras $x(nT_s)$ poseemos toda la información necesaria para reconstruir la señal original. El calificativo **forma inalterada** se refiere a que la morfología del espectro no cambió: la convolución con los deltas no deforma los espectros, simplemente los desplaza en frecuencia.

Si tomamos el espectro de la señal discretizada podemos observar que la réplica del espectro de la señal original no lo deformó. Esto se debe fundamentalmente a dos motivos. El primero es la utilización de una señal de muestreo **ideal** como ser los peines de delta. En segundo lugar y en el caso graficado, la separación frecuencial entre los deltas con los que se convolucionó el espectro original era lo suficientemente espaciado para que no se provoque ninguna superposición espectral.

Recordemos que, como ya mencionamos en varias oportunidades, existe una relación estrecha entre los efectos de comprimir una señal temporal y lo que sucede con su espectro (propiedad de escala). Si **comprimimos** una señal temporal, la convertimos en una señal con variaciones temporales mas rápidas (derivadas más altas) y por lo tanto mayores componentes frecuenciales que **ensanchan** el espectro, ya que el mismo debe reflejar componentes energéticas de mayor frecuencia. Por el contrario, expandir una señal temporal, concentra su energía espectral en frecuencias menores. En este caso, comprimir la señal de muestreo implica tomar muestras más próximas (más seguido), lo que provoca que el tren de impulsos del espectro se separe más: $\omega_s = 2\pi/T_s$. Por el contrario, tomar las muestras

lentamente (aumentar T_s), provoca que en el tren de impulsos del espectro ($M(\omega)$), los deltas se acerquen. Si los deltas en $M(\omega)$ están muy cerca, al convolucionar con el espectro $X(\omega)$ se produciría un solapamiento denominado *aliasing*. Este solapamiento deformaría el espectro original impidiendo la reconstrucción de la señal $x(t)$.

Se impone de esta manera un límite inferior en la frecuencia de muestreo que garantiza la reconstrucción de la señal original. Esta frecuencia se denomina *frecuencia de Nyquist* y, como deducimos del gráfico, debe ser como mínimo el doble de la frecuencia máxima de la señal de entrada:

$$\boxed{\omega_s > 2 \cdot \omega_M}$$

Es decir, si deseamos muestrear una señal $x(t)$ acotada en banda cuya frecuencia máxima es ω_M, debemos utilizar una frecuencia de muestreo ω_s que sea **al menos** el doble. Esta relación también la podemos imponer como

$$\boxed{f_s > 2 \cdot f_M}$$

Siendo f_M la frecuencia máxima de $x(t)$ en *Hertz*. La imposición de acotar en banda a la señal de entrada es indispensable para determinar la frecuencia de muestreo. En la práctica se toman algunos recaudos sobre la frecuencia de muestreo elegida. Por ejemplo, si se desea muestrear una señal de electrocardiografía (ECG) de frecuencia máxima 80Hz, se podría elegir una frecuencia de muestreo como mínimo de 160Hz, aunque en la práctica se podría adoptar 200Hz para tener un margen de seguridad. En la reproducción de audio mediante discos compactos se utiliza una frecuencia de muestreo cercana a los 44KHz, de esta manera se puede reproducir con alta fidelidad el audio de hasta 22KHz.

Es necesario aclarar además que la frecuencia mínima de muestreo está impuesta por la frecuencia de Nyquist, aunque también debemos hacer consideraciones acerca de la frecuencia máxima. Uno podría pensar en superar ampliamente la frecuencia de Nyquist, por ejemplo en 10 veces, y asegurar el muestreo. El problema que subyace es que al aumenta en 10 veces la frecuencia de muestreo, se están tomando 10 veces más muestras temporales por segundo, de manera que vamos a tener que manejar un número excesivo de muestras que deberán ser ingresadas al sistema de procesamiento digital. Esto se agrava además, teniendo en cuenta que aumentar la frecuencia de muestreo en este caso *no trae aparejado ningún beneficio con respecto a la información recolectada de la señal original.* Toda la información de la señal está representada en su espectro si se respeta la frecuencia de Nyquist. Tomar muestras a mayor velocidad no agrega información nueva a la señal discreta.

Podemos ahora intentar explicar por qué tomando solo un número discreto de valores de $x(t)$, aun así poseemos toda la información de la señal. La explicación es sencilla. Al elegir la frecuencia de muestreo adecuada, en base al doble de la frecuencia máxima de la señal, estamos asegurando que no puedan haber variaciones bruscas entre dos muestras consecutivas. Si esas variaciones existieran, deberían estar reflejadas en el espectro para valores superiores a ω_M.

Si tenemos intención de muestrear una señal debemos decidir cuál será su frecuencia máxima y elegir una frecuencia de muestreo de por lo menos el doble.

Por el contrario, si existen otras limitaciones circuitales o de almacenamiento de muestras, y la frecuencia de muestreo está impuesta, se debe aplicar un filtro pasa-bajos para recortar las altas frecuencias de la señal a digitalizar. Este recorte producirá seguramente que parte de la información de alta frecuencia se pierda, y por lo tanto la representación temporal de la señal no coincida exactamente con la original. Para brindar un ejemplo concreto, en la actualidad las lineas de teléfono poseen un sistema digital de comunicación. La frecuencia de muestreo es de $f_s = 8Khz$ y por lo tanto la frecuencia máxima del audio transmitido es de $f_M = 4Khz$. Esta señal es aun inteligible aunque la calidad es naturalmente pobre si la comparamos con señales de audio de música en radio FM o en un CD.

Existen varios ejemplos biológicos en el cuerpo humano sobre sistemas de adquisición que incorporan señales y las traducen en impulsos eléctricos. Estos sensores tienen entradas con anchos de banda limitados. Por ejemplo, podemos pensar al sistema de visión como un conversor A/D cuyo ancho de banda en la entrada le permite ingresar longitudes de onda luminosas. Así también el sistema de audición tiene en su entrada límites frecuenciales de discriminación que le impiden escuchar frecuencias fuera del rango 20-20000Hz. Podemos pensar a estos sistemas como transductores cuyas entradas son sensibles a un rango de frecuencia limitado.

Aliasing

Observemos en la figura 9.6 qué sucedería si elegimos como frecuencia de muestreo exactamente la frecuencia de Nyquist.

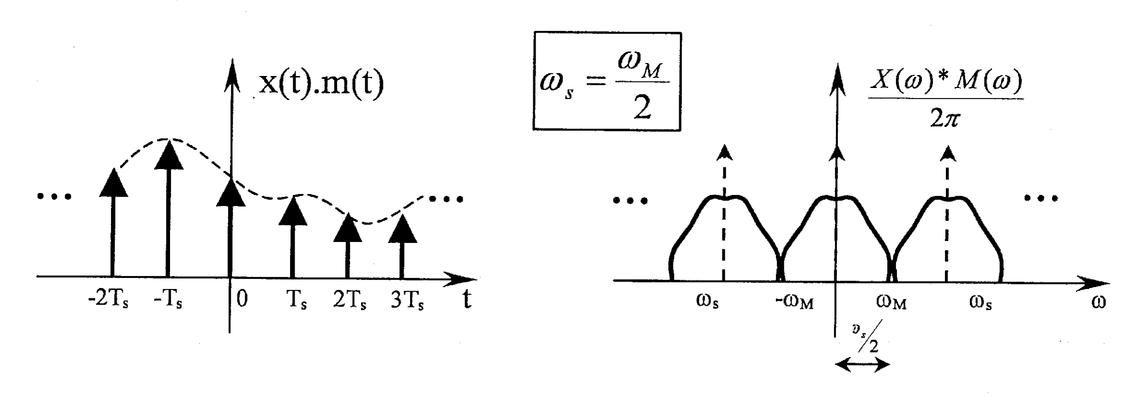


Figura 9.6: Efecto del muestreo a la frecuencia de Nyquist.

Elegir exactamente esta frecuencia límite no es aconsejable. Normalmente y como medida de prevención, se toma una banda de protección que depende de la aplicación específica. Como ya se mencionó, incrementar la frecuencia de muestreo en forma desproporcionada no trae ningún beneficio sobre la calidad de la señal digital y por el contrario incrementa enormemente el número de muestras entorpeciendo el procesamiento digital.

Finalmente veamos en la figura 9.7 qué sucede si las muestras son tomadas demasiado lento (T_s muy grande, ω_s muy pequeño):

Como el muestreo es muy lento, no se alcanzan a discriminar las variaciones temporales mas rápidas entre dos muestras sucesivas. Este efecto se observa en el espectro, donde se

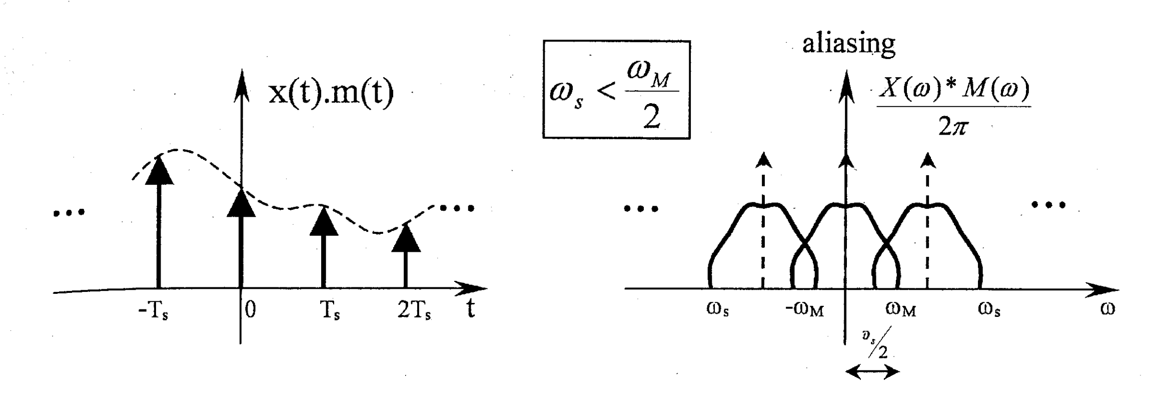


Figura 9.7: Efecto del solapamiento frecuencial (aliasing). En la realizada

produce una superposición de las zonas de alta frecuencia. En otras palabras, las muestras adquiridas ya no representan la señal original, ya que parte de la información de alta frecuencia se pierdo o más bien se distorsiona.

Las señales discretas normalizadas poseen un espectro periódico entre $\Omega = \pm\pi$. El elemento novedoso que apareció con el muestreo es el hecho de poseer una señal discreta con un espectro periódico. Este espectro, correspondiente a una señal discretizada, tiene un eje frecuencia con valores ω_s en radianes por segundo o f_s en Hertz. Para encontrar una analogía con el espectro de las señales discreteas normalizadas solo hay que realizar una regla de tres simple. Si antes las zonas de alta frecuencia eran las cercanas a $\pm\pi$, ahora serán las cercanas a $\pm f_s/2$ $(\pm\omega_s/2)$. De esta forma si llamamos a Ω la frecuencia normalizada, a f_s la frecuencia de muestreo, y a f la frecuencia real de la señal temporal en Hertz, podemos asegurar que:

$$\boxed{\Omega = 2\pi \frac{f}{f_s}}$$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 9.2.1 *Una señal temporal $x(t)$ está acotada en banda y posee una frecuencia máxima de 100Hz. Además está contaminada por un ruido de línea de 50Hz. Se desea muestrear $x(t)$. Se pide:*

1. *Confeccione un diagrama en bloques del sistema de adquisición.*
2. *Elija una frecuencia frecuencia de muestreo adecuada.*
3. *Realice un esquema del espectro de módulo de la señal en función de la frecuencia normalizada Ω.*

1. *Aprovecharemos este ejemplo para comentar algunos detalles acerca de la adquisición. Como ya se mencionó es indispensable que la señal a muestrear este acotada en banda*

o posea una frecuencia máxima. Esto no siempre es así y por lo tanto en la entrada de cualquier sistema de adquisición debe haber un filtro pasa-bajos que limite la frecuencia máxima de la entrada. Normalmente los conversores analógico/digital (A/D) tienen una frecuencia de muestreo máxima de trabajo f_{max}. El filtro en la entrada posee una frecuencia de corte f_c tal que $f_c = f_{max}/2$. Luego se coloca el muestreador como muestra la figura 9.8.

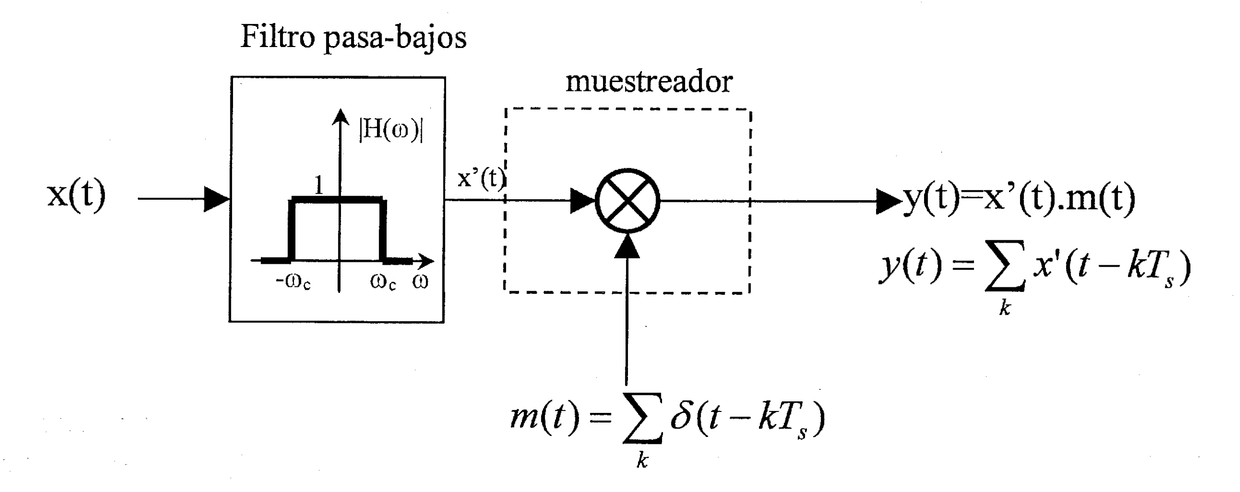


Figura 9.8: Esquema completo de un sistema de muestreo.

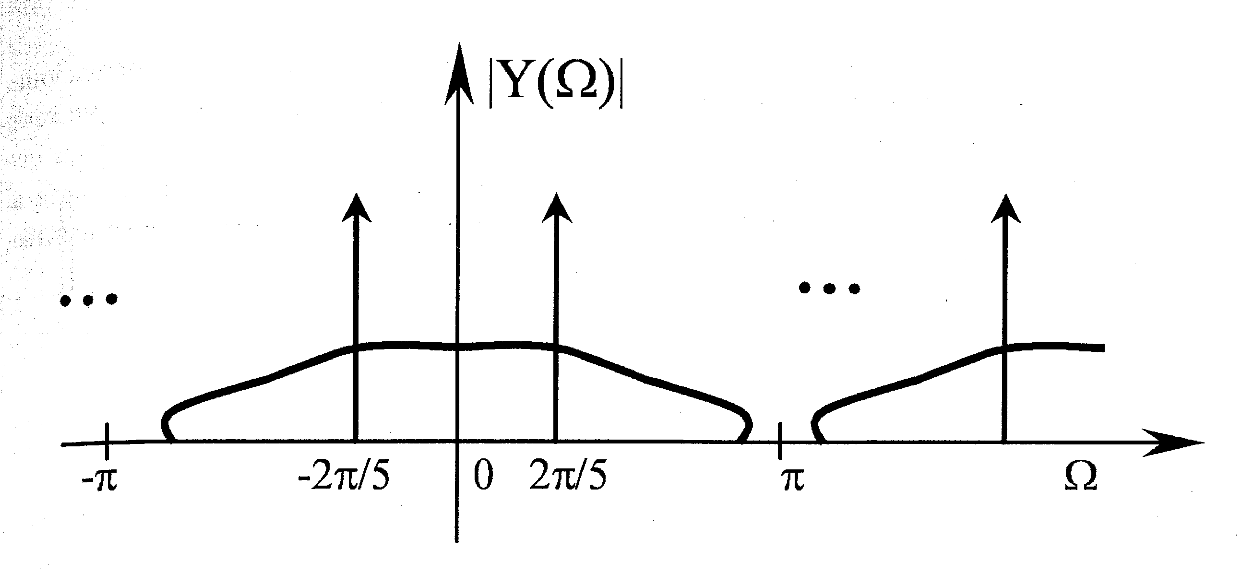
Note que al filtro pasa-bajos se lo consideró ideal. El bloque que lo describe se puede caracterizar por su respuesta en frecuencia o por su respuesta impulsional. Como con cualquier sistema LTI, la salida del sistema (filtro) es la convolución de la entrada con su respuesta impulsional ($h(t)$). Asimismo, en el campo transformado, el espectro a la salida es el producto del espectro de entrada con el $H(\omega)$.

2. *Para elegir la frecuencia de muestreo debemos tener en cuenta la frecuencia máxima de la señal de entrada. En este caso $f_M = 100Hz$, y por lo tanto la frecuencia de muestreo deberá ser, por lo menos $f_s > 200Hz$. Elegimos $f_s = 250Hz$ para tener un margen de seguridad.*

3. *Dibujemos un esquema del espectro de la señal. El único dato acerca de la forma del mismo, es el ruido de línea de 50Hz. El ruido de línea tiene forma senoidal, y por lo tanto en el espectro lo veremos como un par de deltas. En la frecuencia normalizada, estos deltas estarán ubicados en:*

$$\Omega = 2\pi\frac{f}{f_s} = 2\pi\frac{50Hz}{250Hz} = \frac{2\pi}{5}$$

de esta forma graficamos:



9.2.2. Muestreo con tren de pulsos

El muestreo mediante un tren de impulsos se ejemplificó debido a su simpleza en la interpretación, aunque en la práctica es imposible conseguir una señal de esas características. Una señal real de muestreo podría conseguirse reemplazando los deltas por pulsos rectangulares de una duración pequeña . Esto sería análogo a pensar en una llave analógica que se sierra durante un tiempo muy corto. Al utilizar un tren de pulsos angostos, conservando la frecuencia f_s, debemos definir al ciclo de actividad Δ [1] como al tiempo en que el pulso está activo con respecto al período total:

$$\boxed{\Delta = \frac{\tau}{T_s}}$$

Entonces utilicemos al tren de pulsos como señal de muestreo. Observe la figura 9.9.

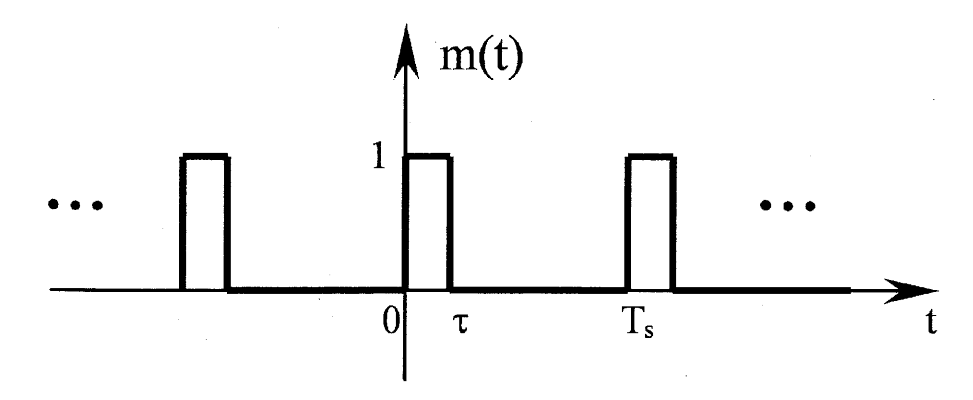


Figura 9.9: Tren de pulsos.

Al utilizar el tren de pulsos como señal de muestreo, la señal resultante ya no será discreta como en el caso del peine de deltas. Sin embargo, adelantamos que aun al muestrear con

[1] duty cycle en inglés

un tren de pulsos, el espectro de la señal continua original se conserva sin deformaciones mientras, lógicamente, se respete la frecuencia mínima de Nyquist. Es evidente que sería deseable que el ancho del pulso τ sea lo más pequeño posible, o dicho de otra forma que el ciclo de actividad sea pequeño : $\Delta \to 0$. De esta forma este caso más real tendería al caso ideal. Para entender los efectos del ciclo de actividad de los pulsos sobre el muestreo, observemos el espectro del tren de pulsos en donde $T_s = 2\tau$ en la figura 9.10.

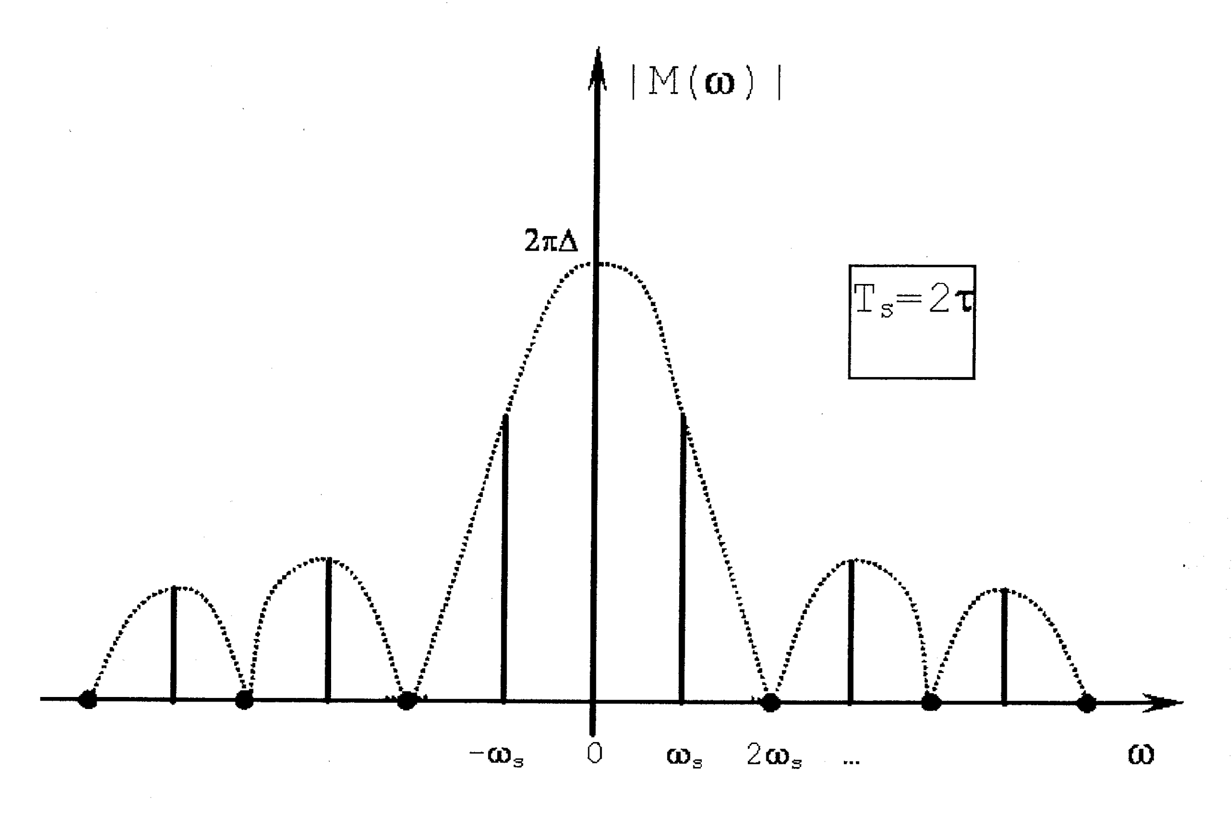


Figura 9.10: Espectro del tren de pulsos.

Al multiplicar la señal de entrada por $m(t)$ debemos convolucionar este espectro con el de la señal original. En este caso tendremos réplicas del mismo pero no de la misma amplitud. Más aun, el espectro resultante no será periódico ya que como se puede observar la señal temporal muestreada aun es continua.

A pesar de no poseer las replicas de la misma amplitud, aun así se observa que la señal muestreada posee en su espectro réplicas exactas del espectro original. De esta forma se puede asegurar la recuperación de los mismos con filtros. Finalmente, si la señal muestreada con trenes de impulso debe ser ingresada a una computadora, el conversor A/D aun debería asignar a cada pulso de amplitud variable un valor digital. Este proceso se denomina *cuantificación*. El tiempo de cuantificación suele ser una variable limitante, y en este caso observamos que se recomienda que los pulsos sean angostos. Esto impone una relación de compromiso que puede solucionarse con otro tipo de muestreo, como el que se plantea a continuación.

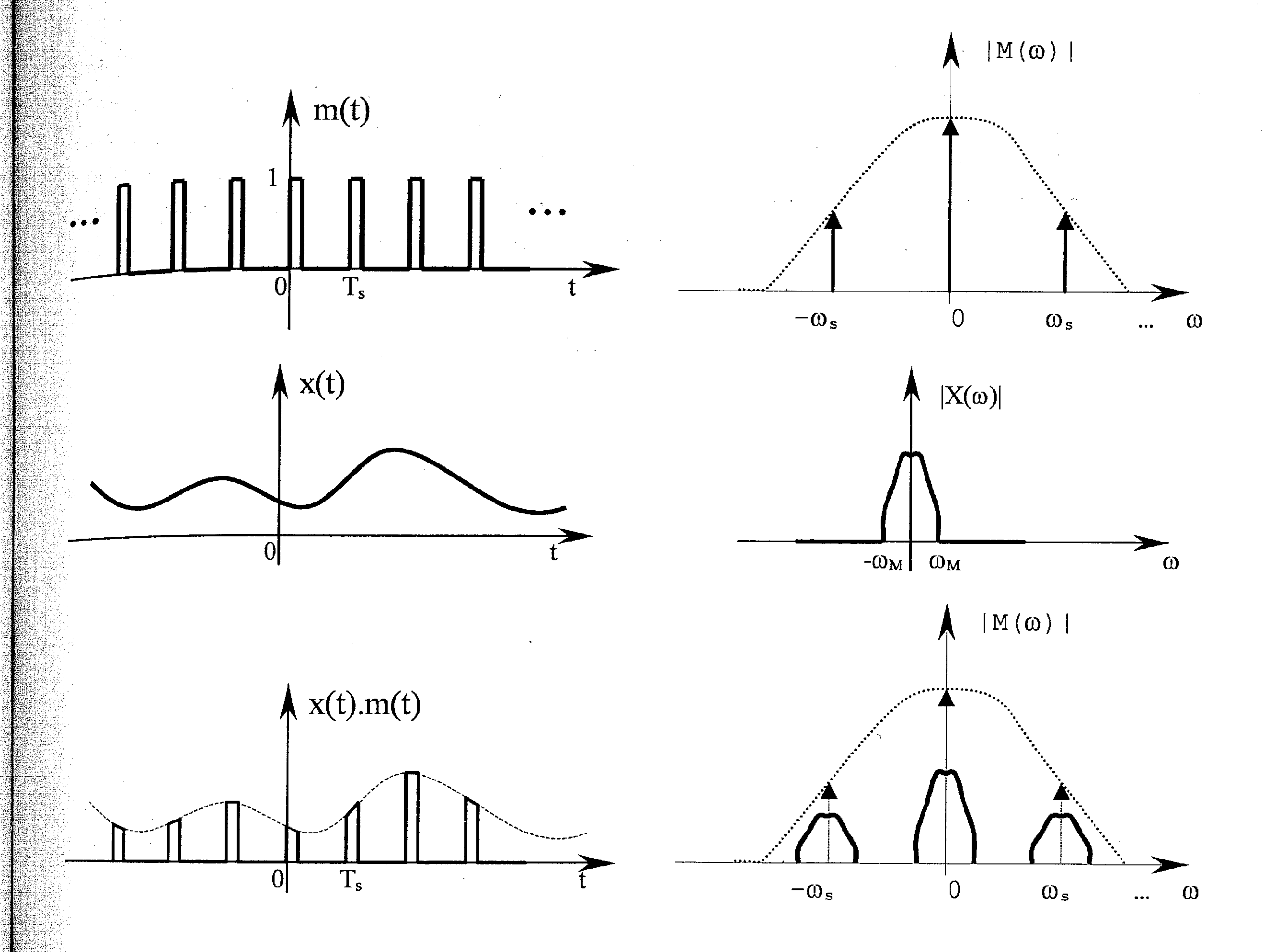


Figura 9.11: Muestreo con un tren de impulsos.

9.2.3. Muestreo con retenedor de orden cero

La idea del retenedor de orden cero radica en el siguiente concepto. Tomar un valor puntual de $x(t)$ cada T_s segundos, y *retener* ese valor hasta obtener el próximo. En el caso del apartado anterior, en el que utilizamos un tren de pulsos para muestrear, en el momento en que el pulso estaba en alto, el producto suponía que se copiaba la señal de entrada durante τ segundos. Sin embargo, el conversor debe asignar un único número a esta amplitud. En otras palabras, durante ese tiempo τ el conversor debía obtener un valor digital *promedio* para que esa muestra sea ingresada a la computadora. O sea que el caso del apartado anterior, tampoco se puede llevar a la práctica. En el caso del retenedor de orden cero, durante τ segundos se mantiene el mismo valor y se ingresa al conversor. El diagrama en bloques que permite implementar este sistema se esquematiza en la figura 9.12.

El sistema cuenta con un generador de impulsos seguido de un sistema LTI que posee como respuesta el impulso, un pulso de ancho τ. Recuerde que al aplicar un impulso a la entrada de un sistema LTI, a la salida aparece su respuesta al impulso $h(t)$. Veamos el efecto que produce este sistema sobre una señal $x(t)$ en la figura 9.13.

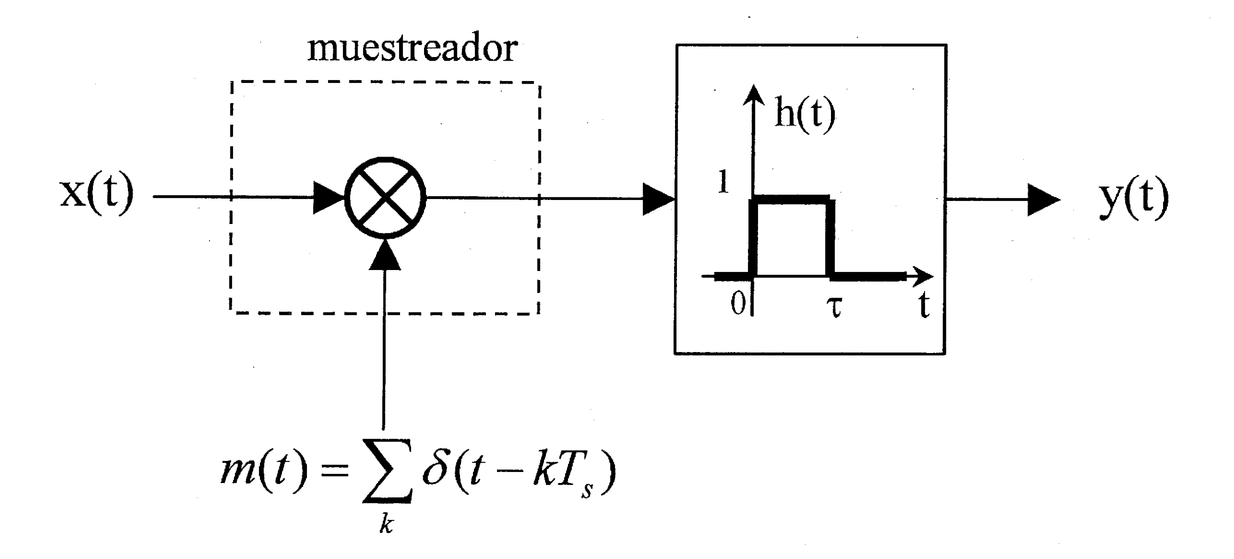


Figura 9.12: Esquema de un muestreador con retenedor de orden cero.

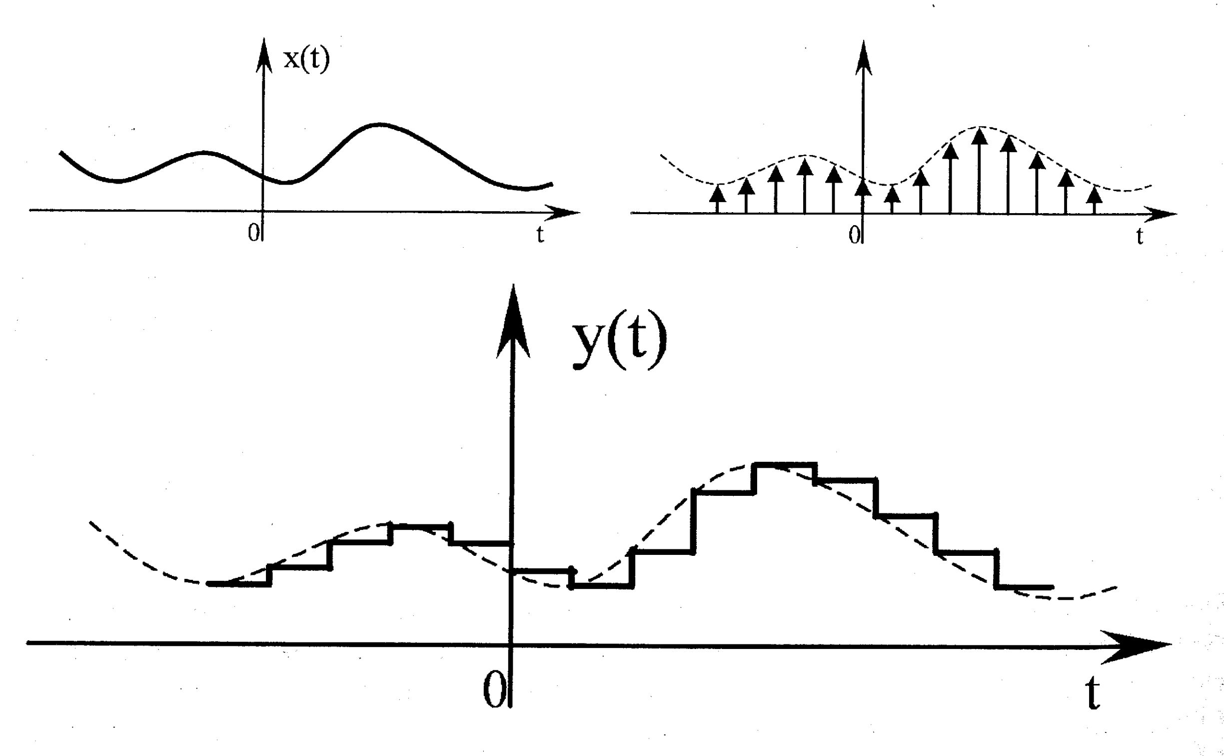


Figura 9.13: Muestreador con retenedor de orden cero.

El retenedor de orden cero es sencillo de implementar aunque sufre del siguiente inconveniente. Siguiendo el diagrama en bloques, notamos que inicialmente al multiplicar por un tren de impulsos, el espectro de la señal original se replica sin mayores problemas como vimos en 9.2.1. Sin embargo, se está colocando en cascada un sistema LTI que provoca, en el tiempo la retención de la muestra, y en frecuencia la **convolución** del espectro

periódico con la transformada de la respuesta impulsional graficada: un espectro del tipo $H(\omega) = 2e^{-i\omega\tau/2}sen(\omega\tau/2)/\omega$. Esto obviamente deforma el espectro original y debería ser corregido. Esto quiere decir que al retener un valor de amplitud constante, se está deformando la señal original y se introduce una deformación en su espectro. Como solución a este problema, se podría conectar en cascada un filtro de reconstrucción que opere en forma inversa al efecto de deformación planteado. Sería un sistema con una respuesta en frecuencia como la siguiente:

$$H_r(\omega) = \frac{e^{i\omega\tau/2}}{\frac{2sen(\omega\tau/2)}{\omega}}$$

que evidentemente cancela los efectos indeseables del retenedor de orden cero. Estos temas exceden los alcances de este libro.

9.3. Reconstrucción mediante interpolación

Una vez procesadas las muestras en la computadora (o del sistema de adquisición en general) es necesario reconstruir una señal analógica a partir de las muestras de salida. Suponemos entonces que las muestras a la salida serán entregadas a la misma frecuencia que a la entrada, es decir se conservará el período de muestreo T_s. Existen varias formas de unir o *interpolar* los puntos para formar una señal continua. Podríamos utilizar nuevamente el concepto del retenedor de orden cero, o simplemente unir cada punto con el próximo mediante una interpolación. Una interpolación de orden 1 es lineal y de orden 2 cuadrática.

Comencemos con la interpolación ideal más común, la denominada interpolación de banda limitada, que está gobernada por la función $sinc(\equiv sen(x)/x)$. El concepto fundamental es, a partir de una réplica infinita del espectro original, hacer pasar a esa señal discreta por un filtro que solo permita pasar, por ejemplo, al espectro centrado en $\omega = 0$ como muestra la figura 9.14 en línea punteada.

Un sistema con esa respuesta en frecuencia es denominado filtro pasa-bajos ideal. La elección de la frecuencia de corte de ese filtro es crítica y, como se muestra en la figura, su valor ronda $f_c = f_s/2$. Es evidente que, como ya mencionamos, debe tomarse algún margen al elegir la frecuencia de muestreo, y que esta no sea exactamente el doble de la frecuencia máxima. Este margen es el que permite que el filtro de reconstrucción posea menos restricciones y, en la práctica, sea más económico. Los filtros analógicos con bandas de corte muy abruptas requieren normalmente mayor cantidad de componentes electrónicos. Si las bandas de paso deben ser muy agudas (el caso ideal es el que se muestra en la figura 9.14), el filtro resulta mas sofisticado. Debe recordarse que este filtro debe ser implementado en un circuito analógico. Un ejemplo de filtro analógico elemental es el analizado en el circuito R-C, donde se ve claramente en su respuesta en frecuencia que el pasaje entre las bandas de paso y de atenuación (selectividad) es gradual.

Volviendo al caso ideal, la respuesta impulsional de este filtro es una *sinc*. Recordemos

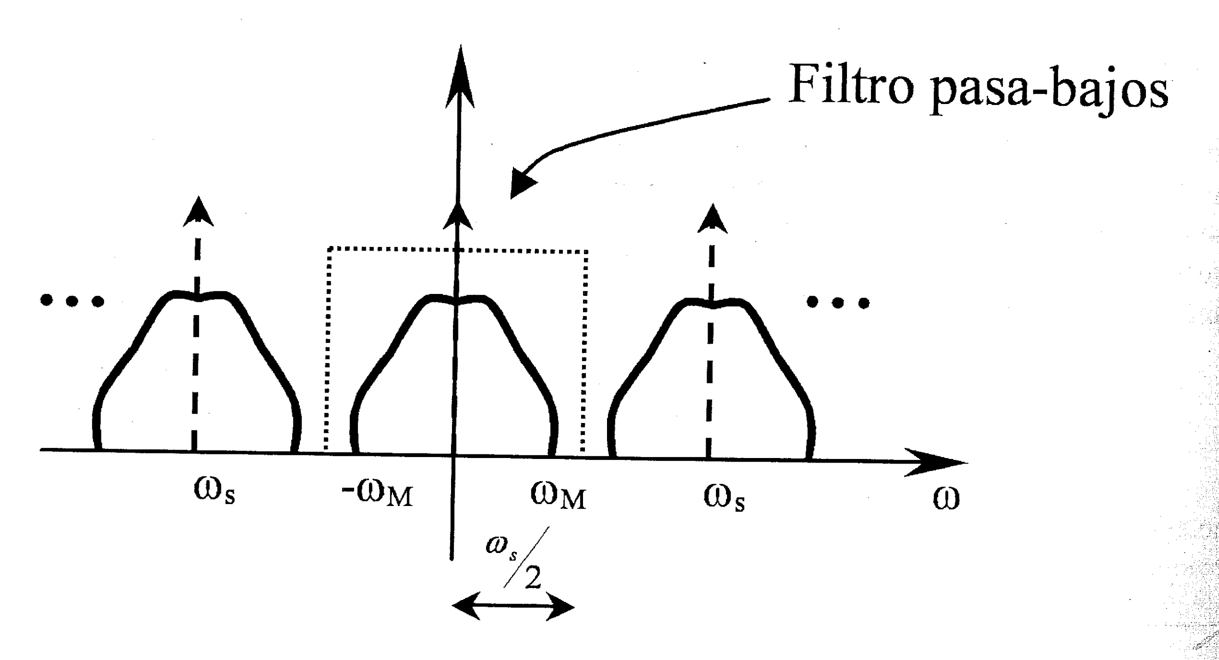
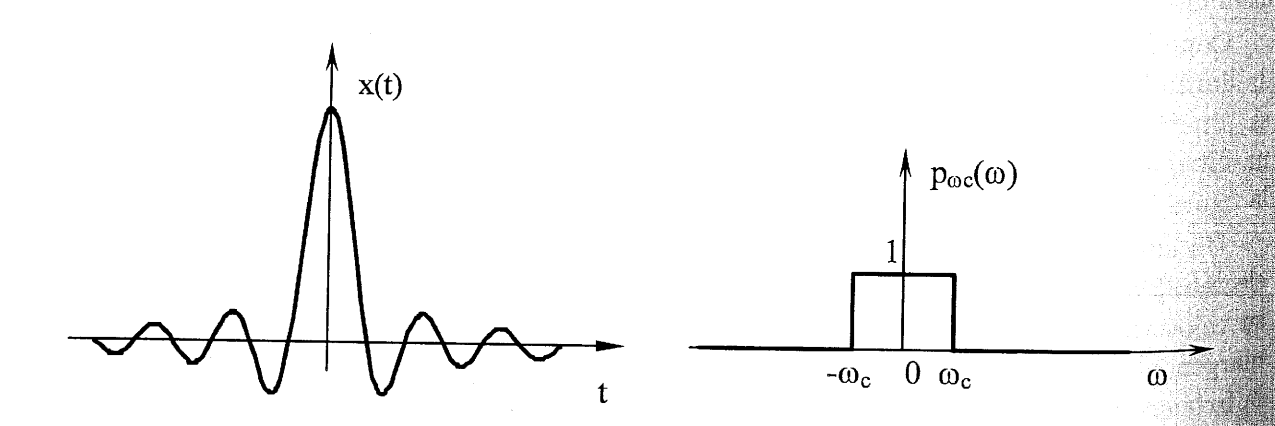


Figura 9.14: Interpolación de banda limitada.

la siguiente relación:

$$\frac{sen(\omega_c t)}{\pi t} \longrightarrow p_{\omega_c}(\omega)$$



Aclaremos además que este filtro de construcción es ideal, y por lo tanto su respuesta al impulso no causal es irrealizable en la práctica. Existe un gran número de filtros pasa bajos reales que pueden cumplir perfectamente los requerimientos impuestos, sin embargo es conocido el interpolador del tipo *sinc* debido a su contenido teórico. La convolución de los deltas que representan las muestras con la función *sinc* genera a la salida la reconstrucción perfecta y recuperación del espectro original. El diseño de filtros de recuperación y conversión D/A está fuera de los límites del presente texto.

9.4. Resumen del capítulo

En este capítulo se trató el tema de muestreo desde un punto de vista teórico. Se afianzaron conceptos acerca de la forma y características de los espectros de señales discretas y continuas. Asimismo introdujimos un nuevo tipo de señales que complementan a las ya analizada: las señales muestreadas o discretizadas. Estas últimas son señales compuestas por deltas en el tiempo continuo, pero su espectro es periódico como el de las señales discretas. El espectro ahora tiene un período f_s que depende de la frecuencia de muestreo.

Presentamos además el esquema de un sistema básico de adquisición y comentamos, en un ejemplo, sus principales bloques constitutivos. Finalmente estudiamos las posibilidades de reconstrucción de la señal discreta en una señal analógica (continua) mediante el uso de la interpolación con un filtro pasa-bajos.

9.5. Problemas propuestos

1. Una señal continua $x(t)$ fue muestreada, según el teorema de muestreo, a una frecuencia de Nyquist f_s. Indique para cada caso cuál debe ser la frecuencia de muestreo para discretizar las siguientes señales:

   a) $\frac{dx(t)}{dt}$.

   b) $x(2t)$.

   c) $x(t/3)$.

   d) $x^2(t)$.

   e) $x^2(2t)$.

   f) $x(t)cos(\omega_0 t)$

   g) $x(t) * x(t)$. ($*$ denota convolución).

   h) $x(t) * sen(\omega_c.t)/t$. (analizar para distintos valores de ω_c).

2. En el esquema de la figura 9.15 se intenta muestrear el producto de las señales $x_1(t).x_2(t)$.

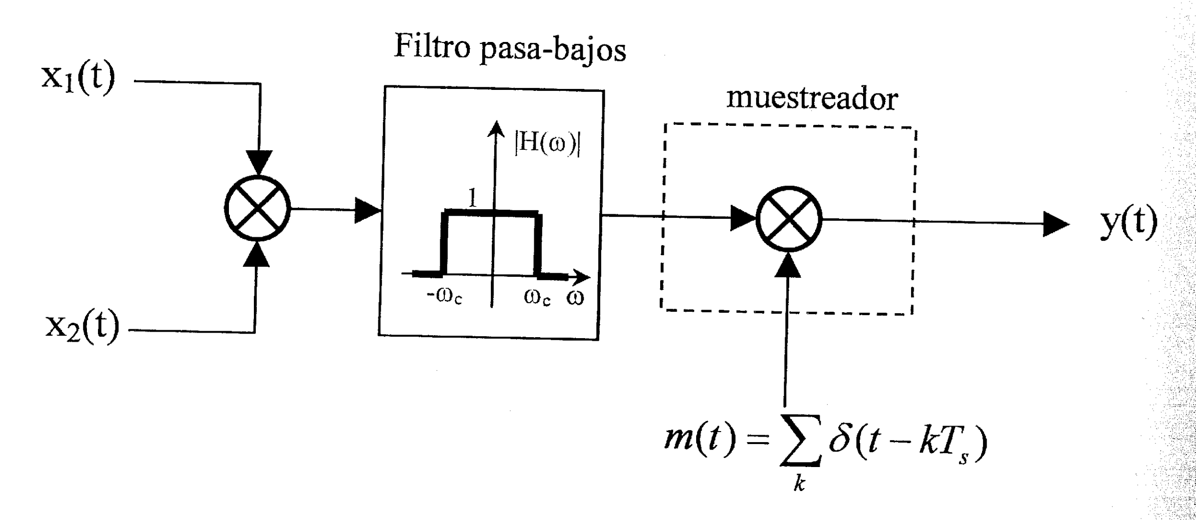


Figura 9.15: Problema de muestreo.

Ambas señales son acotadas en banda de manera que $X_1(\omega) = 0, |\omega| > \omega_1$ y $X_2(\omega) = 0, |\omega| > \omega_2$. Se pide:

a) Determine el periodo de muestreo T_s.

b) Indique la frecuencia de corte ω_c del filtro pasa-bajos en función de ω_1 y ω_2.

c) Calcule la respuesta impulsional $h(t)$ del filtro pasa-bajos ideal.

d) Realice un esquema de las señales intervinientes en cada punto del sistema.

e) Estudie los cuatro puntos anteriores si $x_1(t) = 3cos(10t)$ e $y(t) = 4sen(2t)/\pi$.

3. Se desea muestrear la siguiente señal: $x(t) = 2.cos(20\pi t) + 10.sen(13\pi t)$. Grafique el espectro de la misma e indique la frecuencia de muestreo f_s correspondiente.

4. Se desea muestrear la siguiente señal: $x(t) = 20.cos(20\pi t).sen(13\pi t)$. Grafique el espectro de la misma e indique la frecuencia de muestreo f_s correspondiente.

5. Se desea muestrear la siguiente señal: $x(t) = 10.e^{-20t}u(t)$. Grafique el espectro de la misma e indique la frecuencia de muestreo f_s correspondiente. Justifique su respuesta adoptando un criterio razonable.

6. Se desea muestrear la siguiente señal: $x(t) = sen(100t + \pi/2)/t$. Grafique el espectro de la misma e indique la frecuencia de muestreo f_s correspondiente.

7. Se desea muestrear la siguiente señal: $x(t) = 10.e^{-a.t^2}$. Calcule y grafique el espectro de la misma e indique la frecuencia de muestreo f_s elegida. Justifique su respuesta adoptando un criterio razonable.

Capítulo 10

Transformada de Laplace

Laplace, Pierre Simon (1749-1827), astrónomo francés conocido principalmente por su exitosa aplicación de la teoría de gravitación de Newton a la descripción del movimiento planetario en el sistema solar. Laplace probó que los movimientos planetarios son estables y que las perturbaciones producidas por la influencia entre ellos o por cuerpos externos (cometas) son solo temporales. También trabajó a nivel teórico en probabilidad y desarrolló la transformada que lleva su nombre y analizaremos en el presente capítulo.

10.1. Introducción

En los dos capítulos de análisis de Fourier centramos nuestra atención en el estudio de la respuesta en frecuencia de sistemas continuos y discretos. Mencionamos oportunamente, que la transformada de Fourier presenta algunas limitaciones. En primer lugar limita su análisis a señales con energía finita; esto no permite por ejemplo el cálculo de la transformada de $f(t) = t^2u(t)$. En segundo lugar notamos que al resolver ecuaciones diferenciales las condiciones iniciales no intervienen en ningún momento al aplicar la transformada en ambos miembros. Esto es una consecuencia directa del hecho que la transformada de Fourier estudia a los sistemas en *régimen permanente.*

La transformada de Laplace tiene propiedades similares a las de Fourier pero presenta varias ventajas adicionales: Permite transformar un conjunto más grande de funciones (menos limitaciones de convergencia), permite calcular transitorios (tiene en cuenta las condiciones iniciales) y además brinda un enfoque operativo tan novedoso que su utilización es casi exclusiva en muchas áreas de la ingeniería. Este nuevo enfoque se basa en el hecho que la transformada se representa en un plano complejo de variable "$s = \sigma + i.\omega$"donde encontraremos una configuración de polos y ceros que permitirá un análisis rápido cuantitativo y cualitativo de la función temporal y frecuencial. En lugar de analizar solamente la respuesta en frecuencia del sistema, esta nueva transformada ampliará este análisis y permitirá hallar además la función transferencia del sistema. La transformada de Laplace se aplicará exclusivamente a sistemas continuos. Su contraparte discreta se analizará en el próximo capítulo con la transformada Z.

10.2. Definición de la transformada

Comenzaremos directamente con la definición de la transformada de Laplace.

Definición 10.2.1 *Sea $x(t)$ una función continua, exponencialmente acotada, su transformada de Laplace se calcula como:*

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt} \qquad (10.1)$$

donde $s \in \mathbb{C}$ y $s = \sigma + i.\omega$. Esta transformada se denomina bilateral y su nomenclatura clásica será:

$$x(t) \longrightarrow X(s)$$

La transformada de una señal temporal da como resultado una función de variable compleja $X(s)$. Al conjunto de puntos del plano complejo para el cual la transformada es convergente (la integral (10.1) es distinta de infinito) se lo denomina región de convergencia (ROC). La transformada queda determinada absolutamente mediante la función de variable compleja $X(s)$ y la región de convergencia correspondiente. Veamos dos ejemplos para introducir el tema:

Ejemplo 10.2.1 *Calcular la transformada de Laplace de la exponencial decreciente $f(t) = e^{-at}u(t)$ con $a > 0$.*

Utilicemos (10.1), donde el límite inferior se coloca en cero debido al $u(t)$:

$$X(s) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = \left.\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

donde se utilizó, para el caso en que $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} = 0$$

Esto sucede si

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(s+a)t} = \lim_{t\to\infty} e^{-(\sigma+a)t}e^{-i\omega t} = 0$$

por lo tanto concluimos en que $Re\{s\} = \sigma > -a$ para que la exponencial tienda a cero (recuerde que $e^{-i\omega t} = cos(\omega t) - i.sen(\omega t)$).

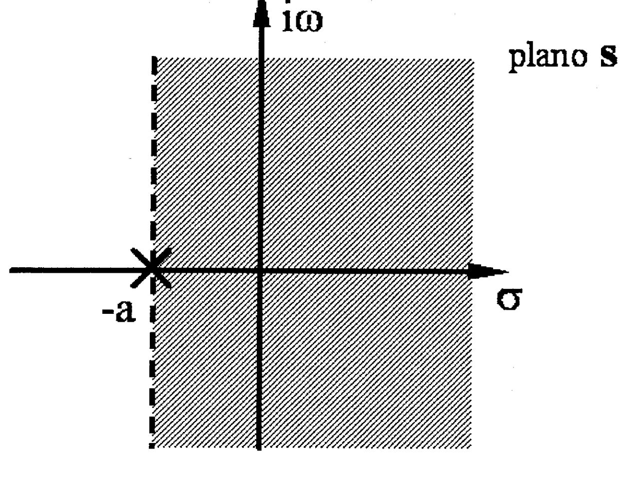


Figura 10.1: Región de convergencia de la función $e^{-at}u(t), a > 0$.

Finalmente

$$e^{-at}u(t), a > 0 \longrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \sigma > -a$$

Reconocemos que $X(s)$ posee un polo en $s = -a$ de orden uno y graficamos la ROC como muestra la figura 10.1.

Esto implica que la transformada es convergente solo para los valores de $\sigma > -a$ pertenecientes a la ROC. Como puede observarse, la ROC quedó determinada por una recta vertical, paralela al eje imaginario $i\omega$.

Ejemplo 10.2.2 *Calcular la transformada de Laplace de la exponencial creciente $f(t) = -e^{-at}u(-t)$ con $a > 0$. Esta exponencial es creciente y va en sentido contrario a la del ejemplo anterior.*

Utilicemos (10.1), donde el límite superior se coloca en cero debido al $u(-t)$:

$$X(s) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-at}e^{-st}dt = \int_{0}^{-\infty} e^{-(s+a)t}dt = \left.\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_{0}^{-\infty} = \frac{1}{s+a}$$

donde se utilizó, para el caso en que $t \to -\infty$:

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} = 0$$

Esto sucede si

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-(s+a)t} = \lim_{t\to-\infty} e^{-(\sigma+a)t}e^{-i\omega t} = 0$$

por lo tanto concluimos en que $Re\{s\} = \sigma < -a$ para que la exponencial tienda a cero.

Finalmente

$$-e^{-at}u(-t), a < 0 \longrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \sigma < -a$$

Reconocemos que la función compleja $X(s)$ es la misma que en el caso anterior, sin embargo la ROC es diferente como muestra la figura 10.2.

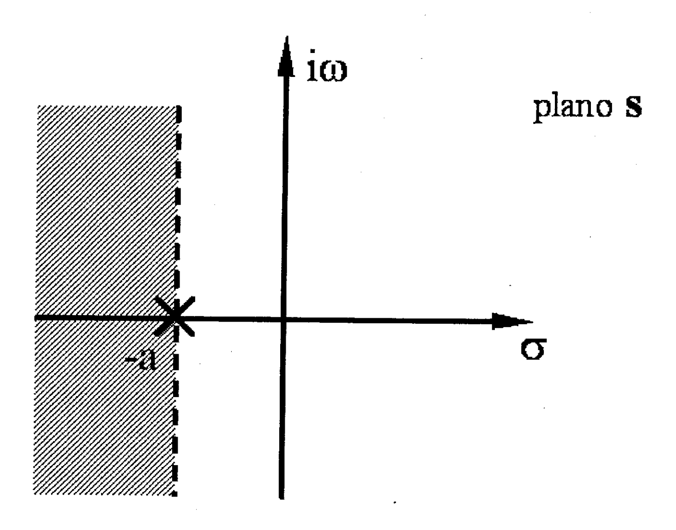


Figura 10.2: Región de convergencia de $e^{-at}u(-t), a < 0$.

Confirmamos que la transformada requiere tanto de la función como de la región de convergencia para identificar la señal temporal que representa. Note que la función temporal es una exponencial no causal creciente y no posee energía finita, sin embargo la transformada existe, siempre y cuando los valores de s estén dentro de la ROC.

10.3. Propiedades de la ROC

Para hallar la ROC se pueden utilizar dos métodos. El primero es el utilizado en los ejemplos anteriores, donde se analizó para cada caso, los valores de σ para los cuales la integral resultó convergente. El segundo es calcular la transformada $X(s)$ suponiendo que en los límites para infinito son cero y aplicar posteriormente las propiedades de la ROC que detallaremos a continuación:

1. Las ROC están siempre limitadas por rectas verticales donde σ es constante.

2. La ROC no contiene polos. Esto es una consecuencia directa de la definición de polo. Como la ROC son los valores de s para los cuales la integral converge, evidentemente sobre el polo esto no sucede. Note que para los 2 ejemplos anteriores, la línea vertical punteada indicaba que ni siquiera sobre el polo la función era convergente.

3. Si $x(t)$ es una señal de duración finita ($x(t) = 0, t_2 > t > t_1, t_1 < t_2$) entonces la ROC es todo el plano s exceptuando posiblemente $s = 0$ o $s = \infty$. Intuitivamente, y observando la definición de la integral, podemos decir que para calcular la transformada de $x(t)$, multiplicamos a la función por una exponencial $e^{-\sigma t}$, y ese producto debe generar área finita para que la integral exista. Como vemos, las ROC siempre van a estar limitadas por rectas verticales impuestas por el valor de σ. Si la señal es de duración finita tiene energía finita, no importa el valor que se le de a σ, el área seguirá siendo finita , y por lo tanto la ROC será todo el plano.

4. Si $x(t)$ es una señal derecha ($x(t) = 0, t < t_1$) entonces la ROC es del tipo $\sigma > \sigma_0$, donde el σ_0 es la parte real del polo que más a la derecha exista. Si para algún valor σ_0 la integral converge, seguro que al tomar un valor $\sigma_1 > \sigma_0$, la exponencial será aún más decreciente y el área total será finita. Como la ROC no posee polos, el valor mínimo que puede adoptar σ es σ_0.

5. Si $x(t)$ es una señal izquierda ($x(t) = 0, t > t_1$) entonces la ROC es del tipo $\sigma < \sigma_0$, donde el σ_0 es la parte real del polo que más a la izquierda exista.

6. Si $x(t)$ es una señal bilateral (duración infinita) la ROC es del tipo $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ donde σ_1 y σ_2 son la parte real de dos polos de $X(s)$. De esta manera la ROC es una *cinta* vertical en el plano s. Una señal bilateral se puede descomponer en una señal derecha más otra izquierda. De esta manera, y por linealidad, la intersección de las ROC puede conformar una cinta.

10.4. Relación entre la Transformada de Fourier y la de Laplace

Comenzamos deliberadamente describiendo la transformada de Laplace directamente desde su definición y mostrando dos ejemplos concretos. Esto ahora nos permite ver como podemos relacionarla con la transformada de Fourier. Como $s = \sigma + i\omega$, escribamos la ecuación (10.1) de la siguiente forma:

$$X(s) = X(\sigma + i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(t)e^{-\sigma t}}_{x_1(t)} e^{-i\omega t}dt = X_1(\omega)$$

Vemos que la transformada de Laplace de $x(t)$ no es más que la transformada de Fourier de la función multiplicada por una exponencial: $x(t)e^{-\sigma t}$. Esta exponencial tiene la variable σ como parámetro que permite que la integral sea convergente, aun para funciones $x(t)$, que no posean energía finita. Remarquemos que en la definición de la transformada mencionamos que las funciones deben ser *exponencialmente acotadas* para que posean transformada. Esto

implica que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}dt < \infty$$

Esto le permite a la transformada de Laplace incorporar una gran cantidad de funciones más que la de Fourier.

Note además que si colocamos $\sigma = 0$ en la definición de Laplace

$$X(s)\Big|_{\sigma=0} = X(\sigma + i\omega)\Big|_{\sigma=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt = X(\omega)$$

La transformada de Fourier es la transformada de Laplace cuando $\sigma = 0$. Los punto del plano s para los cuales $\sigma = 0$ se encuentran sobre el eje $i\omega$. Si la región de convergencia abarca al eje $i\omega$, esto implica que reemplazando s por $i\omega$, la transformada de Laplace es la de Fourier. Si el eje no pertenece a la ROC, la función no posee transformada de Fourier aunque si de Laplace.

Ejemplo 10.4.1 *Calcular la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-at}u(t)$ con $a > 0$ utilizando la transformada de Laplace del ejemplo (10.2.1).*

Reescribimos la transformada hallada:

$$e^{-at}u(t), a > 0 \longrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \sigma > -a$$

Como el eje $i\omega$ está incluido en la ROC, en donde para el valor $\sigma = 0$ la integral converge y por lo tanto la transformada de Fourier es simplemente:

$$e^{-at}u(t), a > 0 \longrightarrow \frac{1}{i\omega + a}$$

donde se reemplazó $s = i\omega$.

10.5. La transformada inversa de Laplace

Hasta el momento, la transformada de Laplace nos permite transformar señales temporales en funciones de variable compleja. Esas funciones serán, en la práctica, cocientes entre polinomios. Como con cualquier función de variable compleja, la misma puede ser representada en un diagrama de polos y ceros. A partir de este momento debemos acostumbrarnos a visualizar las señales temporales, con su equivalente en polos y ceros. Es decir, así como la

transformada de Fourier nos permite visualizar sencillamente el espectro de una señal y en qué bandas de frecuencia se encuentra concentrada su energía, la transformada de Laplace nos brindará esta y otra información adicional conociendo el diagrama de polos y ceros.

Para que la transformada sea operativa, debemos hallar un método simple de regresar desde la función de variable compleja al tiempo. La transformada inversa permite, teniendo $X(s)$ y su región de convergencia, obtener la $x(t)$. Para antitransformar se dispone comúnmente de tres métodos. El primero es la fórmula de inversión compleja. Definamos entonces:

Definición 10.5.1 *Fórmula de inversión compleja:*

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s)e^{st}ds \quad x(t<0)=0} \tag{10.2}$$

donde el valor de σ debe tomarse de manera tal que la línea vertical de integración esté a la derecha de todos los polos. Esta integral se puede realizar utilizando el teorema de los residuos.

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Por la definición de la transformada de Laplace, y utilizando una función $x(t)=0, t<0$ tenemos

$$X(s) = \int_{u=0}^{\infty} x(u)e^{-su}du$$

donde utilizamos u en vez de t por conveniencia. Ahora, utilizando la ecuación (10.2),

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s=\sigma-iT}^{\sigma+iT} X(s)e^{st}ds = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s=\sigma-iT}^{\sigma+iT}\int_{u=0}^{\infty} x(u)e^{st-su}du.ds$$

haciendo $s=\sigma+i\omega$, $ds=i.d\omega$, y reemplazando

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}e^{\sigma t}\int_{\omega=-T}^{T} e^{i\omega t}\underbrace{\int_{u=0}^{\infty} x(u)e^{-\sigma u}e^{-i\omega u}du}_{X(\omega+\sigma)}.d\omega = \frac{1}{2\pi}e^{\sigma t}2\pi e^{-\sigma t}x(t) = x(t)$$

donde se utilizaron las propiedades de desplazamiento de la transformada de Fourier.

($\Longleftarrow$)

Vemos que para obtener $x(t)$ debemos resolver una integral compleja. En este caso el resultado de la integral no será un número, sino que quedará en función de t debido al término e^{st}. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 10.5.1 *Encuentre la antitransformada de :*

$$X(s) = \frac{s-2}{(s+3)(s+2)} \quad \sigma > -2$$

Realicemos primero el diagrama de polos y ceros en la figura 10.3.

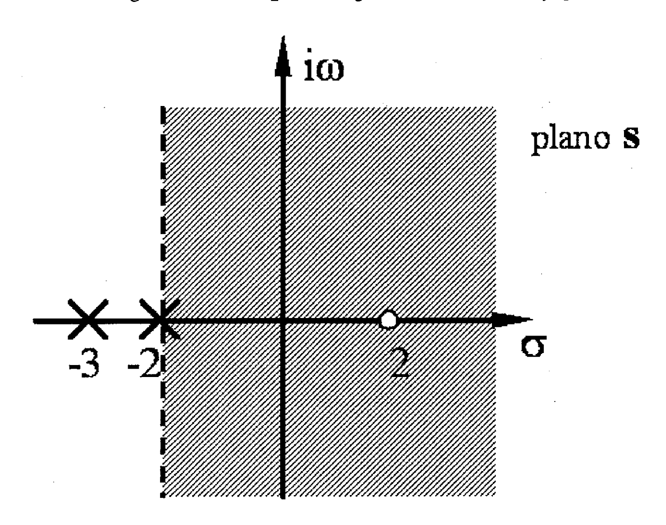


Figura 10.3: Diagrama de polos y ceros

Recordemos que la transformada de una exponencial es

$$e^{-at}u(t), a < 0 \longrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \sigma > -a$$

Por lo tanto observamos del diagrama que $x(t)$ debe poseer las componentes e^{-3t} y e^{-2t} con alguna posible modificación en sus amplitudes. Además como la ROC es derecha, sabemos que $x(t)$ debe ser derecha.

Calculemos la integral por residuos:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{s-2}{(s+3)(s+2)} e^{st} ds = Res_{-2} + Res_{-3}$$

$$Res_{-2} = \lim_{s \to -2} \frac{(s-2)e^{st}}{(s+3)(s+2)}(s+2) = -4e^{-2t}$$

$$Res_{-3} = \lim_{s \to -3} \frac{(s-2)e^{st}}{(s+3)(s+2)}(s+3) = 5e^{-3t}$$

Como la fórmula de inversión compleja impone $x(t) = 0, t < 0$ y la señal debe ser derecha, concluimos en:

$$x(t) = -4e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t)$$

El método ofrece además una ventaja adicional. Si la función $X(s)$ tuviera polos complejos conjugados:

Los residuos en los polos complejos conjugados, son conjugados.
Esto simplifica la cantidad de residuos a calcular.

Existen otras dos formas alternativas de antitransformar. La primera se basa en hacer uso de las tablas tabuladas. Este método es fácil y rápido ya que las tablas poseen cientos de funciones tabuladas.

La segunda es, suponiendo que $X(s)$ posee un numerador y un denominador racional:

$$X(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)} \qquad n < m$$

descomponer a $X(s)$ por fracciones parciales y antitransforma cada fracción por simple inspección. Dentro de las posibles fracciones resultantes se encuentran los siguientes casos típicos:

$$\begin{aligned} e^{-at}u(t), a > 0 &\longrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad \sigma > -a \\ te^{-at}u(t), a > 0 &\longrightarrow \frac{1}{(s+a)^2} \qquad \sigma > -a \\ sen(\omega_0 t)u(t) &\longrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \qquad \sigma > 0 \\ cos(\omega_0 t)u(t) &\longrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \qquad \sigma > 0 \end{aligned}$$

que se pueden demostrar sencillamente mediante propiedades.
Veamos cómo resolver un ejemplo por fracciones simples.

Ejemplo 10.5.2 *Encuentre la antitransformada de :*

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s+1)} \qquad \sigma > 0$$

utilizando el método de las fracciones simples.

Realizamos el diagrama de polos y ceros en la figura 10.4.

Para separar en fracciones simples recuerde que por cada polo simple aparece una fracción, en el caso de haber un polo múltiple, debe aparecer una fracción por cada orden (si es por ejemplo de orden 3, debe aparecer el polo simple en una fracción, en otra el polo doble

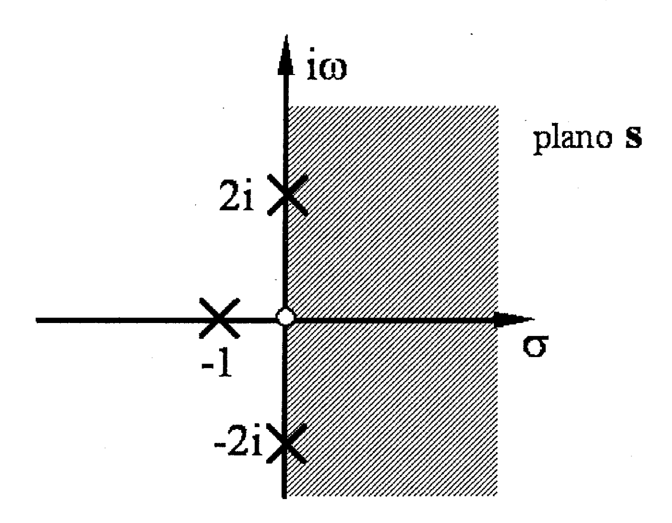


Figura 10.4: Diagrama de polos y ceros

y por último el polo triple). En el caso de aparecer polos complejos conjugados, debemos colocar una fracción pero cuyo numerador sea:

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s+1)} = \frac{As+B}{(s^2+4)} + \frac{C}{s+1}$$

Hallando los valores de A, B y C obtenemos:

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s+1)} = \frac{2s+8}{5(s^2+4)} - \frac{1}{5(s+1)}$$

por lo tanto, descomponiendo la primer fracción en dos y observando los ejemplos típicos brindados:

$$x(t) = \frac{2}{5}cos(2t)u(t) + \frac{4}{5}sen(2t)u(t) - \frac{1}{5}e^{-t}u(t)$$

Se aconseja al lector resolver este ejemplo por residuos para comprobar el resultado.

10.6. Propiedades

Para hallar la transformada se utilizan comúnmente las propiedades ya que facilitan mucho los cálculos. Para la presente sección utilizaremos las funciones $x(t), x_1(t)$ y $x_2(t)$ con sus transformadas respectivas $X(s), X_1(s)$ y $X_2(s)$, con la nomenclatura clásica: $x(t) \longrightarrow X(s)$. Solo se incluirá la demostración en las propiedades que difieran a las demostradas para la transformada de Fourier.

10.6.1. Linealidad

Sean α y β dos escalares cualesquiera, entonces:

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow \alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$$

Aplicaremos esta propiedad en una gran cantidad de casos.

10.6.2. Desplazamiento temporal

$$x(t - t_0) \longrightarrow e^{-st_0} X(s)$$

Remarquemos que al desplazar la señal temporal, el diagrama de polos y ceros no varía (los polos y los ceros se mantienen inmóviles), por lo tanto la ROC no se altera.

Ejemplo 10.6.1 *Calcule la transformada de* $x(t) = e^{-2(t-4)}u(t-4)$.
Utilizando la siguiente transformada:

$$e^{-at}u(t), a > 0 \longrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \sigma > -a$$

calculamos para $a = 2$*:*

$$e^{-2t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s+2} \quad \sigma > -2$$

y si aplicamos la propiedad de desplazamiento con $t_0 = 1$ *concluimos:*

$$e^{-2(t-4)}u(t-4) \longrightarrow \frac{e^{-4s}}{s+2} \quad \sigma > -2$$

10.6.3. Desplazamiento en s

$$e^{s_0 t}x(t) \longrightarrow X(s - s_0) \quad \sigma > s_0$$

donde además vemos que la ROC se desplaza $Re\{s_0\}$.

Ejemplo 10.6.2 *Calcule la transformada de $x(t) = u(t)$. Luego calcule la transformada de $x(t) = e^{-3t}u(t)$, $x(t) = cos(\omega_0 t)u(t)$ y de $x(t) = sen(\omega_0 t)u(t)$.*

Utilizando la definición (10.1) y reemplazando $x(t) = 1, t > 0$:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} 1.e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

y como $x(t)$ es una señal derecha y $X(s)$ posee un polo en el origen, la ROC es $\sigma > 0$. Observe el diagrama de polos y ceros en la figura 10.5.

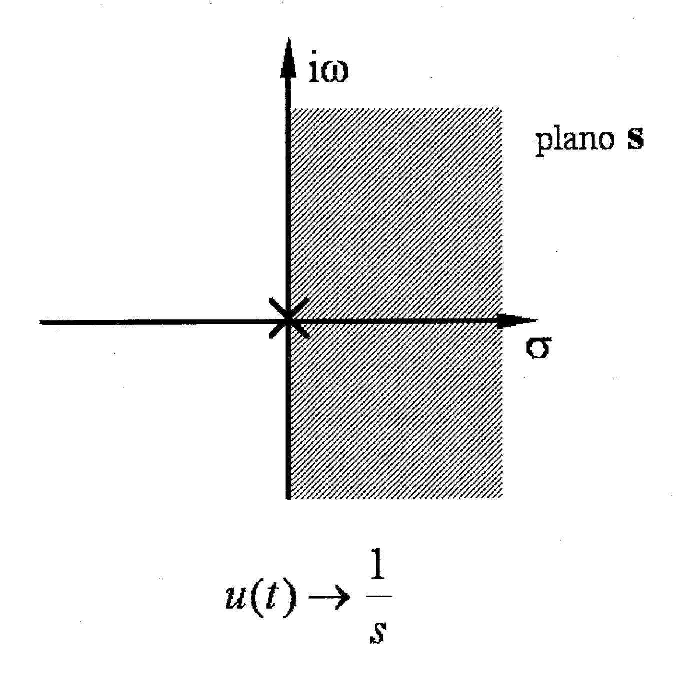


Figura 10.5: Diagrama de polos y ceros

Si ahora aplicamos la propiedad de desplazamiento temporal:

$$u(t) \longrightarrow \frac{1}{s} \quad \sigma > 0$$
$$e^{-3t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s+3} \quad \sigma > -3$$

Para la transformada del seno o del coseno, los descomponemos como suma de exponenciales complejas:

$$cos(\omega_0 t)u(t) = \frac{e^{i\omega_0 t}}{2}u(t) + \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2}u(t)$$
$$sen(\omega_0 t)u(t) = \frac{e^{i\omega_0 t}}{2i}u(t) - \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2i}u(t)$$

y utilizando la propiedad vemos que:

$$e^{i\omega_0 t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s+i\omega_0} \quad \sigma > 0$$
$$e^{-i\omega_0 t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s-i\omega_0} \quad \sigma > 0$$

por lo tanto, y por linealidad,

$$\frac{e^{i\omega_0 t}}{2}u(t) + \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2}u(t) \longrightarrow \frac{1}{2(s+i\omega_0)} + \frac{1}{2(s-i\omega_0)}$$
$$cos(\omega_0 t)u(t) \longrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \quad \sigma > 0$$

análogamente, y simplificando, obtenemos

$$sen(\omega_0 t)u(t) \longrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \quad \sigma > 0$$

note que la región de convergencia no se desplazó, ya que la parte real del desplazamiento es cero ($Re\{i\omega_0\} = 0$). Veamos el diagrama de polos y ceros en la figura 10.6.

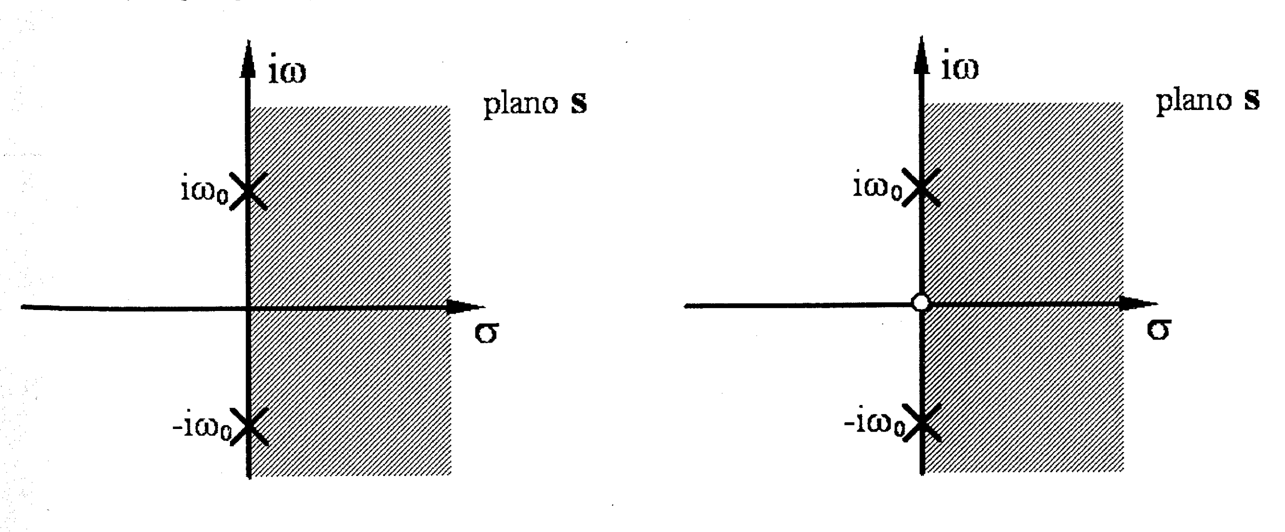


Figura 10.6: Diagrama de polos y ceros, junto con la ROC para el seno y el coseno.

Obsérvese que al aumentar la frecuencia ω_0, los polos complejos conjugados se alejan del origen y al disminuir la frecuencia tienden a cero. En el caso del coseno, el mismo posee un cero en el origen. Note que si se hace tender la frecuencia de un coseno a cero, el mismo se

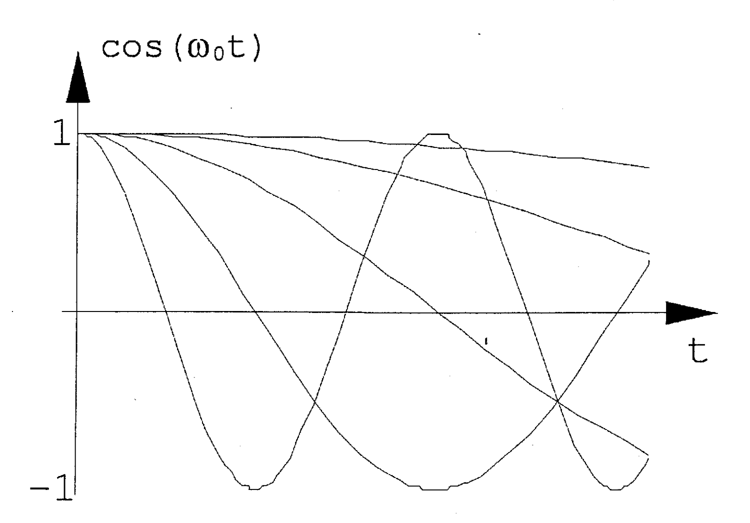


Figura 10.7: Efecto temporal de tender los polos hacia el origen.

transforma en un escalón $u(t)$. Uno de los polos se cancela con el cero, y el restante queda en el origen: $u(t) \longrightarrow 1/s \quad \sigma > 0$. Observe el efecto temporal en la figura 10.7.

Para el caso del seno, como en el diagrama no aparece un cero en el origen, al disminuir la frecuencia, obtenemos un polo doble en el origen. Un polo doble en el origen es la transformada de la función rampa, como veremos en la próxima propiedad. Es evidente que al tender la frecuencia de un seno a cero, la función tiendo a una recta $f(t) = t$.

10.6.4. Diferenciación en s

La propiedad es la siguiente:

$$-tx(t) \longrightarrow \frac{\partial X(s)}{\partial s}$$

y es muy similar a la de la transformada de Fourier. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 10.6.3 *Calcule la transformada de $t^k u(t)$ y de $t.e^{-3t}u(t)$.*

Recordamos que la transformada del escalón es:

$$u(t) \longrightarrow \frac{1}{s} \quad \sigma > 0$$

multiplicando por t (función rampa) debemos diferenciar en s y aplicar el signo negativo:

$$t.u(t) \longrightarrow \frac{1}{s^2} \quad \sigma > 0$$

generalizando

$$t^k.u(t) \longrightarrow \frac{1}{s^{k+1}} \quad \sigma > 0$$

Vemos que la transformada de la función rampa posee un polo doble en el origen.

Para el segundo caso, simplemente aplicamos la propiedad:

$$e^{-3t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s+3} \quad \sigma > -3$$

$$t.e^{-3t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{(s+3)^2} \quad \sigma > -3$$

10.6.5. Cambio de escala

$$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right) \quad ROC' = a.ROC$$

Al aplicar un cambio de escala con $a \in I\!R$, todos los polos y los ceros de alejan o se aceran al origen, comprimiendo o expandiendo la ROC.

10.6.6. Inversión temporal

Utilizando la propiedad de escala con $\alpha = -1$:

$$x(-t) \longrightarrow X(-s) \quad ROC' = -ROC$$

La ROC se espeja con respecto al eje $i\omega$.

10.6.7. Convolución

La propiedad de convolución es fundamental para el análisis de sistemas LTI. La propiedad estipula, en forma similar a la de Fourier, que

$$x_1(t) * x_2(t) \longrightarrow X_1(s)X_2(s) \quad ROC' = ROC_1 \cap ROC_2$$

donde el * implica la operación de convolución:

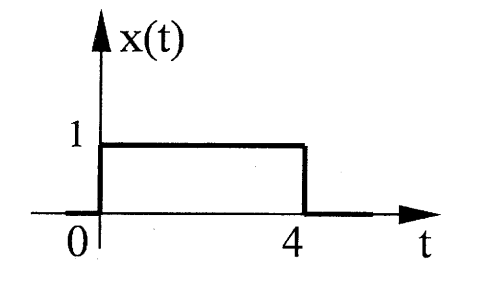
$$x_1(t) * x_2(t) \int_{\tau - \infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

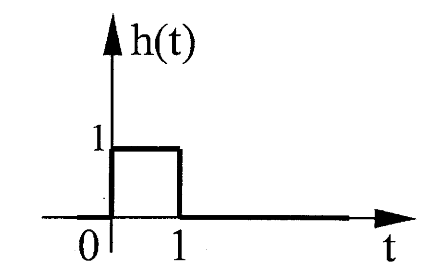
La relación temporal entre la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$, en un sistema LTI, es la convolución de la entrada y la respuesta impulsional $h(t)$ del sistema. En el plano transformado obtenemos:

$$y(t) = x(t) * h(t) \longrightarrow Y(s) = X(s)H(s)$$

Analizaremos sistemas LTI más adelante. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 10.6.4 *Calcule la convolución entre $x(t) = u(t) - u(t-4)$ y $h(t) = u(t) - u(t-1)$.*





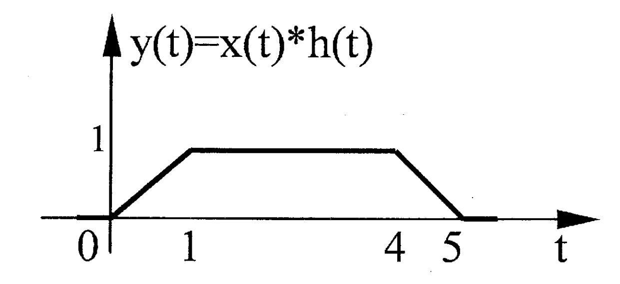


Figura 10.8: Ejemplo de convolución utilizando la transformada de Laplace

Utilicemos la propiedad de convolución. Transformemos cada una de las señales y multipliquemos sus transformadas:

$$x(t) = u(t) - u(t-4) \longrightarrow \frac{1}{s} - \frac{e^{-4s}}{s} \quad \sigma > 0$$

$$h(t) = u(t) - u(t-1) \longrightarrow \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \quad \sigma > 0$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \longrightarrow \quad Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}\right)$$

$$y(t) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-4s}}{s^2} + \frac{e^{-5s}}{s^2} \quad \sigma > 0$$

recordando que la transformada de una rampa es :

$$t.u(t) \longrightarrow \frac{1}{s^2} \quad \sigma > 0$$

y utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento temporal, antitransformamos por simple inspección:

$$y(t) = t.u(t) - (t-1).u(t-1) - (t-4).u(t-4) + (t-5).u(t-5)$$

10.6.8. Integración

Planteamos la propiedad como:

$$\int_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{1}{s}X(s)$$

Cuando derivamos en el tiempo, multiplicamos por s en el plano transformado y cuando integramos, dividimos por s. Una forma simple de probar esta propiedad es utilizando la propiedad de convolución. Note qué sucede si convolucionamos una función cualquiera $x(t)$ con un escalón $u(t)$:

$$x(t) * u(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{u(t-\tau)}_{0 \text{ si } \tau > t} d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

y con $u(t) \longrightarrow 1/s$ obtenemos

$$x(t) * u(t) \longrightarrow X(s)\frac{1}{s}$$

Veamos las relaciones entre las siguientes tres funciones: $\delta(t)$, $u(t)$ y $\rho(t) = t.u(t)$. La transformada del delta es uno:

$$\delta(t) \longrightarrow 1$$

Si integramos un delta obtenemos el escalón. Como la integración implica dividir por s, entonces:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{1}{s}$$

Si integramos ahora el escalón, obtenemos la rampa, y por lo tanto

$$\rho(t) = t.u(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{1}{s^2}$$

10.6.9. Diferenciación temporal

Esta propiedad es de suma utilidad para la resolución de ecuaciones diferenciales. Recordemos que en la transformada de Fourier, una diferenciación temporal implica multiplicar por $i\omega$, veamos qué sucede en la transformada de Laplace bilateral:

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} \longrightarrow s.X(s)$$

Podemos generalizar esta propiedad, simplemente como:

$$\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \longrightarrow s^n.X(s)$$

Aplicaremos esta propiedad más adelante para la resolución de ecuaciones diferenciales, aunque aprovecharemos una propiedad de la transformada **unilateral** de Laplace que nos permitirá incluir las condiciones iniciales.

10.7. La transformada unilateral de Laplace

Definamos la transformada unilateral de Laplace como:

Definición 10.7.1

$$\boxed{X(s) \triangleq \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt} \tag{10.3}$$

La transformada unilateral no tiene en cuenta lo que sucede con la entrada para $t < 0$. El 0^- simplemente permite que $x(t)$ posea un delta (o sus derivadas) en el origen. Si en el origen no hay ningún delta, entonces la integral entre 0^- y 0^+ es cero. Como la señal de entrada es siempre derecha (o de soporte compacto, duración finita) la ROC es siempre derecha.

Las propiedades de la transformada unilateral coinciden con las de la bilateral en la mayoría de los casos. Las diferencias aparecen en dos propiedades muy importantes que veremos a continuación.

10.7.1. Propiedad de diferenciación para la transformada unilateral

La resolución de ecuaciones diferenciales se ve facilitada utilizando la propiedad de derivación de la transformada de Laplace, ya que convierte a las derivadas en productos y permite despejar algebraicamente la función deseada. Como vimos en la transformada de Fourier y en la transformada bilateral de Laplace, las condiciones iniciales no intervienen en el resultado (solo brindan la solución para régimen permanente). Para incluir esas condiciones iniciales y obtener un resultado completo que contemple el régimen transitorio y el permanente, presentamos a continuación la propiedad de derivación de la transformada unilateral de Laplace:

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow s.X(s) - x(0^-)$$

si derivamos nuevamente obtenemos

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \longrightarrow s^2.X(s) - s.x(0^-) - x'(0^-)$$

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Utilizando la definición (10.3), y colocando la derivada obtenemos

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

integrando por partes con $u = e^{-st}$ y $dv = x'(t)dt$, calculamos $du = -s.e^{-st}dt$ y $v = x(t)$, entonces

$$\begin{aligned} X(s) &= x(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \\ &= -x(0^-) + sX(s) \quad \sigma > 0 \end{aligned}$$

finalmente

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow sX(s) - x(0^-)$$

Aplicando una nueva derivada obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} &\longrightarrow s\left[sX(s) - x(0^-)\right] - x'(0^-) \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &\longrightarrow s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-) \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$)

Con la propiedad presentada se puede hallar fácilmente la solución de una gran cantidad de ecuaciones (y sistemas de ecuaciones) diferenciales, simplemente transformando ambos miembros de la ecuación, despejando la función incógnita y antitransformando.

10.7.2. Propiedad de integración

Esta propiedad es levemente diferente a su contraparte en el caso bilateral. Veremos que:

$$\int_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{1}{s}X(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0-} x(\tau)d\tau$$

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Simplemente debemos ver que si descomponemos los límites de la integral en dos:

$$\int_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau + \int_{\tau=0^-}^{t} x(\tau)d\tau$$

la primera integral es una constante, y al utilizar la transformada unilateral se transforma como:

$$\int_{\tau=-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{1}{s}\int_{\tau=-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau$$

recuerde que

$$A.u(t) \longrightarrow \frac{A}{s}$$

Para resolver la segunda integral llamemos

$$f(t) = \int_{\tau=0^-}^{t} x(\tau)d\tau$$

y

$$f'(t) = x(t) \quad f(0^-) = 0$$

Si transformamos $x(t)$ y utilizamos la propiedad de derivación de la transformada unilateral de Laplace

$$f(t) \longrightarrow F(s)$$

$$X(s) = s.F(s) - f(0^-) = s.F(s)$$

entonces

$$F(s) = \frac{X(s)}{s}$$

que es equivalente a

$$\int_{\tau=0^-}^{\infty} x(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{X(s)}{s}$$

por lo tanto queda demostrada la segunda integral y con eso la propiedad.

($\Longleftarrow$)

10.7.3. Teorema del valor inicial

Si $x(t)$ es una función infinitamente derivable en las cercanías de $t = 0$, entonces:

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} s.X(s)$$

Esta propiedad nos dice que los valores de la señal temporal en el origen están relacionados con los que adopta su transformada en valores de s muy grandes.

Demostración:

$(\Longrightarrow)$
Utilizando la propiedad de derivación obtenemos:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0^-) &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{0^+} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= x(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= x(0^+) - x(0^-) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \end{aligned}$$

entonces

$$sX(s) = x(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Aplicando límite cuando $s \to \infty$ y teniendo en cuenta que $\lim_{s \to \infty} e^{-st} = 0$, finalmente

$$\lim_{s \to \infty} sX(s) = x(0^+)$$

$(\Longleftarrow)$

10.7.4. Teorema del valor final

Este teorema nos permite estudiar qué sucede con la señal temporal cuando $t \to \infty$, en base a su transformada de Laplace cuando $s \to 0$. En los sistemas de control esta propiedad se utiliza a menudo para conocer el valor final que adoptará una señal conociendo el diagrama de polos y ceros. La relación es la siguiente:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s.X(s)$$

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Utilizando nuevamente la propiedad de derivación y aplicando límite con $s \to 0$ en ambos miembros:

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\left[sX(s) - x(0^-)\right] &= \lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}\lim_{s\to 0}\left(e^{-st}\right)dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}dt = x(t)\Big|_{0^-}^{\infty} \\
&= \lim_{t\to\infty} x(t) - x(0^-)
\end{aligned}$$

finalmente

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s.X(s)$$

($\Longleftarrow$)

10.8. Aplicaciones

Las aplicaciones de la transformada de Laplace son tan variadas que haría falta un libro completo para detallarlas. Para los ingenieros que se especializan en el área de control constituye una herramienta poderosa de análisis y síntesis de sistemas. La transformada es muy útil en cuanto a su versalitilidad, su practicidad algebráica y la facilidad operativa y gráfica que ofrece en el diagrama de polos y ceros.

10.8.1. Sistemas lineales invariantes en el tiempo: LTI

Los sistemas LTI son de especial interés en nuestro enfoque de sistemas. Como ya analizamos con anterioridad, la relación entre la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ de un sistema LTI está dada por la convolución (simbolizada con el asterisco $*$) entre $x(t)$ y la respuesta impulsional del sistema $h(t)$:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)} \tag{10.4}$$

Vimos que la respuesta en frecuencia del sistema es la transformada de Fourier del $h(t)$ simbolizada como $H(\omega)$. Utilizando la transformada de Laplace, podemos transformar la ecuación (10.4) y obtener el $H(s)$:

$$Y(s) = X(s).H(s)$$

Demostración:

$(\Longrightarrow)$

Utilizando nuevamente la propiedad de derivación y aplicando límite con $s \to 0$ en ambos miembros:

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\left[sX(s) - x(0^-)\right] &= \lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}\lim_{s\to 0}\left(e^{-st}\right)dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}dt = x(t)\Big|_{0^-}^{\infty} \\
&= \lim_{t\to\infty} x(t) - x(0^-)
\end{aligned}$$

finalmente

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s.X(s)$$

$(\Longleftarrow)$

10.8. Aplicaciones

Las aplicaciones de la transformada de Laplace son tan variadas que haría falta un libro completo para detallarlas. Para los ingenieros que se especializan en el área de control constituye una herramienta poderosa de análisis y síntesis de sistemas. La transformada es muy útil en cuanto a su versalitilidad, su practicidad algebráica y la facilidad operativa y gráfica que ofrece en el diagrama de polos y ceros.

10.8.1. Sistemas lineales invariantes en el tiempo: LTI

Los sistemas LTI son de especial interés en nuestro enfoque de sistemas. Como ya analizamos con anterioridad, la relación entre la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ de un sistema LTI está dada por la convolución (simbolizada con el asterisco $*$) entre $x(t)$ y la respuesta impulsional del sistema $h(t)$:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)} \tag{10.4}$$

Vimos que la respuesta en frecuencia del sistema es la transformada de Fourier del $h(t)$ simbolizada como $H(\omega)$. Utilizando la transformada de Laplace, podemos transformar la ecuación (10.4) y obtener el $H(s)$:

$$Y(s) = X(s).H(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}} \tag{10.5}$$

Denominaremos a $H(s)$ como la **función transferencia del sistema**. Así como podemos hallar la transformada de Laplace de una señal de entrada o de salida y dibujar su diagrama de polos y ceros, lo mismo ocurre con la respuesta impulsional; aunque del $H(s)$ vamos a obtener algunas conclusiones importantes acerca de las características del sistema.

- Si un sistema LTI es causal, la región de convergencia (ROC) del $H(s)$ debe ser derecha. Esto es una consecuencia directa de las propiedades de la ROC planteadas en la sección (10.3).
- Como la parte real de los puntos pertenecientes a la ROC de $H(s)$ indican los valores que puede adoptar σ (recuerde que $s = \sigma + i\omega$) para que la transformada de Laplace sea convergente, si el eje $i\omega$ está incluido en la ROC, esto asegura que para $\sigma = 0$ la transformada de Laplace es convergente. Como se dedujo en la sección (10.4) la transformada de Fourier se deduce de la transformada de Laplace reemplazando s por $i\omega$ ($\sigma = 0$). Podemos concluir entonces diciendo que si la ROC de la transferencia $H(s)$ de un sistema LTI incluye al eje imaginaron $i\omega$, entonces el sistema posee una respuesta en frecuencia $H(\omega) = H(s = i\omega)$ y por lo tanto es estable (BIBO:bounded input bounded output).

La mayoría de los sistemas que analizaremos serán estables y causales, y por lo tanto sus polos se mantendrán del lado izquierdo del eje imaginario en el diagrama ($\sigma < 0$), permitiendo que la ROC incluya al eje $i\omega$.

Los sistemas más utilizados para modelización de fenómenos físicos simples, son los descriptos por ecuaciones diferenciales ordinarias, que genéricamente expresamos como:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

donde $x(t)$ es la entrada, $y(t)$ la salida y los a_k y b_k los coeficientes constantes. Transformando ambos miembros y teniendo en cuenta condiciones iniciales nulas, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) &= \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s) \\ Y(s) \sum_{k=0}^{N} a_k s^k &= X(s) \sum_{k=0}^{M} b_k s^k \end{aligned}$$

por lo tanto podemos despejar la función transferencia $H(s)$ como:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

Esta función es siempre racional. Las raíces del numerador serán los ceros de la transferencia, y las raíces del denominador serán los polos. El orden del sistema lo establece el valor del polo de mayor orden (N).

Veamos dos casos típicos:

10.8.2. Sistemas de primer orden

El sistema de primer orden está descripto por la siguiente ecuación diferencial:

$$y'(t) + a.y(t) = x(t)$$

donde siempre $x(t)$ es la entrada, $y(t)$ la salida y ”$a$üna constante. Suponiendo condiciones iniciales nulas, y transformando ambos miembros, obtenemos

$$\begin{aligned} sY(s) + a.Y(s) &= X(s) \\ Y(s)(s+a) &= X(s) \end{aligned}$$

por lo tanto la función transferencia es:

$$H(s) = \frac{1}{s+a}$$

y está compuesta por un único polo sobre el eje real. Para que el sistema sea causal y estable, el polo debe permanecer del lado izquierdo del eje imaginario, por lo tanto $a > 0$. Observe la figura 10.9.

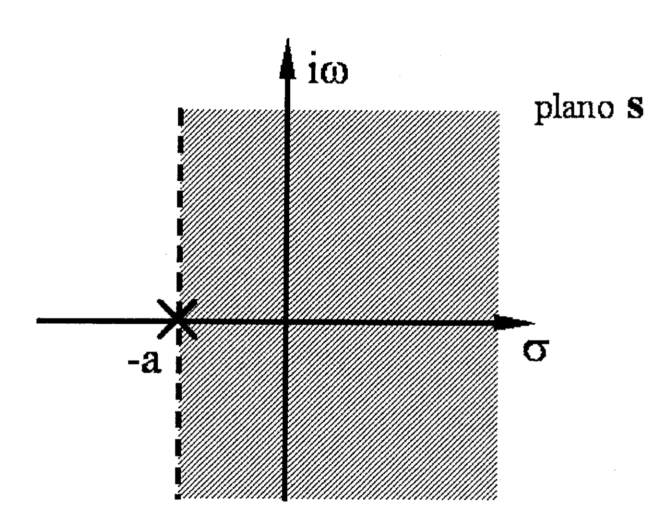
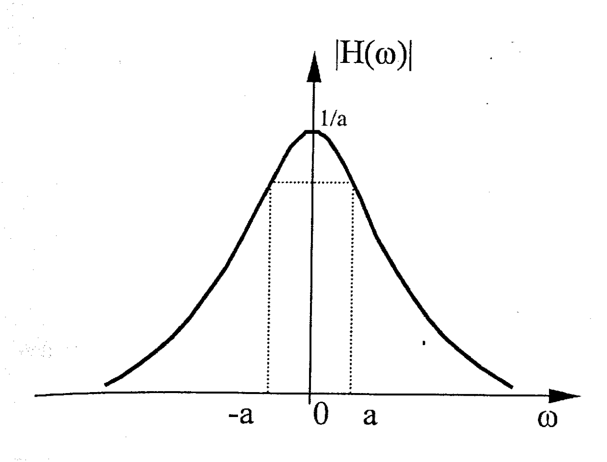


Figura 10.9: Diagrama de polos y ceros para un sistema de primer orden

Asegurando que el eje imaginario este incluido en la ROC, podemos hallar la respuesta en frecuencia reemplazando directamente s por $i\omega$.

$$H(\omega) = \frac{1}{i\omega + a}$$



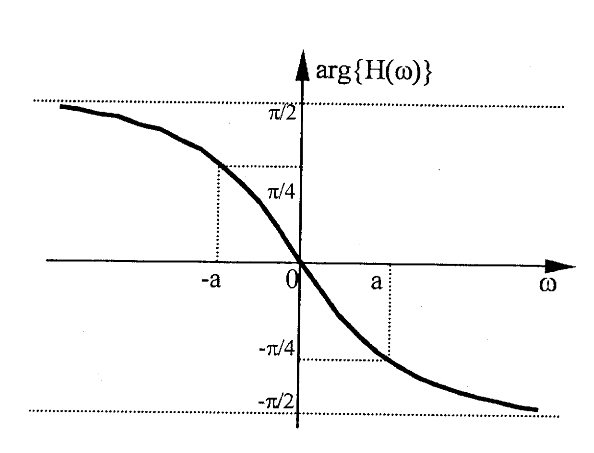


Figura 10.10: Módulo y fase de la transformada de $e^{-at}u(t)$. En este caso la respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden con un único polo del tipo filtro pasa-bajos.

Recordemos los gráficos de módulo y fase en la figura 10.10.

Finalmente para hallar la respuesta impulsional antitransformamos obteniendo:

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

Es asimismo muy común utilizar la respuesta indicial $g(t)$ (al escalón) que, recordemos, se relaciona con el $h(t)$ de la siguiente manera:

$$h(t) = \frac{\partial g(t)}{\partial t}$$

Utilizando la propiedad de derivación podemos asegurar que

$$\begin{aligned} H(s) &= s.G(s) \\ \frac{H(s)}{s} &= G(s) \end{aligned}$$

entonces

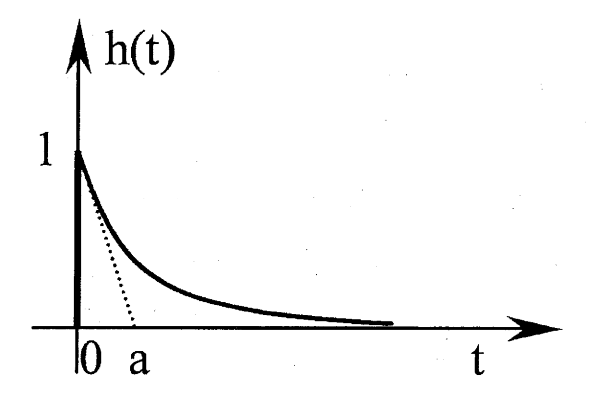
$$G(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

y

$$g(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)u(t)$$

las cuales observamos en la figura 10.11.

La respuesta analizada está muy ligada a sistemas físicos simples con dos elementos, como por ejemplo un circuito eléctrico con una resistencia y un capacitor, o una resistencia y un inductor; a sistemas mecánicos compuestos por una masa con rozamiento o a un objeto que gira con rozamiento, o simplemente un sistema térmico compuesto por una masa que disipa su energía en forma de calor al medio ambiente.



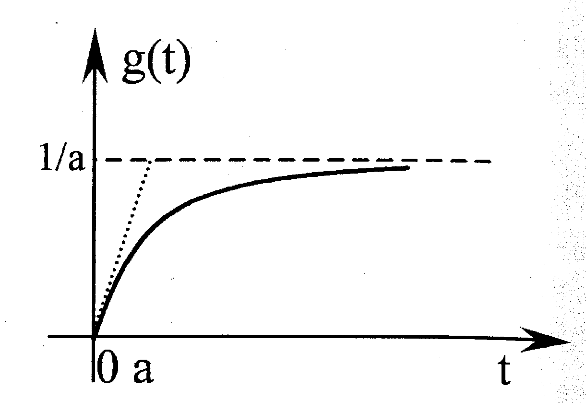


Figura 10.11: Respuesta impulsional e indicial.

La posición del único polo del sistema lo caracteriza por completo. Notamos que si el polo se aproxima al origen ($a \to 0$) la respuesta del sistema es más lenta (la exponencial cae lentamente) hasta el punto donde el polo llega al origen y la respuesta se convierte en un escalón. En ese punto estamos en el margen de la estabilidad. Por otro lado si alejamos el polo del origen siempre hacia la izquierda ($a \to \infty$), el sistema tiene una respuesta más veloz. Si el sistema responde a un modelo físico, la posición del polo estará dominada por las variables físicas que intervengan en la ecuación, que se resumirán en la constante "a".

10.8.3. Sistemas de segundo orden

El sistema de segundo orden está descripto por la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(t) + a.y'(t) + b.y(t) = x(t)$$

donde siempre $x(t)$ es la entrada, $y(t)$ la salida y en este caso poseemos dos contantes a y b. Suponiendo condiciones iniciales nulas, y transformando ambos miembros, obtenemos

$$\begin{aligned} s^2Y(s) + s.aY(s) + bY(s) &= X(s) \\ Y(s)(s^2 + as + b) &= X(s) \end{aligned}$$

por lo tanto la función transferencia es:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

Como en el denominador aparece un sistema de segundo orden, existen tres posibles resultados:

1. Sobreamortiguado: Dos raíces reales. En este caso los dos polos de la transferencia estarán sobre el eje real. El nombre *sobreamortiguado* se debe a la respuesta indicial del sistema. La misma crecerá exponencialmente sin presentar ninguna oscilación, hasta estabilizarse en un valor asintótico máximo.

2. Subamortiguado: Dos raíces complejas conjugadas. Si las constantes a y b son reales, las raíces complejas serán conjugadas, por lo tanto los polos de la transferencia serán espejados con respecto al eje horizontal (σ) y estarán ubicados uno por encima y otro por debajo del mismo. La denominación *subamortiguado* se debe a que la respuesta indicial presentará algunas oscilaciones pseudo-periódicas en torno al valor final.

3. Amortiguamiento crítico. Dos raíces reales coincidentes. La transferencia posee un polo doble sobre el eje real σ. Este es el caso intermedio entre los dos analizados anteriormente. La respuesta indicial crecerá exponencialmente y no presentará oscilaciones.

Debemos aclarar que siempre consideramos que los polos residen en los cuadrantes 2 o 3 ($\sigma < 0$) para asegurar la estabilidad del sistema.

Analicemos cada caso en particular:

1. Sobreamortiguado: Las raíces del denominador son dos número reales, entonces:

$$H(s) = \frac{1}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$$

La respuesta en frecuencia es

$$H(\omega) = \frac{1}{(i\omega+\alpha_1)(i\omega+\alpha_2)}$$

Los gráficos de módulo y fase son muy similares al del sistema de primer orden. La diferencia es que ahora disponemos de dos constantes para modificar, por ejemplo, la forma acampanada de la respuesta de módulo. Variando esas dos constantes podemos conseguir modificar el ancho la campana. La respuesta de fase tiene la misma forma pero sus valores asintóticos son π y $-\pi$.

Si ahora antitransformamos para hallar la respuesta impulsional, obtenemos:

$$h(t) = \left(Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}\right) u(t)$$

y siguiendo el procedimiento visto para el sistema de primer orden, calculamos la respuesta indicial:

$$g(t) = \frac{1}{\alpha_1}(1-e^{-\alpha_1 t})u(t) + \frac{1}{\alpha_2}(1-e^{-\alpha_2 t})u(t)$$

Observe su gráfica genérica en la figura 10.12.

2. Subamortiguado: Las raíces del denominador son complejas conjugadas, entonces:

$$H(s) = \frac{1}{(s+\alpha+i.\beta)(s+\alpha-i.\beta)} = \frac{1}{s^2+2s\alpha+\alpha^2+\beta^2}$$

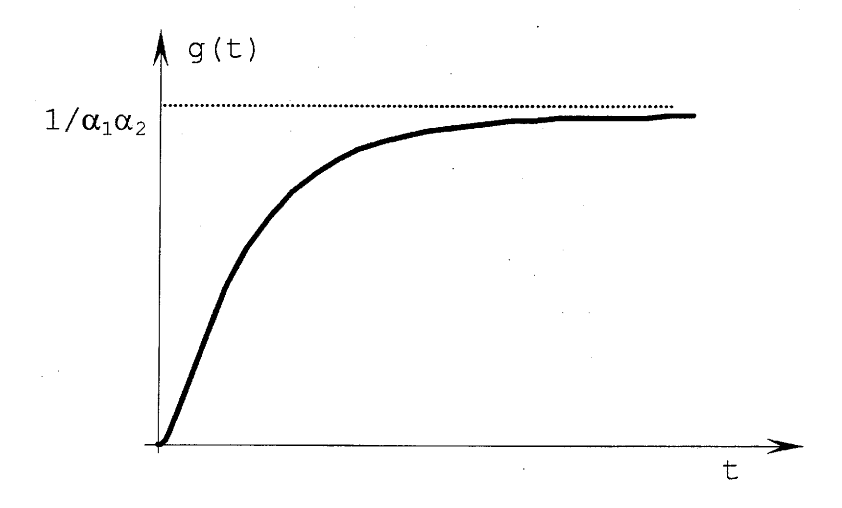


Figura 10.12: Respuesta indicial de un sistema de segundo orden sobreamortiguado.

La respuesta en frecuencia es, reemplazando $s = i\omega$:

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2}$$

En este caso los gráficos de módulo y fase son muy diferentes a los ya analizados. Veamos primero el diagrama de polos y ceros, junto a un diagrama de módulo y fase para constantes α y β arbitrarias.

Nótese la coincidencia entre los máximos de la respuesta y la posición de los polos con respecto al eje imaginario $i\omega$ en el plano s.

Para hallar la antitransformada del $H(s)$ factorizamos el denominador de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s\alpha + \alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$$

y utilizamos:

$$e^{-at} sen(\omega_0 t) u(t) \longrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \quad \sigma > -a$$

entonces hallamos la respuesta impulsional como:

$$h(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} sen(\beta t) u(t)$$

Para calcular la respuesta indicial colocamos un escalón en la entrada, lo que genera un polo en el origen, y calculamos la antitransformada de la salida

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s\alpha + \alpha^2 + \beta^2)}$$

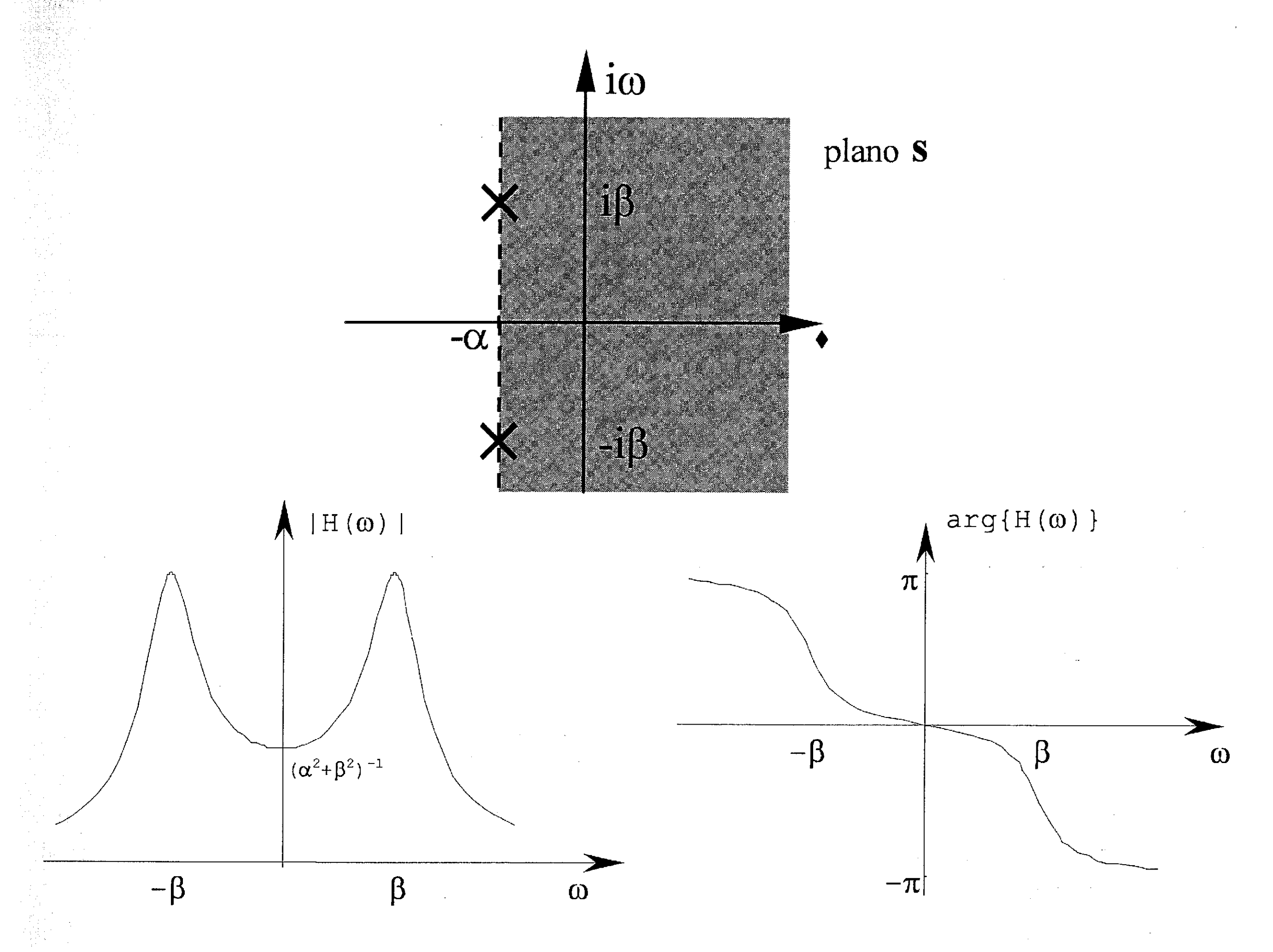


Figura 10.13: Diagrama de polos y ceros junto a la respuesta en frecuencia del sistema de segundo orden sub-amortiguado.

utilizando residuos obtenemos

$$g(t) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{e^{-\alpha t}}{\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} cos\left(\beta t - arctg(\alpha/\beta)\right)$$

Nótese que utilizando el Teorema del valor final podemos verificar el valor al que tiende $g(t)$ para $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0} s.G(s) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}$$

(Siempre que la exponencial $e^{-\alpha t}$ tienda a cero, para lo cual α debe ser mayor que cero, lo que implica que los polos deben residir sobre el semiplano izquierdo). Para graficar la respuesta estándar utilizamos la nomenclatura de la figura 10.14

Donde a la distancia desde los polos al origen la denominamos frecuencia natural ω_n, a la parte real de los polos la denominamos factor de amortiguamiento $\alpha = -\xi\omega_n$, al ángulo que forman con el eje negativo φ y a su coseno : $\xi = cos\varphi$ y la parte

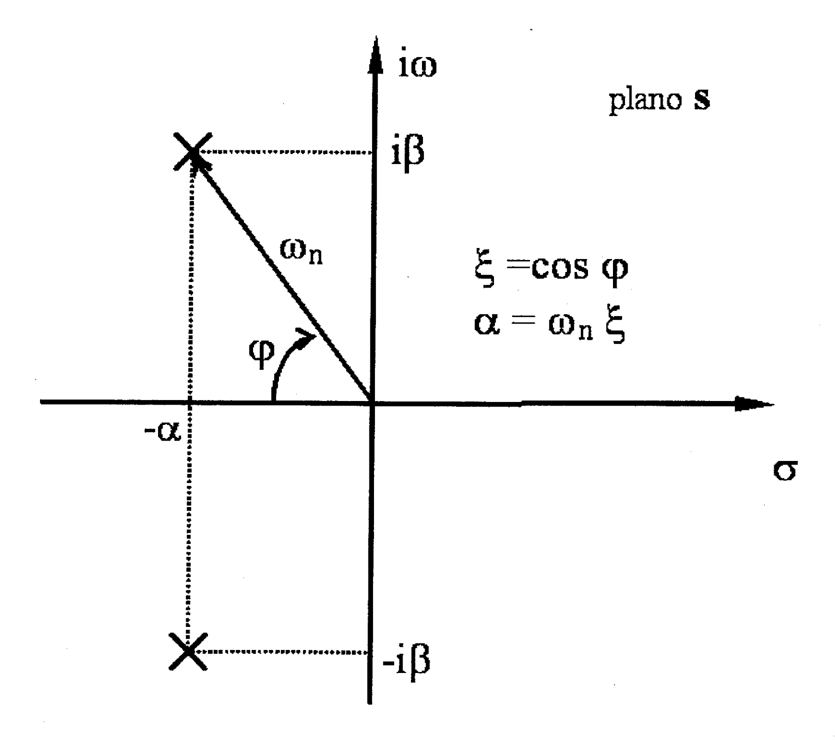


Figura 10.14: Diagrama de polos y ceros del sistema de segundo orden normalizado.

imaginaria $\beta = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$. Introduciendo esta nomenclatura en la respuesta indicial (y observando que $arctg(\alpha/\beta) = \pi/2 - \varphi$) obtenemos finalmente:

$$g(t) = \frac{1}{\omega_n^2} - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_n^2\sqrt{1-\xi^2}} sen\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \varphi\right)$$

De donde ahora podemos aplicar el teorema del valor inicial para verificar que:

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{s\to\infty} s.G(s) = 0$$

La respuesta indicial temporal posee varios valores temporales importantes que marcaremos a continuación. Grafiquemos la respuesta en la figura 10.15.

Las expresiones aproximadas para los tiempos indicados, se detallan a continuación:

t_1: Tiempo de retardo(t_r). Es el tiempo que tarda la señal en alcanzar el 50 % de su valor final. Su valor aproximado es:

$$t_r = \frac{1+0{,}7\xi}{\omega_n}$$

t_2: Tiempo de levantamiento(t_l). Es el tiempo requerido para que la respuesta al escalón se eleve desde el 10 % al 90 % de su valor final. Su valor aproximado es:

$$t_l = \frac{0{,}7+2{,}5\xi}{\omega_n}$$

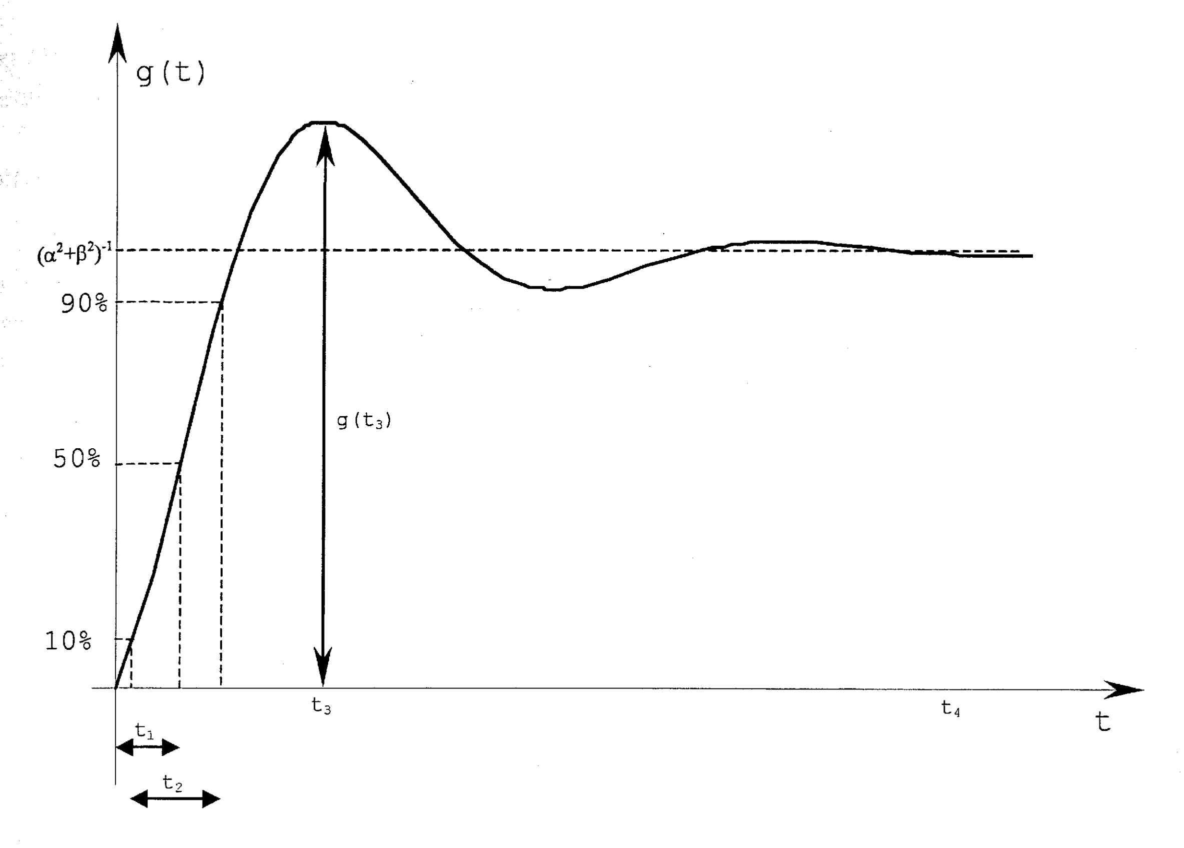


Figura 10.15: Respuesta indicial de un sistema de segundo orden subamortiguado.

t_3: Tiempo al pico máximo(t_{max}). Es el tiempo en el que se produce el pico de amplitud máxima. Su valor es:

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

Para $t = t_{max}$ el sobrepaso máximo es:

$$g(t_{max}) = \frac{1 + e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}}{\omega_n^2}$$

t_4: Tiempo de asentamiento(t_a). Es el valor en el cual la respuesta queda acotada al, por ejemplo, 5 % de su valor final. En ese caso el cálculo aproximado es:

$$t_a = \frac{3{,}2}{\omega_n\xi} \quad 0 < \xi < 0{,}69 \qquad t_a = \frac{4{,}5}{\omega_n\xi} \quad \xi > 0{,}69$$

Dependiendo del diseño del sistema se fijan algunos de estos valores y se despejan los otros. Recuérdese que estamos en el caso en el que se presenta siempre una oscilación subamortiguada. La pseudo-frecuencia de esta oscilación está dada por el factor $\beta = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$. La frecuencia de oscilación natural es ω_n y es a la cual oscilaría el sistema

si no existiera amortiguamiento. Por último el factor de amortiguamiento se fija con $\alpha = -\xi\omega_n$, y está relacionado con la constante $\xi = cos\varphi$ y con ω_n. Note que, fijando ω_n, si $\xi = 1$, los polos estarán ambos sobre el eje real (amortiguamiento crítico), al disminuir el valor de ξ el ángulo crece y la oscilación es más pronunciada (manteniendo su pseudo-frecuencia ya que ω_n se mantuvo constante).

3. Amortiguamiento crítico: $\xi = 1$. En este caso el seno desaparece, ya que $\beta = 0$, y los dos polos se juntan en un único polo doble ubicado en $s = -\alpha$. La transferencia es

$$H(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

Y su diagrama de polos y ceros se observa en la figura 10.16.

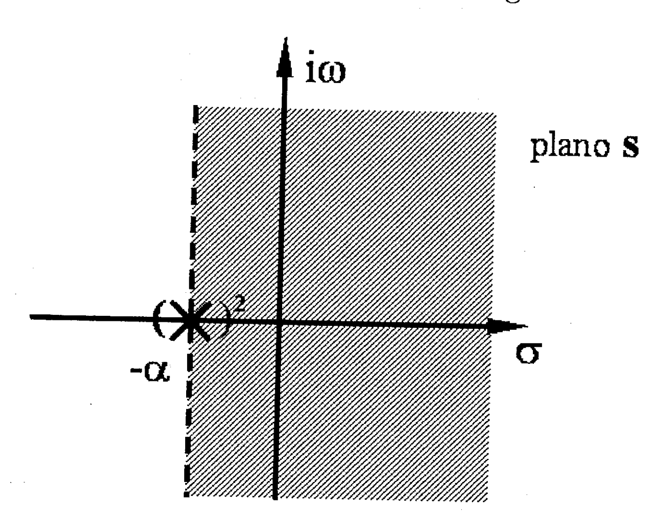


Figura 10.16: Amortiguamiento crítico.

La respuesta en frecuencia es

$$H(\omega) = \frac{1}{(i\omega+\alpha)^2}$$

Los gráficos de módulo y fase son nuevamente muy similares al del sistema de primer orden.La respuesta de módulo sigue siendo acampanada, aunque un tanto más estrecha. La respuesta de fase tiene la misma forma pero sus valores asintóticos son π y $-\pi$.

Si ahora antitransformamos para hallar la respuesta impulsional, obtenemos:

$$h(t) = \left(t.e^{-\alpha t}\right) u(t)$$

Dividiendo la respuesta impulsional por s, calculamos la respuesta indicial:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+\alpha)^2}$$

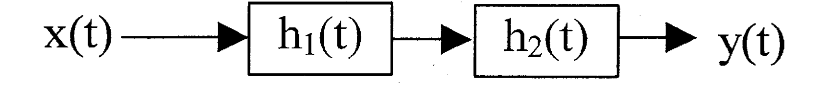
$$g(t) = \frac{1}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t})u(t) - \frac{te^{-\alpha t}}{\alpha}u(t)$$

La respuesta indicial temporal es muy similar al caso sobreamortiguado. El caso de amortiguamiento crítico es la frontera entre los dos casos analizados.

Se deja a cargo del lector la verificación del teorema del valor final e inicial, similares al caso anterior.

10.8.4. Realimentación e interconexión entre sistemas

Como ya mencionamos en el apartado anterior, la transformada de Laplace es muy utilizada en el área de control. Comencemos simplemente por recordar las relaciones entre sistemas conectados en serie y en paralelo, como muestran las siguientes figuras:



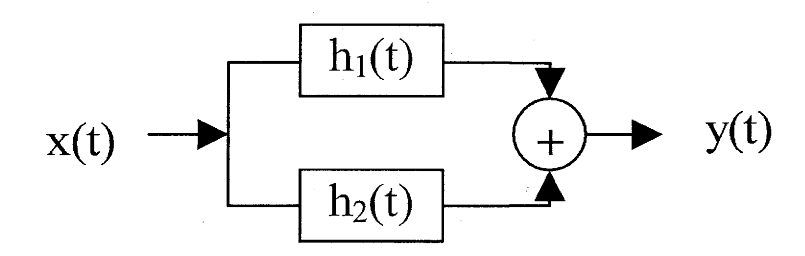


Figura 10.17: Conexión de sistemas en serie y en paralelo.

Para el caso serie, la respuesta impulsional total es:

$$h_{serie}(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

donde el * implica la convolución. Transformando obtenemos la transferencia completa:

$$H_{serie}(s) = H_1(s)H_2(s)$$

Para el caso paralelo obtenemos:

$$h_{paralelo}(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

y transformando

$$H_{paralelo}(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

Las conclusiones de estos dos casos se desprenden de las propiedades de linealidad y convolución ya estudiadas. Sin embargo existe una configuración típica en la cual la señal de salida se suma/resta a la de entrada. Este caso es el denominado de *realimentación* y será la base

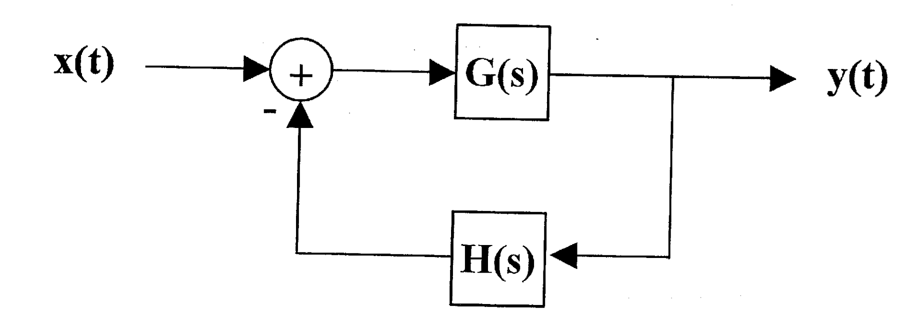


Figura 10.18: Sistema con un lazo de realimentación.

de futuros análisis. El diagrama en bloques de un sistema realimentado es el representado en la figura 10.18.

Nótese el signo negativo en el sumador. La transferencia total del sistema realimentado es

$$H_T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{10.6}$$

Un caso típico es el sistema de segundo orden. En este caso debemos colocar:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} \quad H(s) = K \quad K \in I\!R$$

Calculamos la transferencia total reemplazando en (10.6) con $K = 1$ y obtenemos :

$$H_T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n.s + \omega_n^2}$$

En esta transferencia se pueden observar los tres casos analizados para el sistema de segundo orden.

Además poseemos una constante de ajuste en la rama de realimentación: K. Modificando el valor de K podemos desplazar los polos de la transferencia total. Si $K > 0$ entonces (al conservar el signo negativo en el sumador) la realimentación es **negativa** y los polos se desplazarán como muestra el siguiente el gráfico de la figura 10.19.

Los polos se irán aproximando hasta el punto medio y luego uno subirá por la línea punteada y el otro descenderá.

En el caso de colocar $K < 0$, la realimentación se tornará **positiva** y los polos se desplazarán alejándose uno del otro, según el gráfico de la figura 10.20.

Para que el sistema sea estable, es indispensable que los polos residan en el semiplano izquierdo, y por lo tanto que $K > 0$.

Existen varios métodos operativos para el estudio del desplazamiento de los polos en sistemas realimentados (Nyquist-Lugar de raíces) que están fuera del alcance este libro.

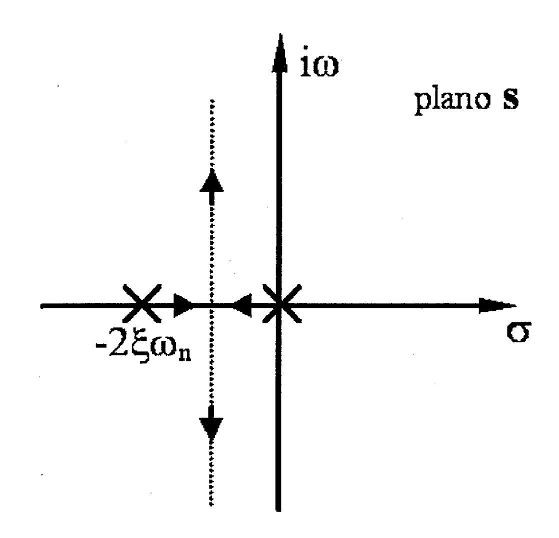


Figura 10.19: Desplazamiento de los polos y ceros al realimentar negativamente.

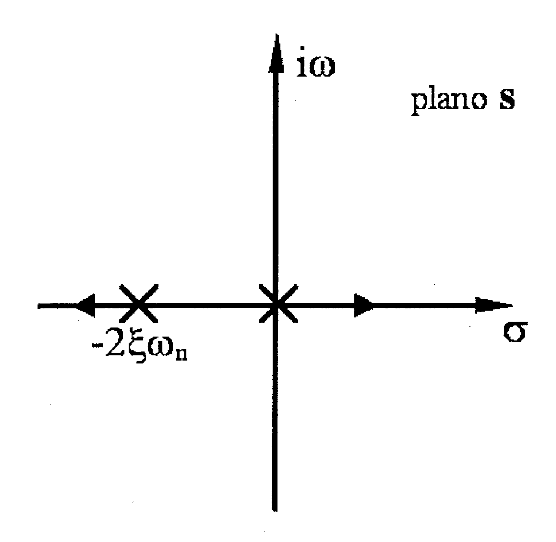


Figura 10.20: Desplazamiento de los polos y ceros al realimentar positivamente.

10.8.5. Interpretación geométrica de la Transformada de Fourier del diagrama de polos y ceros

Finalmente resta un análisis cualitativo de la transformada de Fourier en base al diagrama de polos y ceros. Sería de especial interés poder relacionar ambas transformadas para unificar los criterios de diseño de la respuesta temporal y frecuencial en el diagrama de polos y ceros. Consideremos una transferencia $H(s)$ con un numerador y un denominador factorizados en sus ceros y polos respectivamente:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_m)}$$

donde vemos que solo hay n ceros y m polos.

Cálculo de la respuesta de módulo Para calcular el módulo de la transferencia, recordamos que el módulo del producto entre dos número complejos es el producto de sus módulos, y el módulo del cociente es el cociente de sus módulos. Por lo tanto:

$$|H(s)| = \left|K_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_m)}\right| = |K_0| \frac{|s-z_1||s-z_2|\cdots|s-z_n|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_m|}$$

La resta entre dos números complejos da como resultado un vector que los une, como muestra la figura 10.21 para un par de números s_1 y s_2.

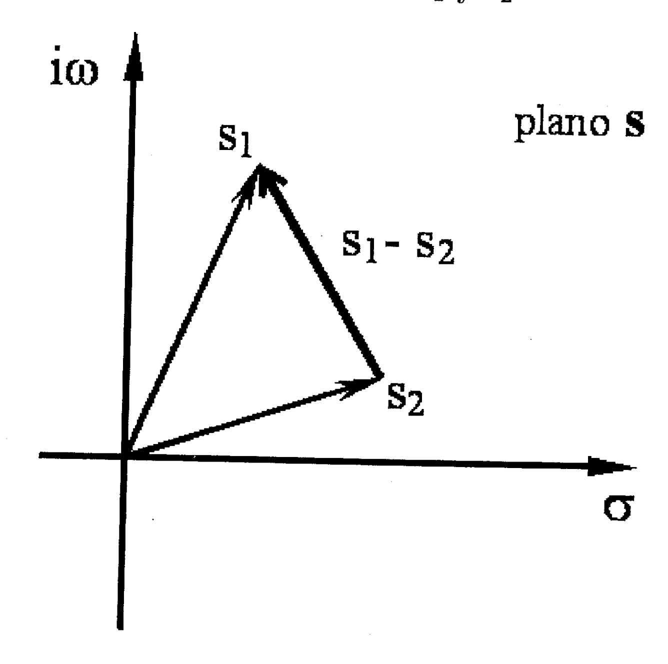


Figura 10.21: Interpretación geométrica de la transformada de Laplace.

El módulo de la resta es la distancia entre los complejos.

Si el eje imaginario está incluido en la ROC de la transferencia $H(s)$, podemos calcular la respuesta en frecuencia reemplazando s por $i\omega$:

$$|H(\omega)| = |K_0| \frac{|i\omega-z_1||i\omega-z_2|\cdots|i\omega-z_n|}{|i\omega-p_1||i\omega-p_2|\cdots|i\omega-p_m|}$$

Para cada valor de ω los puntos $i\omega$ se encuentran sobre el eje imaginario. Para el numerador hay que calcular el producto entre las distancias desde cada cero al punto $i\omega$ en cuestión. Luego hay que dividir por el producto de las distancias de cada polo al punto $i\omega$ en cuestión. Resumimos:

$$|H(\omega)| = \frac{\prod \text{Distancia desde cada cero al punto } i\omega}{\prod \text{Distancia desde cada polo al punto } i\omega}$$

En el caso de no haber ceros, el numerador será simplemente 1. En el caso de no haber polos, el denominador será 1.

Cálculo de la respuesta de fase Siguiendo un razonamiento similar al anterior, ahora al evaluar la transferencia para $s = i\omega$, en el numerador debemos calcular la fase de un producto de complejos, que da como resultado la suma de las fases de cada uno de los vectores que van desde cada cero al punto $i\omega$ que se desea evaluar. Lo mismo sucede en el denominador con cada polo. El cociente solo genera la resta entre la sumatoria de las fases de los vectores desde cada cero hasta el punto $i\omega$ y la sumatoria de las fases de los vectores desde cada polo al punto $i\omega$ en cuestión. Las fases siempre se consideran con respecto al eje positivo de σ. Resumimos:

$$arg\{H(\omega)\} = \sum \text{Fases de los vectores desde cada cero al punto } i\omega - \sum \text{Fases de los vectores desde cada polo al punto } i\omega$$

Recuerde el caso del sistema de primer orden y su respuesta en frecuencia. El sistema de primer orden posee un polo en $s = -\alpha$. Su transferencia es:

$$H(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

Observe que para calcular la respuesta de módulo, si $\omega = 0$, debemos trazar un único vector desde $s = \alpha$ hasta $s = 0$. El módulo es 1 (no hay ceros) dividido α. La fase del vector es cero. A medida que aumentamos el valor de ω el vector es cada vez más largo y por lo tanto el módulo del $H(s)$ va tendiendo a cero (en el numerador siempre colocamos 1). La fase del vector va tendiendo a $\pi/2$, pero como está en el denominador es negativa. Cuando $\omega = \alpha$ se produce un caso especial, ya que la respuesta de módulo es $1/\left(\sqrt{2}\alpha\right)$ y la fase es $-\pi/4$; este punto es el que caracteriza al ancho de banda del sistema de primer orden. Verifique este resultado, con las gráficas de la página (401) y los esquemas de la figura 10.22 para algunos valores de ω.

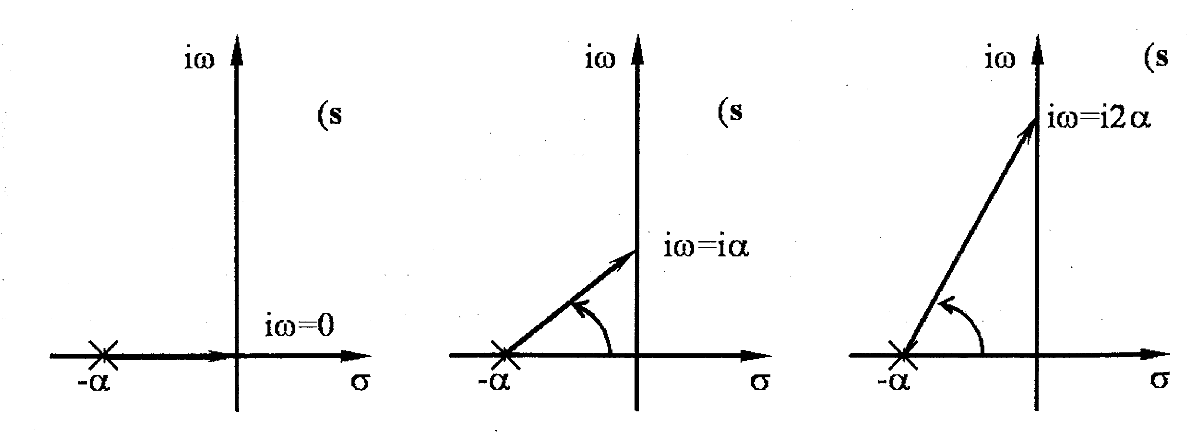


Figura 10.22: Cálculo de la respuesta de módulos del diagrama de polos y ceros.

Es interesante hacer notar el caso del sistema de segundo orden subamortiguado, que presenta un par de polos complejos conjugados. Su transferencia es

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{(s + \alpha - i\beta)(s + \alpha + i\beta)}$$

En este caso, podemos suponer que los polos complejos conjugados están cerca del eje imaginario (α pequeño y positivo). Cuando calculemos la respuesta de módulos para valores de ω próximos a los polos, el producto de las distancias del denominador quedarán gobernadas por la pequeña distancia al polo más cercano, produciendo un pico en la respuesta en frecuencia (recuerde que hay que **dividir** por la distancia a los polos).

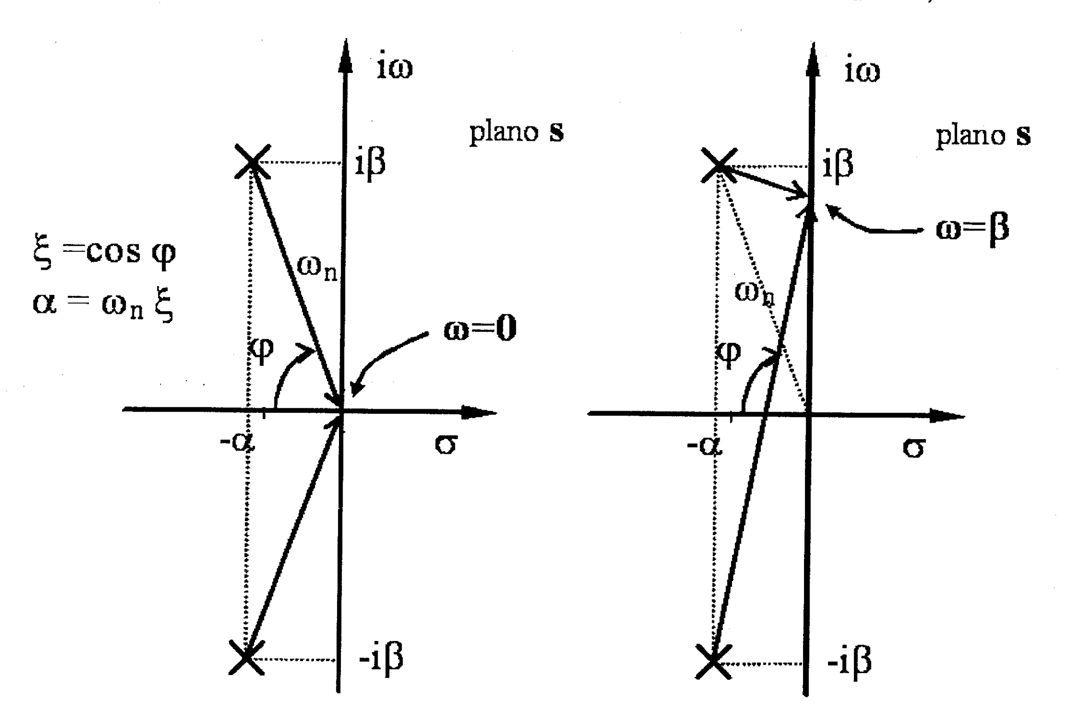


Figura 10.23: Cálculo de la respuesta de módulo y fase del diagrama de polos y ceros.

Para finalizar podemos intentar mostrar gráficamente, como ver la respuesta en frecuencia de módulos directamente del diagrama de polos y ceros. Considere que colocamos el plano s sobre un plano xy, y como tercer eje vertical colocamos el módulo $|H(s)|$. De esta manera podemos confeccionar una superficie que modele para cada punto del plano xy del dominio s, un punto de la imagen $|H(s)|$. Obviamente, al calcular la imagen de un cero, su módulo es cero. Al calcular la imagen de un polo, su módulo es infinito. Es como colocar una sábana y observar que bajo los polos, la misma se eleva y sobre los ceros desciende.

Veamos el caso de primer orden, con $H(s) = 1/(s + \alpha)$, en la figura 10.24.

Para analizar la respuesta en frecuencia, debemos cortar con un plano $\sigma = 0$ perpendicular al plano s que este apoyado de canto sobre el eje imaginario. Al ver la curva intersección resultante, comprobamos la forma de la respuesta en frecuencia del filtro pasa-bajos.

Podemos interpretar a la superficie como una membrana elástica. Cuando en el dominio aparece un cero, presionamos la membrana; cuando en el dominio aparece un polo, la

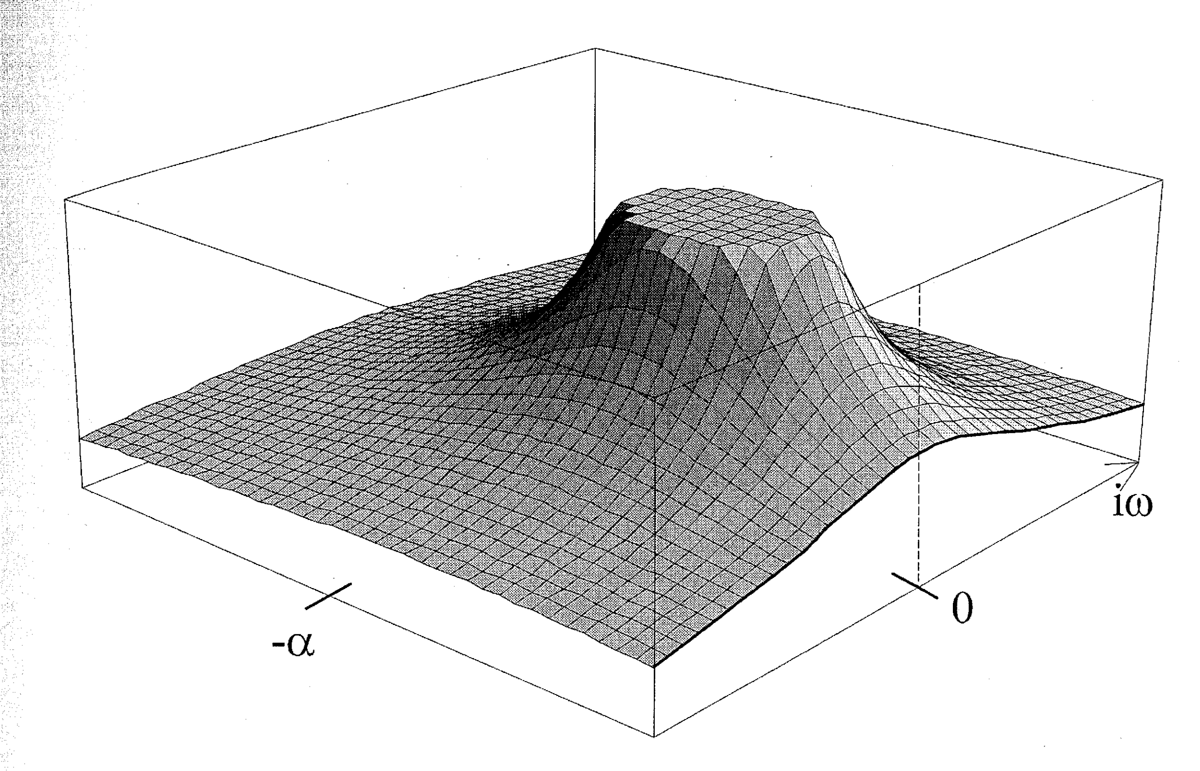


Figura 10.24: Cálculo de la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos y ceros.

estiramos. Para analizar la respuesta en frecuencia, cortamos la membrana por el eje con un plano $\sigma = 0$ y graficamos la curva resultante. Note que en todos los caso el espectro de módulos debe ser par, y es por eso que siempre los polos complejos resultarán conjugados (simétricos con respecto al eje real σ).

Grafiquemos lo que sucede para un sistema de segundo orden. Recuerde que la respuesta en frecuencia presentaba máximos cerca de los valores de ω próximos a los polos. Observe la figura 10.25.

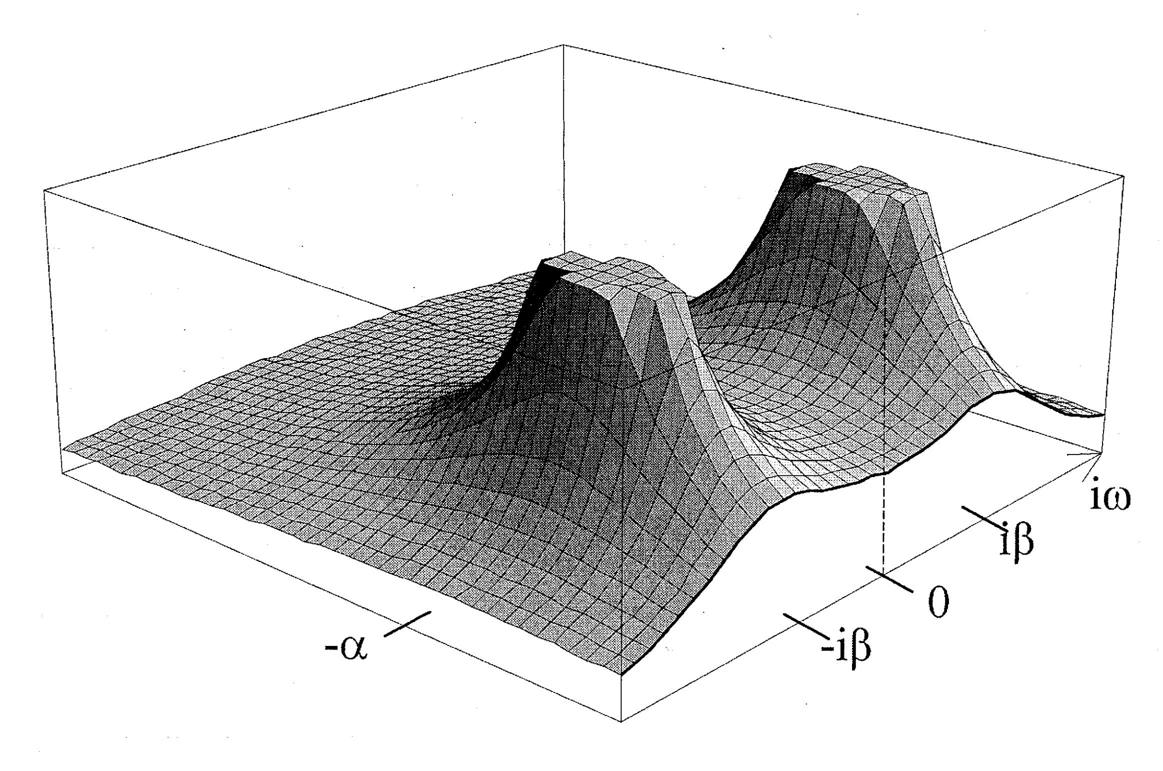


Figura 10.25: Cálculo de la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos y ceros.

10.9. Tablas de transformadas y propiedades

ros.

Cuadro 10.1: Propiedades de la Transformada bilateral de Laplace

	$f(t)$	$F(s), ROC$
	$f_1(t)$	$F_1(s), ROC_1$
	$f_2(t)$	$F_2(s), ROC_2$
Linealidad	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s), ROC_1 \cap ROC_2$
Desplazamiento temporal	$f(t - t_0)$	$e^{-s.t_0} F(s), ROC$
Desplazamiento en s	$e^{s_0 t} f(t)$	$F(s - s_0), ROC$ desplazada s_0
Escala	$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|} F(\frac{s}{a}), ROC$ escalada a
Inversión temporal	$f(-t)$	$F(-s), ROC$ espejada
Derivación temporal	$\frac{\partial f(t)}{\partial t}$	$sF(s), ROC$
Derivación frecuencial	$-t.f(t)$	$\frac{\partial F(s)}{\partial s}$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s), ROC$
Convolución	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) F_2(s), ROC_1 \cap ROC_2$
Modulación	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(s) * F_2(s)$

Cuadro 10.2: Transformadas de Laplace más usuales

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}, \sigma > -a$
$cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \sigma > 0$
$sen(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}, \sigma > 0$
$u(t)$	$\frac{1}{s}, \sigma > 0$
$t.u(t)$	$\frac{1}{s^2}, \sigma > 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t); n = 1, 2, 3\ldots$	$\frac{1}{s^n}, \sigma > 0$
$te^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{(s+a)^2}, \sigma > -a$
$e^{-at}sen(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}, \sigma > -a$
$e^{-at}cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}, \sigma > -a$
$cosh(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2-\omega_0^2}, \sigma > a$
$senh(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2-\omega_0^2}, \sigma > a$
$e^{-at}senh(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2-\omega_0^2}, \sigma > a$
$e^{-at}cosh(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2-\omega_0^2}, \sigma > a$
$\frac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a}u(t)$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}u(t)$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{sen(at)-at.cos(at)}{2a^3}u(t)$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{t.sen(at)}{2a}u(t)$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{sen(at)+at.cos(at)}{2a}u(t)$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{sen(at)+at.cos(at)}{2a^3}u(t)$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$
$t.cos(at)u(t)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$cos(at)-\frac{1}{2}at.sen(at)u(t)$	$\frac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{(3-a^2t^2)sen(at)-3at.cos(at)}{8a^5}u(t)$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^3}$
$\frac{t.sen(at)-at^2.cos(at)}{8a^3}u(t)$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^3}$
$\frac{(1+a^2t^2).sen(at)-at.cos(at)}{8a^3}u(t)$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^3}$
$\frac{3t.sen(at)+at^2.cos(at)}{8a}u(t)$	$\frac{s^3}{(s^2+a^2)^3}$
$\frac{t^2.sen(at)}{2a}u(t)$	$\frac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}$
$\frac{1}{2}t^2cos(at)u(t)$	$\frac{s^3-3a^2s}{(s^2+a^2)^3}$
$\frac{1}{6}t^3cos(at)u(t)$	$\frac{s^4-6a^2s^2+a^4}{(s^2+a^2)^4}$
$\frac{t^3.sen(at)}{24a}u(t)$	$\frac{s^3-a^2s}{(s^2+a^2)^4}$

10.10. Problemas propuestos

1. Calcule la transformada de Laplace de las siguientes funciones (utilice todas las propiedades que considere necesario):

   a) $f(t) = \delta(t - t_0)$.

   b) $f(t) = u(t)$.

   c) $f(t) = e^{-3t}u(t-2)$. Rta: $F(s) = e^{-6}\frac{e^{-2s}}{s+3}$, $\sigma > -3$

   d) $f(t) = te^{5t}u(-t)$. Rta: $F(s) = -\frac{1}{(s-5)^2}$, $\sigma < 5$

   e) $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_0)$. Rta: $\sum_k e^{-skT_0}$, $\forall s$

   f) $f(t) = t.u(t)$.

   g) $f(t) = cos(\omega_0 t)u(t)$.

   h) $f(t) = sen(\omega_0 t)u(t)$.

   i) $f(t) = e^{-at}cos(\omega_0 t)u(t)$ con $a > 0$.

   j) $f(t) = (t^2 + 4t + 3)u(t)$. Rta: $F(s) = 2s^{-3} + 4s^{-2} + 3s^{-1}$, $\sigma > 0$

   k) $f(t) = sen(3t)cos(10t)u(t)$. Rta: $F(s) = \frac{1}{2i}\left[\frac{s-i3}{(s-i3)^2+100} - \frac{s+i3}{(s+i3)^2+100}\right]$, $\sigma > 0$

   l) $f(t) = ch(a.t)u(t)$.

   m) $f(t) = t.sh(2t)u(t)$.

   n) $f(t) = t^n u(t)$.

   o) $f(t) = t.e^{-4t-1}.cos(3t)u(t)$.

   p) $f(t) = (t+1)^2 e^{-6t}u(t)$.

   q) $f(t) = e^{i7t}u(t)$.

2. Calcule la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

   a)

$$X(s) = \frac{1}{s+1} \quad \sigma > -1$$

   b)

$$X(s) = \frac{1}{s-1} \quad \sigma > 1$$

   c)

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad \sigma > -1$$

d)

$$X(s) = \frac{s}{s^2+4} \quad \sigma > 0$$

e)

$$X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} \quad \sigma > -1$$

f)

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} \quad \sigma > -1$$

Rta: $f(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})u(t)$

g)

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} \quad -1 > \sigma > -3$$

Rta: $f(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}u(-t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$

h)

$$X(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2} \quad \sigma > -3$$

Rta: $(2e^{-3t} - 10te^{-5t} - e^{-5t})u(t)$

i)

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)^2} \quad \sigma > 2$$

Rta: $f(t) = (e^t + te^{2t} - e^{2t})u(t)$

j)

$$X(s) = \frac{3s^2-7}{(s+2)(s+3)(s-5)} \quad \sigma > 5$$

Rta: $f(t) = (-\frac{5}{7}e^{-2t} + \frac{5}{2}e^{-3t} + \frac{14}{17}e^{5t})u(t)$

k)

$$X(s) = \frac{e^{-s/2}}{(s^2+9)} \quad \sigma > 0$$

Rta: $f(t) = \frac{1}{3}sen(3(t-1/2))u(t-1/2)$

l)

$$X(s) = \frac{s^2+1}{(s+9)(s+3)} \quad \sigma > 3$$

m)

$$X(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad \sigma > 1$$

n)

$$X(s) = \frac{(s^2+2s+1)}{s((s+3)^2+1)} \quad \sigma > 0$$

Rta: $f(t) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}e^{-3t}\left[9cos(t) - 13sen(t)\right]$ u(t)

3. La salida de un sistema LTI es $y(t) = 3e^{-4t}u(t)$ cuando la entrada fue $x(t) = 2u(t)$. Calcule la respuesta impulsional del sistema $h(t)$ y su transferencia $H(s)$. Encuentre además la salida del sistema si la entrada es $te^{-2t}u(t)$.

   Rta: $h(t) = \frac{3}{2}\delta(t) - 6e^{-4t}u(t)$

4. A continuación se indican las salidas $y(t)$ que provocaron las entradas $x(t)$ en sistemas LTI. Halle, para cada caso, la respuesta impulsional del sistema $h(t)$:

   a) $x(t) = 2e^{-2t}u(t)$, $y(t) = (1 - t + e^{-t} + e^{-2t})u(t)$

   b) $x(t) = 2u(t)$, $y(t) = t.u(t) - e^{-2t}u(t)$

   c) $x(t) = e^{-2t}u(t)$, $y(t) = e^{-t}u(t) - 3e^{-2t}u(t)$

   d) $x(t) = u(t)$, $y(t) = 2e^{-2t}cos(5t + \pi/8)u(t)$

5. Utilizando la transformada de Laplace calcule la respuesta impulsional $h(t)$ de un sistema LTI descripto por

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t)$$

   Rta: $h(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$, Causal, estable.

6. Un sistema LTI con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ está descripto por la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t)$$

   Calcule su respuesta impulsional $h(t)$ y su transferencia $H(s)$. Considere el caso en que el sistema es estable y causal.

7. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales (siempre para $t > 0$):

   a) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 8e^{-2t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$

   b) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 1$, $y(0) = 3, y'(0) = -2$

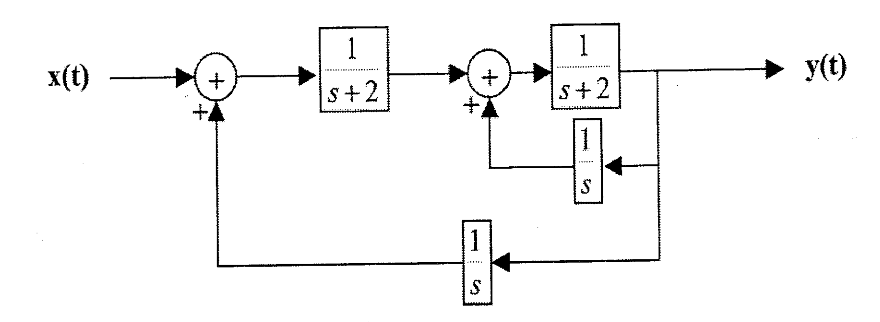
   c) $y''(t) + y(t) = 2e^{t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$

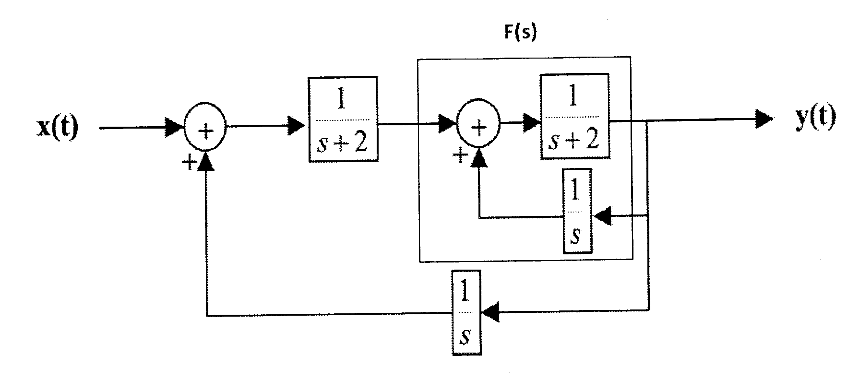
   Rta: $y(t) = \left(e^{t} + sen(t)\right) u(t)$

   d) $y'''(t) + y''(t) - 2y(t) = 5e^{t}$, $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2$

   Rta: $y(t) = te^{t}u(t)$

8. Hallar la transferencia del sistema causal del primer renglón de la figura 10.26. ¿Es estable? Halle la respuesta al impulso.





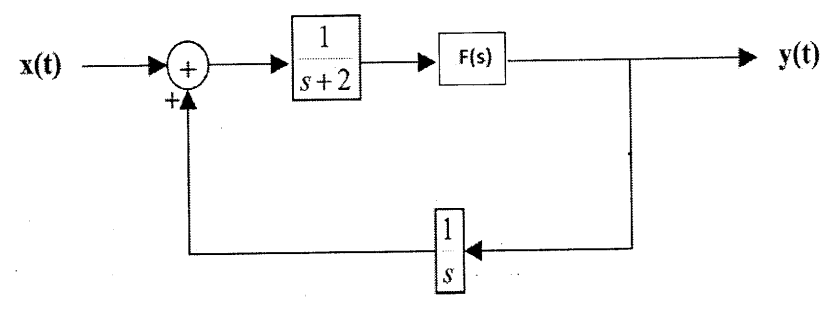


Figura 10.26: Sistema para el ejercicio 8

Para resolver este tipo de problema es importante reconocer el bloque realimentado $F(s)$ en el segundo renglón de la figura 10.26 cuya transferencia es:

$$F(s) = \frac{\frac{1}{s+2}}{1 - \left(\frac{1}{s+2}\right)\left(\frac{1}{s}\right)}$$

simplificando

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 2s - 1}$$

Ahora entonces el sistema completo vuelve a resolverse reconociendo los bloques realimentados:

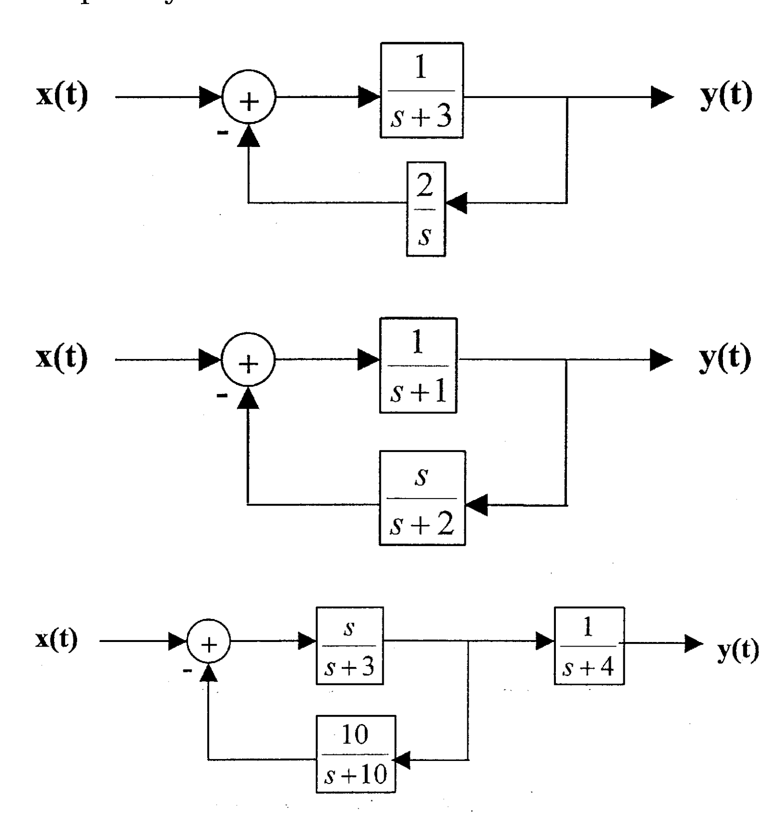
$$H(s) = \frac{\frac{1}{s+2}\frac{s}{s^2+2s-1}}{1 - \frac{1}{s+2}\frac{s}{s^2+2s-1}\left(\frac{1}{s}\right)}$$

Simplificando

$$H(s) = \frac{s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \frac{s}{(s+1)^2(s+2)}$$

El sistema es estable ya que sus polos se encuentran a la izquierda del eje $i\omega$.

9. Calcule la transferencia $H(s)$ y la respuesta impulsional $h(t)$ de los siguientes sistemas realimentados. En cada caso indique si son estables (a entradas causales) graficando el diagrama de polos y ceros.



10. Hallar la solución de la siguiente ecuación **diferencial** con condiciones iniciales: $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 8.e^{-2t}, y'(0) = y(0) = 1$ **para** $t > 0$. Verifique utilizando el teorema de valor inicial y final los valores de $y(t)$ para cero e infinito.

RTA: Se utiliza la transformada unilateral de Laplace donde: $y'(t) \longrightarrow s.Y(s) - y(0)$, $y''(t) \longrightarrow s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$. Reemplazando en la ecuación diferencial y teniendo en cuenta que $8.e^{-2t} \longrightarrow \frac{8}{s+2}$ resulta:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4\left[sY(s) - y(0)\right] + 4Y(s) &= \frac{8}{s+2} \\ Y(s)\left[s^2 + 4s + 4\right] &= \frac{8}{s+2} + (s+5) \\ Y(s)(s+2)^2 &= \frac{8}{s+2} + (s+5) \\ Y(s) &= \frac{8}{(s+2)^3} + \frac{s}{(s+2)^2} + \frac{5}{(s+2)^2} \end{aligned}$$

Antitransformando término a término, recordando que $t^n.u(t) \longrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$, la propiedad de desplazamiento en s y la propiedad de derivación para el segundo término, obtenemos

$$y(t) = 4.t^2.e^{-2t} + \left(t.e^{-2t}\right)' + 5.t.e^{-2t} = 4.t^2.e^{-2t} + \left(e^{-2t} - 2te^{-2t}\right) + 5.t.e^{-2t}$$

$$\boxed{y(t) = 4.t^2.e^{-2t} + e^{-2t} + 3.t.e^{-2t}}$$

Se verifica el teorema del valor final ya que $y(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $s.Y(s) \to 0$ cuanto $s \to 0$

Aplicación en MatLab

```
%TRANSFORMADA DE LAPLACE
%Para la aplicación de la transformada de Laplace se utilizarán funciones
%del toolbox "Control system" de Matlab (TF, POLE, ZERO, PZMAP, FREQS), que
%permiten un análisis que parte desde el dominio frecuencial (Transformada
%conocida), pudiéndose estimar las repuestas numéricas en el dominio
%temporal (IMPULSE, STEP). Para realizar un análisis que tenga como origen
%del dominio temporal (función temporal conocida), puede utilizarse el
%toolbox "Symbolic Math", que permite trabajar en forma simbólica (LAPLACE,
%ILAPLACE)

%TOOLBOX CONTROL-----------------------------------------------------------
%Transferencia de segundo Orden
Num=[1];
Den=[1 4 2];
H=tf(Num,Den)

%Análisis de polos y ceros
pole(H)
zero(H)
figure(1);
pzmap(Num,Den);

%Cálculo de los residuos
residue(Num,Den)

%Respuesta en frecuencia
figure(2);
w=0:0.1:100;
freqs(Num,Den,w);

%Respuesta impulsional
figure(3);
t=0:0.1:5;
impulse(H,t),grid;

%Respuesta indicial
figure(4);
step(H,t),grid;


%TOOLBOX SIMBOLICO---------------------------------------------------------
%Antitransformada
syms s
%Función transferencia H(s)
H=(s+1)/(s+3)
%Respuesta impulsional h(t)
h=ilaplace(H)

%Transformada
syms t
%Respuesta impulsional h(t)
h=2*exp(-3*t)*cos(10*t)
%Transformada de Laplace H(s)
H=laplace(h)
```

Capítulo 11

Transformada Z

11.1. Introducción

La transformada Z cumple un rol muy similar a la transformada de Laplace pero en el dominio discreto. Así como en el caso continuo, esta transformada permite un análisis de las señales o funciones transferencia mediante un diagrama de polos y ceros. También posee ventajas de convergencia con respecto a la transformada discreta de Fourier, ya que permite transformar funciones cuya energía no es finita. Veremos además el cálculo del espectro mediante un análisis geométrico en el diagrama de polos y ceros, y verificaremos con facilidad la periodicidad del mismo. Concluiremos el capítulo con ejemplos de aplicación en sistemas lineales y una introducción al diseño de filtros digitales. Los conceptos que se utilizarán están muy ligados a los de series de Laurent y cálculos de integrales por el método de los residuos.

11.2. Definición de la transformada

La transformada Z de una señal $x[n]$ se define como:

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \tag{11.1}$$

donde $z \in \mathbb{C}$. Así como en la transformada de Laplace descompusimos a la variable compleja s en su parte real e imaginaria $s = \sigma + i\omega$, en este el caso nos interesa el módulo ρ y la fase Ω de z: $z = \rho.e^{i\Omega}$. Como vemos la transformada Z no es más que un desarrollo en series de Laurent (con $z_0 = 0$). La transformada de un secuencia $x[n]$ es una función de variable compleja de la cual podemos graficar su diagrama de polos y ceros. Como para cualquier serie de Laurent centrada en el origen, la región de convergencia está limitada por circunferencias concéntricas. Los polos son los que determinan los límites de las mismas. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 11.2.1 *Calcular la transformada Z de las siguientes secuencias:*

1. $x[n] = a^n u[n]$ *con* $a \in I\!R$ *y* $|a| < 1$.

2. $x[n] = -a^n u[-n-1]$ *con* $a \in I\!R$ *y* $1 > a > 0$.

1. *La secuencia es una exponencial decreciente causal (derecha): Si* $1 > a > 0$ *es monótonamente decreciente y si* $0 > a > -1$ *es una exponencial decreciente alternada. Utilizando la definición (11.1), escribimos:*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

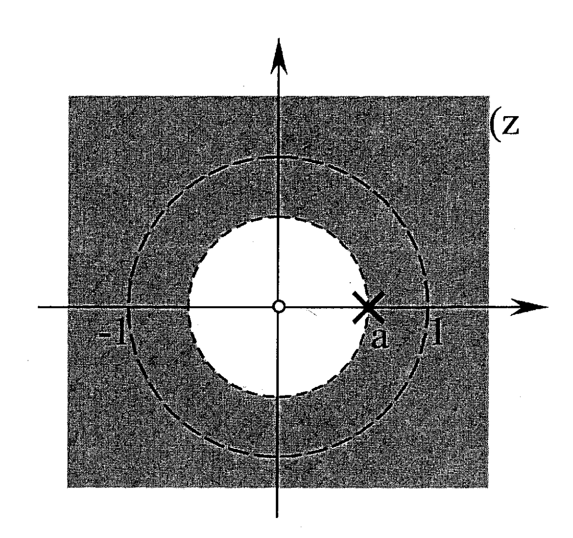


Figura 11.1: Región de convergencia y diagrama de polos y ceros.

Mediante la convergencia de la serie geométrica de razón q, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q} \qquad \forall q$$

si $n \to \infty$, *entonces:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad |q| < 1$$

Aplicando la serie geométrica con $q = a/z$, *hallamos la convergencia como*

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

Vemos que $X(z)$ tiene un cero en el origen y un polo en $z = a$. Como a es un número real, graficamos el diagrama de polos y ceros en la Fig. 11.1, donde además se dibuja en línea punteada la circunferencia de radio unitario $|z| = 1$ cuyo significado se explicará en detalle más adelante; pero que adelantamos como el equivalente al eje imaginario $i\omega$ en la transformada de Laplace.

2. *Para el segundo caso tenemos una exponencial creciente, pero en este caso la señal es anticausal (izquierda). Si $1 > a > 0$ es monótonamente creciente, si $0 > a > -1$ es alternada. Aplicando nuevamente la definición y utilizando la convergencia de una serie de potencias:*

$$\begin{aligned} X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{z}{z-a} \qquad |z| < |a| \end{aligned}$$

La transformada para este caso coincide con la anterior y solo difiere en la región de convergencia. Así como en el caso de la transformada de Laplace es indispensable que la transformada Z este acompañada de la región de convergencia para que la relación $x[n] \longrightarrow X(z)$ sea unívoca. Veamos el diagrama de polos y ceros correspondiente en la Fig. 11.2.

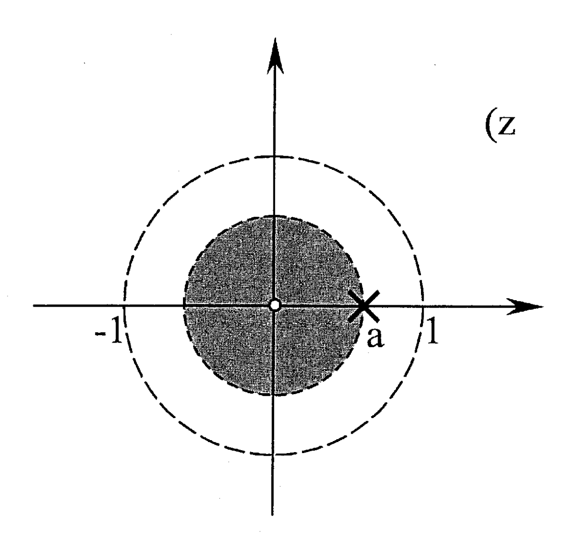


Figura 11.2: Región de convergencia y diagrama de polos y ceros.

11.3. Propiedades de la región de convergencia: ROC

Para hallar la ROC se pueden utilizar algunas propiedades muy conceptuales. En los dos ejemplos anteriores, donde se analizó para cada caso la convergencia de las series, lo que

limita la región de convergencia es el módulo de z: $|z| = \rho$. Recuerde que la transformada Z existe si la serie de Laurent con centro en el origen es convergente para un conjunto de valores de z. Los puntos para los cuales la serie es convergente se denomina región de convergencia (ROC). Entonces, todos estos puntos de la ROC están condicionados por circunferencias concéntricas $|z| = \rho_0$. Podemos mencionar sus propiedades:

1. La ROC no contiene polos. Esto es una consecuencia directa de la definición de polo. Como vimos, la ROC son los valores de z para los cuales la serie converge. Como evidentemente sobre el polo esto no sucede, el polo $z = p_0$ y la circunferencia $|z| = |p_0|$ no pueden pertenecer a la ROC.

2. Si $x[n]$ es una señal de duración finita ($x[n] = 0, n_2 > n > n_1, n_1 < n_2$) entonces la ROC es todo el plano z exceptuando posiblemente $z = 0$ o $z = \infty$. Esto es inmediato ya que la serie tiene un número finito de términos.

3. Si $x[n]$ es una señal derecha ($x[n] = 0, n < n_1$) entonces la ROC es del tipo $|z| > \rho_0$, donde el ρ_0 es la parte real del polo que más lejano al origen. Como la señal es derecha, la serie posee términos de Laurent (potencias negativas) y por lo tanto la ROC es hacia afuera.

4. Si $x[n]$ es una señal izquierda ($x[n] = 0, n < n_1$) entonces la ROC es del tipo $|z| < \rho_0$, donde el ρ_0 es la parte real del polo que más cercano al origen. Como la señal es izquierda, la serie posee términos de Taylor (potencias positivas) y por lo tanto la ROC es hacia adentro.

5. Si $x[n]$ es una señal bilateral (duración infinita) la ROC es del tipo $\rho_1 < |z| < \rho_2$ donde ρ_1 y ρ_2 son la parte real de dos polos de $X(z)$. De esta manera la ROC es un anillo. Una señal bilateral se puede descomponer en una señal derecha más otra izquierda. De esta manera, y por linealidad, la intersección de las ROC pueden conformar un anillo.

11.4. Relación entre la Transformada Z y la DFT

Para analizar la relación que existe entre la transformada Z y la transformada de Fourier para señales discretas, escribamos la definición (11.1), pero reemplacemos $z = \rho.e^{i\Omega}$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[n]\rho^{-n}}_{x_1[n]} e^{-i\Omega n} = X_1(\Omega)$$

Vemos que la transformada Z es la transformada de Fourier de la señal $x[n]$ multiplicada por una exponencial ρ^{-n}. Esta exponencial es la encargada de que la serie sea convergente. Para esto, la única variable a modificar es $\rho = |z|$, y es la que, como vimos, impone la ROC.

Note además que si colocamos $\rho = 1$, la transformada Z es igual a la transformada de Fourier:

$$X(\Omega) = X(z = 1.e^{i\Omega})$$

Los puntos para los cuales $\rho = 1$ son $|z| = 1$: la circunferencia de radio unitario dibujada intencionalmente en los diagramas de polos y ceros anteriores. Si la circunferencia unitaria está incluida en la ROC, esto implica que reemplazando z por $e^{i\Omega}$ en la transformada Z, obtenemos la transformada de Fourier. En el primer ejemplo analizado, la secuencia era una exponencial decreciente causal , y por lo tanto su ROC (hacia afuera) incluía a $|z| = 1$. Por lo tanto:

$$x[n] = a^n u[n], |a| < 1 \quad \longrightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z-a} \quad \rho > |a|$$
$$x[n] = a^n u[n], |a| < 1 \quad \longrightarrow \quad X(\Omega) = \frac{e^{i\Omega}}{e^{i\Omega} - a} = \frac{1}{1 - a.e^{-i\Omega}}$$

En el segundo caso la exponencial era creciente, y por lo tanto su energía es infinita: No existe la transformada de Fourier, pero si la transformada Z. Vemos claramente como la ROC no incluye a la circunferencia de radio unitario.

Así como en el caso de tiempo continuo, en la transformada de Laplace, el eje $i\omega$ era el que 'representaba' a la transformada de Fourier, en tiempo discreto y en la transformada Z, el mismo papel lo juega la circunferencia de radio unitario. Al analizar el $X(\omega)$ en tiempo continuo recorríamos el eje $i\omega$ desde 0 a ∞. En el caso discreto, al analizar $X(\Omega)$ recorremos la circunferencia unitario en sentido antihorario: $z = 1.e^{i\Omega}$. La diferencia principal que se observa es que este recorrido será periódico, y el período comenzará al dar una vuelta completa de $\Omega = 2\pi$. Veremos más adelante como esta simple conclusión es la que evidencia la periodicidad del espectro de las las señales discretas.

11.5. La transformada inversa Z

Es imprescindible contar con un método rápido y efectivo para regresar desde una función $X(z)$ en el plano transformada, a su correspondiente $x[n]$ es el eje temporal. Para esto enumeramos cuatro posibilidades:

1. Utilizando tablas de transformadas.

2. Desarrollo en series de Laurent.

3. Descomposición en fracciones simples.

4. Utilizando una integral de línea resuelta por el método de los residuos.

Veamos cada posibilidad en detalle:

1. Como en las transformadas anteriores, se cuenta con tablas tabuladas de transformadas que son muy prácticas a la hora de requerir soluciones rápidas. Al final del capítulo encontrará un gran conjunto de funciones con sus respectivas transformadas. Este método sumado a la aplicación de propiedades, permite la antitransformación de la mayoría de las funciones que aparecen en la práctica.

2. Por la definición de la transformada Z vemos que si contamos con $X(z)$, podemos expandir esa función de variable compleja, en series de Laurent alrededor del origen, teniendo en cuenta la ROC descripta. Al hallar la serie, los coeficientes que acompañan a las potencias de z son los valores de $x[n]$. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 11.5.1 *Encuentre la antitransformada de $X(z)$*

$$X(z) = \frac{z}{(z+\frac{4}{3})(z-\frac{2}{3})} \qquad ROC: \frac{4}{3} > |z| > \frac{2}{3}$$

Dibujemos el diagrama de polos y ceros:

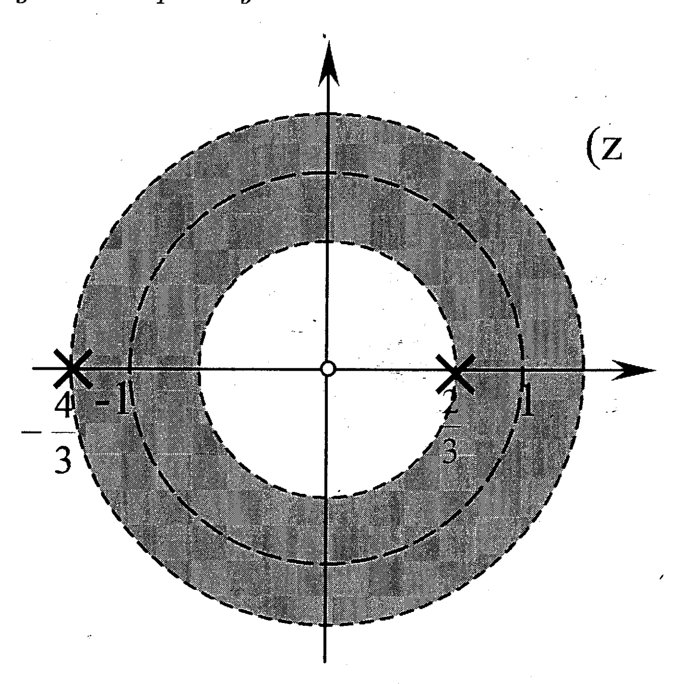


Figura 11.3: Diagrama de polos y ceros.

Para desarrollar en serie es conveniente descomponer a $X(z)$ en dos fracciones simples:

$$X(z) = \underbrace{\frac{1}{3(z-\frac{2}{3})}}_{X_1(z)} + \underbrace{\frac{2}{3(z+\frac{4}{3})}}_{X_2(z)}$$

Desarrollemos la primera fracción, con el polo en $z = 2/3$ y ROC $|z| > 2{,}3$, en serie de Laurent:

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{1}{3(z-\frac{2}{3})} = \frac{1}{3z(1-\frac{2}{3z})} = \frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3z}\right)^n \\ &= \frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n z^{-n-1} \\ &= \underbrace{\frac{1}{3}}_{x_1[1]} z^{-1} + \underbrace{\frac{1}{3}\frac{2}{3}}_{x_1[2]} z^{-2} + \underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2}_{x_1[3]} z^{-3} + \cdots \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$x_1[n] = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$$

La segunda fracción con el polo en $z = \frac{4}{3}$ la debemos desarrollar por Taylor (región de convergencia hacia adentro), por lo tanto:

$$\begin{aligned} X_2(z) &= \frac{2}{3(z+\frac{4}{3})} = \frac{2}{4(1+\frac{3z}{4})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-3z}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-3}{4}\right)^n z^n \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}}_{x_2[0]} z^0 + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{-3}{4}\right)}_{x_2[-1]} z^1 + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{-3}{4}\right)^2}_{x_2[-2]} z^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{-3}{4}\right)^3}_{x_2[-3]} z^2 + \cdots \end{aligned}$$

observamos que:

$$x_2[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{-3}{4}\right)^{-n} u[-n]$$

finalmente sumamos ambos resultados:

$$x[n] = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} u[n-1] + \frac{1}{2}\left(\frac{-3}{4}\right)^{-n} u[-n]$$

El método de las series permite conceptualizar la transformada Z y comprender en su totalidad la relación entre la ROC y la señal temporal.

3. La descomposición en fracciones simples es siempre una alternativa tentadora. Las funciones $X(z)$ en la práctica son generalmente un cociente de polinomios. Para la descomposición debemos asegurar que el orden del denominador es mayor que el del numerador; en caso contrario se debe realizar, como siempre, el cociente de polinomios para conseguir este requerimiento. Las fracciones más comunes que se pueden encontrar son polos simples, polos dobles o polos complejos conjugados. Estas fracciones poseen las siguientes antitransformadas:

   Polos simples en $z = a$:

$$\begin{array}{rcll} x[n] & \longrightarrow & X(z) & \\ a^n u[n] & \longrightarrow & \dfrac{z}{z-a} & |z| > |a| \\ -a^n u[-n-1] & \longrightarrow & \dfrac{z}{z-a} & |z| < |a| \end{array}$$

   Polos dobles en $z = a$:

$$\begin{array}{rcll} x[n] & \longrightarrow & X(z) & \\ n.a^n u[n] & \longrightarrow & \dfrac{az}{(z-a)^2} & |z| > |a| \\ -n.a^n u[-n-1] & \longrightarrow & \dfrac{az}{(z-a)^2} & |z| < |a| \end{array}$$

   Polos complejos conjugados en $z = \rho_0 e^{\pm i\Omega_0}$:

$$\begin{array}{rcll} x[n] & \longrightarrow & X(z) & \\ \rho_0^n cos(\Omega_0 n)u[n] & \longrightarrow & \dfrac{z(z-\rho cos(\Omega_0))}{z^2 - 2\rho_0 cos(\Omega_0)z + \rho_0^2} & |z| > \rho_0 \\ \rho_0^n sen(\Omega_0 n)u[n] & \longrightarrow & \dfrac{z\rho sen(\Omega_0)}{z^2 - 2\rho_0 cos(\Omega_0)z + \rho_0^2} & |z| > \rho_0 \end{array}$$

   en donde si los numeradores no son exactamente iguales se deberán utilizar las propiedades de linealidad (11.6.1) o de desplazamiento temporal (11.6.2) de la próxima sección.

4. El último método permite calcular la antitransformada realizando una integración en el campo complejo que se resuelve utilizando residuos. La integral a plantear es la siguiente:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \qquad (11.2)$$

   Donde la curva C encierra a todos los polos de $X(z)$. Recuerde que este tipo d eintegrales resultan en un número complejo. en este caso, al integrar z^{n-1} el resultado es **una función de n.**

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Sabemos que la transformada Z se puede interpretar como la Transformada de Fourier de la función a transformar multiplicada por una exponencial discreta ρ^{-n}. Si $z = \rho e^{i\Omega}$, entonces:

$$X(\rho e^{i\Omega}) = \Im\{x[n]\rho^{-n}\}$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier en ambos miembros,

$$\begin{aligned}
x[n]\rho^{-n} &= \Im^{-1}\{X(\rho e^{i\Omega})\} \\
x[n] &= \rho^{n}.\Im^{-1}\{X(\rho e^{i\Omega})\} \\
x[n] &= \rho^{n}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi} X(\rho e^{i\Omega})e^{i\Omega n}d\Omega \\
x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi} X(\rho e^{i\Omega})\left(re^{i\Omega}\right)^{n}d\Omega
\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variables con $z = \rho e^{i\Omega}$, $dz = i\Omega\rho e^{i\Omega}d\Omega = izd\Omega$, y como la integración es sobre un periodo de 2π en Ω (una vuelta en el plano z), podemos escribir:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=\rho} X(z)z^{n}\frac{d\Omega}{iz}$$

finalmente:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} X(z)z^{n-1}dz$$

($\Longleftarrow$)

Este método se puede aplicar formalmente para encontrar $x[n]$ para todo valor de n, aunque en la práctica nos encontramos con el siguiente inconveniente. En realidad obtener la señal $x[n]$ implica resolver la integral para cada valor de n en particular. Al calcular por residuos la integral (11.2) debemos tener en cuenta que, para algunos valores de n negativos, el término z^{n-1} puede ir generando polos de distinto orden. Esto quiere decir que hay que prestar especial atención en estos casos, ya que los resultados de la integral cambian. Para calcular un residuo en un polo doble debemos calcular una derivada, para un polo triple una derivada segunda y así sucesivamente. Es por eso que comúnmente se aplica el método de los residuos para señales causales, y por lo tanto se lo analiza para $n \geq 0$. A lo sumo puede ser necesario calcular algún valor de $x[n]$ en forma individual. Al margen de estos casos puntuales de valores de n

que pueden generar polos en el origen de distinto orden, en general luego de detectar estas particularidades el cálculo se puede realizar en forma genérica para valores de n superiores. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 11.5.2 *Calcular la antitransformada de $X(z)$ suponiendo $x[n]$ causal (ROC hacia afuera):*

$$X(z) = \frac{1}{(z-\frac{1}{5})(z+\frac{1}{2})^2} \quad \rho > \frac{1}{2}$$

Veamos el diagrama de polos y ceros:

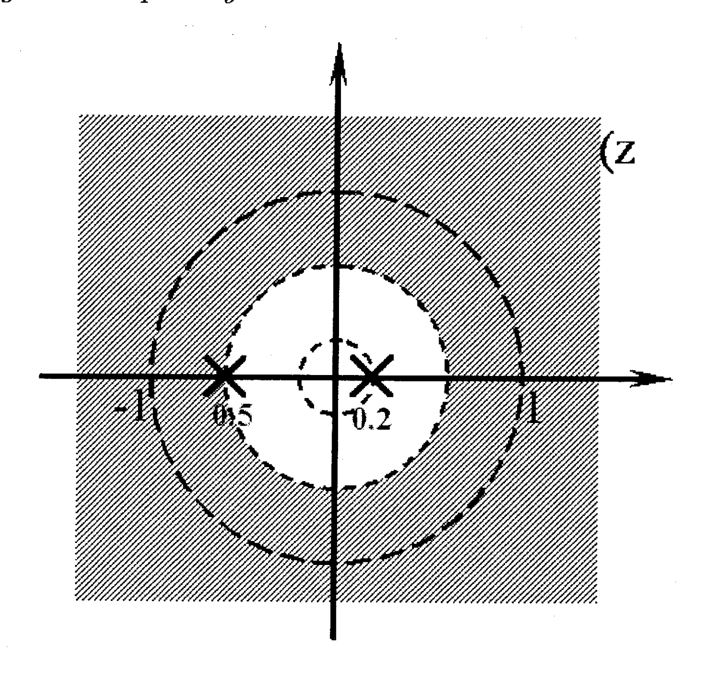


Figura 11.4: Diagrama de polos y ceros.

La integral a resolver es la siguiente:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^{n-1}}{(z-\frac{1}{5})(z+\frac{1}{2})^2} dz$$

La integral se resuelve calculando los residuos en los polos $z = 1/5$, $z = -1/2$. Para el caso particular en que $n = 0$ tenemos además un polo simple en el origen. Comencemos entonces calculando $x[n = 0]$:

$$x[0] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z(z-\frac{1}{5})(z+\frac{1}{2})^2} dz = Res_0 + Res_{\frac{1}{5}} + Res_{-\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
Res_0 &= \lim_{z\to 0} \frac{z}{z(z-\frac{1}{5})(z+\frac{1}{2})^2} = -20 \\
Res_{\frac{1}{5}} &= \lim_{z\to \frac{1}{5}} \frac{(z-\frac{1}{5})}{z(z-\frac{1}{5})(z+\frac{1}{2})^2} = \frac{500}{49} \\
Res_{-\frac{1}{2}} &= \lim_{z\to \frac{1}{2}} \left(\frac{(z+\frac{1}{2})^2}{z(z-\frac{1}{5})(z+\frac{1}{2})^2}\right)' = \frac{480}{49}
\end{aligned}
$$

$$
x[0] = -20 + \frac{500}{49} + \frac{480}{49} = 0
$$

Para $n > 0$:

$$
x[n] = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{n-1}}{(z-\frac{1}{5})(z+\frac{1}{2})^2}dz = Res_{\frac{1}{5}} + Res_{-\frac{1}{2}}
$$

y por lo tanto debemos calcular solo dos residuos:

$$
\begin{aligned}
Res_{\frac{1}{5}} &= \lim_{z\to \frac{1}{5}} \frac{z^{n-1}(z-\frac{1}{5})}{(z-\frac{1}{5})(z+\frac{1}{2})^2} = \frac{100}{49}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\
Res_{-\frac{1}{2}} &= \lim_{z\to \frac{1}{2}} \left(\frac{z^{n-1}(z+\frac{1}{2})^2}{(z-\frac{1}{5})(z+\frac{1}{2})^2}\right)' = \frac{20}{7}n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{240}{49}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

finalmente:

$$
x[n] = \left[\frac{100}{49}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{20}{7}n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{240}{49}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]u[n-1]
$$

11.6. Propiedades

Los métodos de antitransformación analizados en la sección anterior pueden necesitar del complemento de algunas propiedades para poder ser simplificados. Conocer las propiedades de las transformadas permite simplificar cálculos y nos ayudará en la interpretación de las aplicaciones que veremos en la sección 11.8. Para todos los casos siguientes utilizaremos:

$$
\begin{aligned}
x[n] &\longrightarrow X(z) \\
x_1[n] &\longrightarrow X_1(z) \\
x_2[n] &\longrightarrow X_2(z)
\end{aligned}
$$

11.6.1. Linealidad

Esta conocida propiedad permite colocar una combinación lineal de funciones a la entrada, y obtener el siguiente resultado:

$$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \longrightarrow \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 11.6.1 *Calcule la transformada Z de* $x[n] = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n u[n] - 6.(-2)^n u[-n-1]$
Aplicando las siguientes transformadas:

$$\begin{array}{rcll} a^n u[n] & \longrightarrow & \dfrac{z}{z-a} & |z| > |a| \\ -a^n u[-n-1] & \longrightarrow & \dfrac{z}{z-a} & |z| < |a| \end{array}$$

y por linealidad obtenemos

$$3\left(\frac{2}{5}\right)^n u[n] - 6.(-2)^n u[-n-1] \longrightarrow \frac{3z}{z-\frac{2}{5}} + \frac{6z}{z+2} \quad 2 > |z| > \frac{2}{5}$$

11.6.2. Desplazamiento en n

Es muy común encontrar en los diagramas en bloques de sistemas discretos, un bloque de retraso denominado z^{-1}. Veamos la siguiente propiedad para entender este caso:

$$x[n-n_0] \longrightarrow z^{-n_0}X(z)$$

Vemos que, desplazar la señal en el tiempo una muestra a la izquierda (retrasar), equivale a multiplicar su transformada por z^{-1}:

$$x[n-1] \longrightarrow z^{-1}X(z)$$

y adelantar una muestra es

$$x[n+1] \longrightarrow z.X(z)$$

Esta propiedad será utilizada en todas las aplicaciones que veremos en la siguiente sección. Asimismo facilita el cálculo de muchas antitransformadas ya que podemos multiplicar o dividir por z^n (con un n adecuado) para quitar los polos del origen y trabajar sin los mismos en el cálculo por residuos.

11.6.3. Desplazamiento en frecuencia

Esta propiedad puede ser llamada también *Multiplicación por una exponencial* debido a que su enunciado es el siguiente:

$$z_0^n x[n] \longrightarrow X(\frac{z}{z_0}) \quad ROC' = z_0.ROC$$

en donde, para el caso particular en que $z_0 = e^{i\Omega_0}$, obtenemos

$$e^{i\Omega_0 n}x[n] \longrightarrow X\left(e^{-i\Omega_0}z\right) \quad ROC' = ROC$$

Esto muestra que al multiplicar la señal temporal discreta por una exponencial compleja, los polos y ceros de su transformada *rotan* un ángulo igual a Ω_0. Observe la figura 11.5.

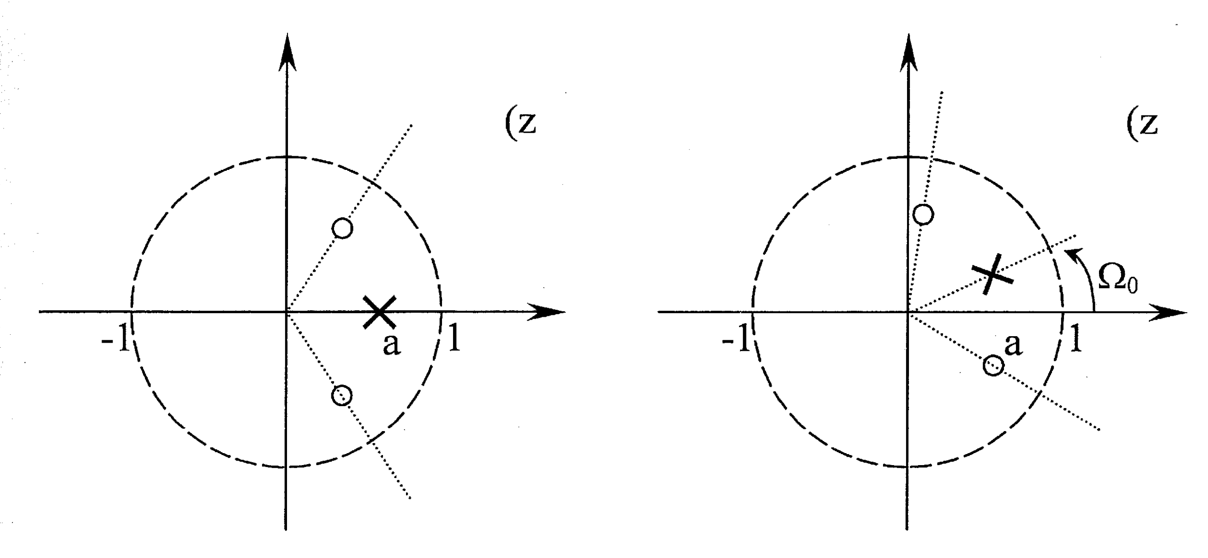


Figura 11.5: Efecto de rotación de los polos y ceros.

Si se utiliza una exponencial con $|z_0| \neq 1$, entonces no solo los ceros y los polos rotan sino que además se acercan o se alejan del origen en un factor igual al $|z_0|$.

Note que si $x[n]$ es una señal real, su diagrama de polos y ceros debe mostrar una simetría con respecto al eje real (los polos y ceros fuera del eje real deben poseer sus conjugados). En el caso de multiplicar a $x[n]$ por una exponencial compleja y convertir la señal temporal real en una señal temporal compleja, su diagrama de polos y ceros ya no ofrece esta simetría, tal como se ve en la figura 11.5.

11.6.4. Inversión temporal

Esta propiedad impone la siguiente transformación:

$$x[-n] \longrightarrow X(\frac{1}{z}) \quad ROC' = \frac{1}{ROC}$$

La señal $x[-n]$ implica espejar a la señal temporal con respecto al punto $n = 0$, esto provoca que los polos y los ceros que antes se encontraban dentro de la circunferencia

unitaria salgan y viceversa. El estudio de la función inversión fue realizado en detalle en el capítulo correspondiente a Mapeo Conforme (3.7).

11.6.5. Diferenciación

Es natural que la diferenciación de la señal temporal discreta $x[n]$ no exista, sin embargo si se puede derivar su transformada, obteniéndose la siguiente propiedad:

$$nx[n] \longrightarrow -z\frac{\partial X(z)}{\partial z} \quad ROC' = ROC$$

Veamos un ejemplo directo de aplicación:

Ejemplo 11.6.2 *Halle la Transformada Z de $x[n] = n.a^n u[n]$.*
Utilizamos la siguiente transformación:

$$a^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

donde al multiplicar por n obtenemos

$$na^n u[n] \longrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) \quad |z| > |a|$$

$$na^n u[n] \longrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad |z| > |a|$$

11.6.6. Convolución

Nuevamente esta propiedad es el eje para comenzar a analizar sistemas LTI discretos. Estos sistemas poseen la ya conocida relación entre entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ dada fundamentalmente en el tiempo por la convolución entre la entrada y la respuesta impulsional $h[n]$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

donde el asterisco $*$ implica la operación de convolución:

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

La propiedad de convolución de la Transformada Z, previsiblemente, dice lo siguiente:

$$x[n] * h[n] \longrightarrow X(z)H(Z) \quad ROC' = ROC_x \cap ROC_h$$

Note que la ROC resultante es la intersección de las ROC. Además podemos intuir la existencia de una *función transferencia* ahora para sistemas discretos (similar al $H(s)$) dada por

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}}$$

Estudiaremos muy de cerca esta función transferencia y veremos cómo la misma caracteriza unívocamente al sistema LTI que representa.

Veamos un ejemplo ilustrativo:

Ejemplo 11.6.3 *Un sistema LTI discreto y causal posee una respuesta impulsional dada por:*

$$h[n] = \frac{1}{2}^n u[n]$$

Halle su respuesta indicial.

Para resolver este problema debemos recordar que la respuesta indicial es la salida del sistema cuando en la entrada se coloca un escalón $x[n] = u[n]$. Podemos fácilmente hallar la salida en forma temporal utilizando la sumatoria de convolución, con $x[n] = u[n]$:

$$\begin{aligned} u[n] * h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}^k = \frac{1 - \frac{1}{2}^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(2 - \frac{1}{2}^n\right) u[n] \end{aligned}$$

donde se utilizó la convergencia para una serie geométrica.

Sin embargo podemos utilizar la Transformada Z y la propiedad de convolución. Recordemos que

$$\frac{1}{2}^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \quad |z| > |\frac{1}{2}|$$

cuyo diagrama de polos y ceros posee un cero en el origen y un único polo en $z = 1/2$ (dentro de la circunferencia de radio unitario), como se dibuja en la figura 11.6.

Note además como la región de convergencia es hacia afuera de la circunferencia $|z| = 1/2$ y abarca a $|z| = 1$ asegurando la existencia de la respuesta en frecuencia del sistema $H(\Omega)$ y por lo tanto su estabilidad.

La transformada del escalón es

$$u[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad |z| > 1$$

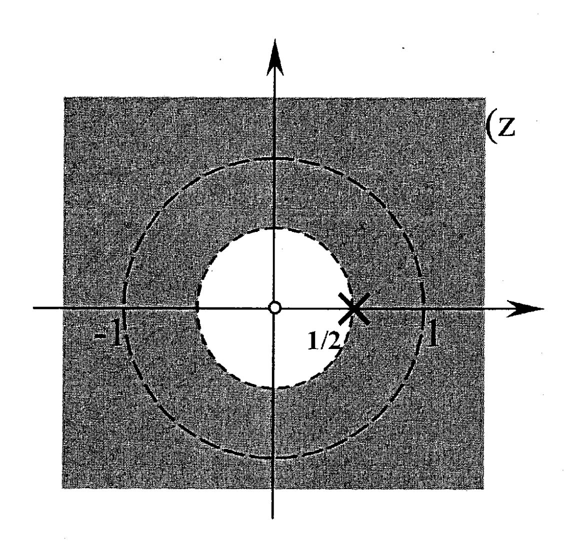


Figura 11.6: Diagrama de polos y ceros.

por lo tanto la salida y[n] es

$$y[n] = u[n] * h[n] \longrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{2}}\frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-1)}$$

Aplicando el método de los residuos podemos calcular:

$$Res_1 = \lim_{z\to 1} \frac{z^2.z^{n-1}(z-1)}{(z-\frac{1}{2})(z-1)} = 2 \quad n > 0$$

$$Res_{1/2} = \lim_{z\to \frac{1}{2}} \frac{z^2.z^{n-1}(z-\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z-1)} = -2.\frac{1}{2}^{n-1} \quad n > 0$$

por lo tanto confirmamos que la salida es, como se observa en la figura 11.7:

$$y[n] = Res_1 + Res_{1/2} = \left(2 - \frac{1}{2}^n\right) u[n]$$

La convolución entre señales discretas era relativamente más sencilla de comprender y realizar que las de tiempo continuo.

Aplicaremos a continuación la transformada Z para hacerla aun más simple. Como la convolución se convierte en un producto en el plano transformado, si ambas secuencias son finitas, este producto es directamente la multiplicación de polinomios. Es por esta razón que en algunos programas comerciales la multiplicación de polinomios se realiza directamente con la función convolución. Si las secuencias a convolucionar no son finitas, se requiere de la antitransformación para encontrar el resultado. Veamos un ejemplo:

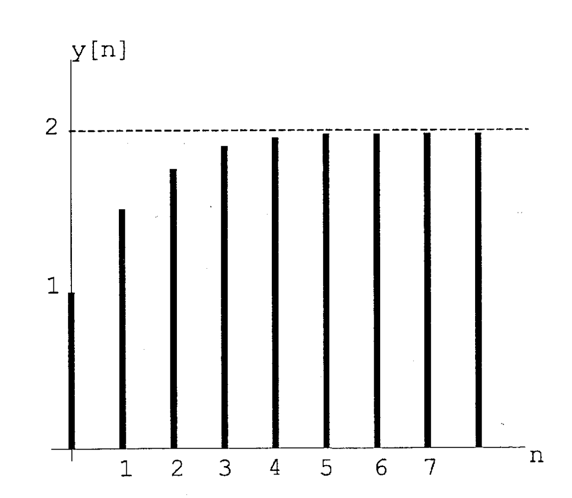


Figura 11.7: Respuesta temporal.

Ejemplo 11.6.4 *Convolucionar las secuencias* $x[n] = \{1, 1, 1, 1\}$ *con* $h[n] = \{1, 1, 1\}$, *donde el primer elemento corresponde a la muestra en la posición cero.*

Las señales $x[n]$ *y* $h[n]$ *se pueden escribir en términos de deltas desplazados como*

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] \\ h[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] \end{aligned}$$

La transformada del delta $\delta[n]$ *coincide con la analizada para la transformada discreta de Fourier:*

$$\delta[n] \longrightarrow 1$$

ya que por definición

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = 1$$

Si ahora deseamos transformar el delta desplazado, utilizamos la propiedad de desplazamiento (11.6.2) y obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta[n] &\longrightarrow 1 \\ \delta[n-1] &\longrightarrow z^{-1} \\ \delta[n-2] &\longrightarrow z^{-2} \\ \delta[n-3] &\longrightarrow z^{-3} \end{aligned}$$

Transformamos $x[n]$ *y* $h[n]$

$$\begin{aligned} x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] &\longrightarrow 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \\ h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] &\longrightarrow 1 + z^{-1} + z^{-2} \end{aligned}$$

y aplicamos la propiedad de convolución:

$$y[n] = x[n] * h[n] \longrightarrow Y(z) = X(z)H(z) = \left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right)\left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right)$$

Por lo tanto, realizando el producto de polinomios en Z:

$$Y(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}$$

Antitransformamos cada término utilizando la propiedad de linealidad y finalmente:

$$y[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + \delta[n] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5]$$

Note que la convolución entre las dos señales de forma rectangular resultó en una señal de forma triangular como era de esperar.

11.6.7. Teorema del valor inicial

Así como para la transformada de Laplace, en el caso de la transformada Z existe un teorema que impone la siguiente relación:

Teorema 11.6.1 *Si $x[n] = 0$ para $n < 0$, entonces*

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Recordando la definición de la transformada, y colocando el límite inferior de la sumaria en (11.1) en cero

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \ldots$$

Al aplicar el límite para $z \to \infty$ en ambos miembros comprobamos el teorema. Podemos destacar el siguiente punto: Si la señal $x[n]$ es causal y $x[0]$ es finito, entonces el límite cuando $z \to \infty$ también es finito, por lo tanto el polinomio que conforma $X(z)$ debe tener igual número de polos que de ceros.

11.7. La transformada Z unilateral

La transformada Z analizada hasta el momento es la conocida como bilateral. Siguiendo una analogía con lo visto para la transformada de Laplace, presentaremos a continuación la transformada Z unilateral:

$$X_U(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{11.3}$$

La mayoría de las propiedades se conservan con respecto a la bilateral, aunque aparece una diferencia fundamental en la propiedad de desplazamiento que permite la resolución de ecuaciones en diferencias con condiciones iniciales no nulas.

Veamos qué sucede al desplazar $x[n]$ hacia a la derecha una muestra:

$$\begin{aligned} X_U(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n} = x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-n} = x[-1] + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n-1} \\ X_U(z) &= x[-1] + z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[-1] + z^{-1}X_1(z) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$x[n-1] \longrightarrow z^{-1}X_1(z) + x[-1]$$

Siguiendo el mismo razonamiento podemos asegurar

$$x[n-2] \longrightarrow z^{-2}X_1(z) + x[-1]z^{-1} + x[-2]$$

y genéricamente para $n_0 > 0$:

$$x[n-n_0] \longrightarrow z^{-n_0}X_1(z) + x[-1]z^{-n_0+1} + x[-2]z^{-n_0+2} + \cdots + x[-n_0]$$

De manera similar podemos demostrar qué sucede al desplazar la señal hacia la izquierda, siempre con $n_0 > 0$:

$$x[n+n_0] \longrightarrow z^{n_0}X_1(z) - x[0]z^{n_0} - x[1]z^{n_0-1} - \cdots - z.x[n_0-1]$$

ya que utilizando la definición de la transformada unilateral, y realizando el cambio de variable $n + n_0 = k$ obtenemos

$$\begin{aligned} X_U(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n+n_0]z^{-n} = \sum_{k=n_0}^{\infty} x[k]z^{-(k-n_0)} = \\ &= z^{n_0}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} - \sum_{k=0}^{n_0-1} x[k]z^{-k}\right] = \\ &= z^{n_0}\left[X_U(z) - \left(x[0] + x[1]z^{-1} + \cdots + x[n_0-1]z^{-(n_0-1)}\right)\right] = \\ &= z^{n_0}X_U(z) - z^{n_0}x[0] - z^{n_0-1}x[1] - \cdots - z.x[n_0-1] \end{aligned}$$

La transformada unilateral, de esta manera, facilita la resolución de ecuaciones en diferencias con condiciones iniciales no nulas.

11.8. Aplicaciones

La transformada Z así como la transformada Discreta de Fourier son las herramientas fundamentales para el diseño y análisis de sistemas LTI discretos y por lo tanto las aplicaremos para resolver problemas concretos. Comenzaremos analizando sistemas de primer y segundo orden, sus diagramas en bloques y respuesta en frecuencia. Luego veremos un método práctico y gráfico para poder identificar la respuesta en frecuencia de un sistema del diagrama de polos y ceros de la función transferencia $H(z)$. Finalmente enunciaremos los dos tipos fundamentales de sistemas de filtrado FIR e IIR, de los cuales hablaremos en profundidad en el capítulo siguiente.

Los sistemas discretos presentan la ventaja de poder ser simulados con facilidad utilizando la computadora; es por eso que se recomienda al lector intentar acercarse mediante el uso de algún programa comercial al procesamiento de señales discretas que son muy simples de adquirir en forma digital.

11.8.1. Sistemas LTI

Los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) poseen la propiedad fundamental, que relaciona a la entrada $x[n]$ y a la salida $y[n]$ mediante la respuesta impulsional $h[n]$, dada por la convolución:

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n]} \tag{11.4}$$

Denominamos respuesta en frecuencia del sistema discreto $H(\Omega)$ a la transformada Discreta de Fourier de la respuesta impulsional $h[n]$. Utilizando la propiedad de convolución de la transformada Z a la ecuación (11.4) obtenemos

$$Y(z) = X(z).H(z)$$

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}} \tag{11.5}$$

y denominamos a $H(z)$ *función transferencia*. Mediante el estudio del diagrama de polos y ceros de la función transferencia podemos sacar algunas conclusiones del sistema que caracteriza:

- Como ya mencionamos en la sección 11.3 si la función de entrada que se transforma es derecha, la ROC está limitada por una circunferencia del tipo $|z| = \rho_0$ y es hacia afuera. Como en el caso del $H(z)$ lo que se transforma es la respuesta impulsional $h[n]$, si el sistema es causal, su ROC debe tener las características mencionadas. Por el contrario, un sistema anticausal tendrá una ROC de la forma $|z| < \rho_0$. Recordemos además que de la definición de la TZ podemos observar que si $h[n]$ es causal ($h[n] = 0, n < 0$) la serie de potencias que describe la transformada es una serie de Laurent centrada en $z = 0$, y su región de convergencia es hacia afuera; por supuesto limitada por el polo más lejano al origen.

- La variable utilizada por la transformada es $z = \rho e^{i\Omega}$ y recordamos que para el caso en que $\rho = 1$ la transformada Z se convierte en la transformada de Fourier. Es por eso que, como la ROC es el conjunto de puntos para los cuales la serie que representa la TZ existe y es convergente, si esta ROC incluye a la circunferencia de radio unitario $|z| = 1$, entonces existe $H(\Omega)$ (respuesta en frecuencia del sistema) y se obtiene a partir de la función transferencia $H(z)$ reemplazando z por $z = e^{i\Omega}$. La existencia de la respuesta en frecuencia asegura la estabilidad del sistema. De esta manera podemos asegurar que si los polos de la función transferencia se encuentran dentro de la circunferencia de radio unitario, y el sistema es causal, entonces el sistema es estable.

Comencemos analizando sistemas clásicos y simples que nos ayudarán a asentar los conceptos vertidos en esta sección. Para esto presentemos sistemas LTI descriptos por ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes (análogas a las ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes). Una ecuación genérica es del tipo

$$\sum_{k=0}^{N} a_k.y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k.x[n-k]$$

donde $x[n]$ es la entrada, $y[n]$ la salida y los a_k y b_k los coeficientes constantes. Transformando ambos miembros y teniendo en cuenta condiciones iniciales nulas, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) &= \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} X(z) \\ Y(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} &= X(z) \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} \end{aligned}$$

por lo tanto podemos despejar la función transferencia $H(z)$ como:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Esta función es siempre racional. Las raíces del numerador serán los ceros de la transferencia, y las raíces del denominador serán los polos. Analicemos dos casos típicos.

11.8.2. Sistemas de primer orden

Un sistema de primer orden presenta una ecuación en diferencias como la siguiente:

$$y[n] - a.y[n-1] = x[n]$$

donde $x[n]$ es la entrada e $y[n]$ la salida. Trasformando ambos miembros y despejando la función transferencia, obtenemos

$$Y(z)\left(1 - az^{-1}\right) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \qquad |z| > a$$

de donde se desprende que la constante a es la que fija la posición del único polo del sistema, y para asegurar estabilidad, ese polo debe residir dentro de la circunferencia de radio unitaria, por lo tanto $|a| < 1$. Observamos a continuación la antitransformada de $H(z)$ reconociendo la respuesta impulsional como:

$$h[n] = a^n u[n]$$

una exponencial discreta decreciente. Al asegurar la posición del polo, la ROC abarca a $|z| = 1$ y por lo tanto podemos hallar la respuesta en frecuencia del sistema simplemente reemplazando $z = e^{i\Omega}$:

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-i\Omega}}$$

Recordemos que si el valor de a es positivo, la exponencial es monótonamente decreciente, y su espectro de módulo está concentrado en las bajas frecuencias. Por el contrario, si el valor de a es negativo (siempre $|a| < 1$), la exponencial es decreciente pero alternada, concentrándose su energía en las altas frecuencias. Estos resultados pueden ser consultados en el ejemplo (8.3.1) del capítulo de transformada discreta de Fourier.

Note además que en la respuesta de módulo el valor de a juega un papel fundamental ya que fija el *ancho de banda del sistema.* Suponiendo $1 > a > 0$, si el valor de a está próximo a uno, la exponencial decreciente tendrá un decaimiento lento, el espectro de módulo estará concentrado en las bajas frecuencias y por lo tanto el ancho de banda será pequeño. Por el contrario, si el valor de a es cercano a cero, la exponencial decaerá rápidamente y el ancho de banda será grande. Si utilizamos el criterio de ancho de banda que impone la frecuencia para la cual la amplitud del espectro de módulo decae en $\sqrt{2}$ del máximo, podemos calcularlo como:

$$\begin{aligned} |H(\Omega = 0)| &= \frac{1}{1-a} \qquad 1 > a > 0 \\ |H(\Omega)| &= \frac{|H(\Omega = 0)|}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Operando algebráicamente y despejando el valor de Ω obtenemos:

$$\Omega = cos^{-1}\left(\frac{a^2 + 2a - 1}{2a}\right)$$

cuya gráfica en función de a se muestra en la figura 11.8

Grafiquemos además los espectros de módulo y fase para $1 > a > 0$ en la figura 11.9.

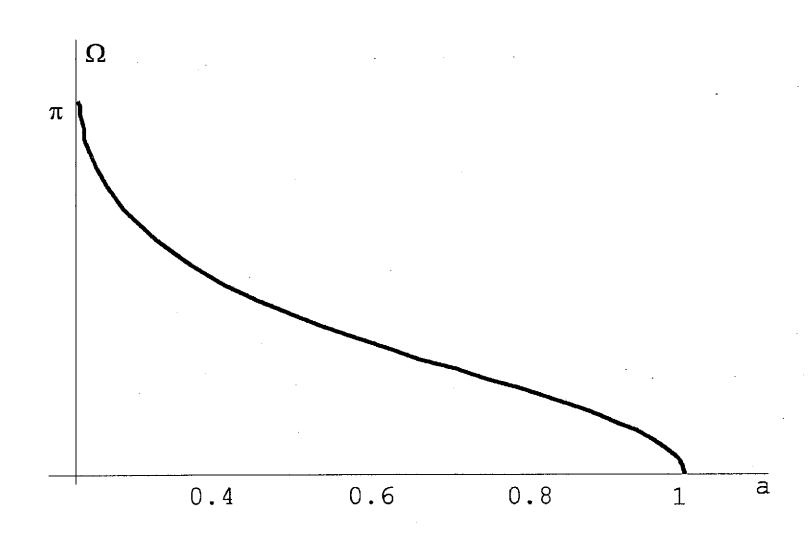


Figura 11.8: Relación entre la frecuencia angular Ω y la constante a.

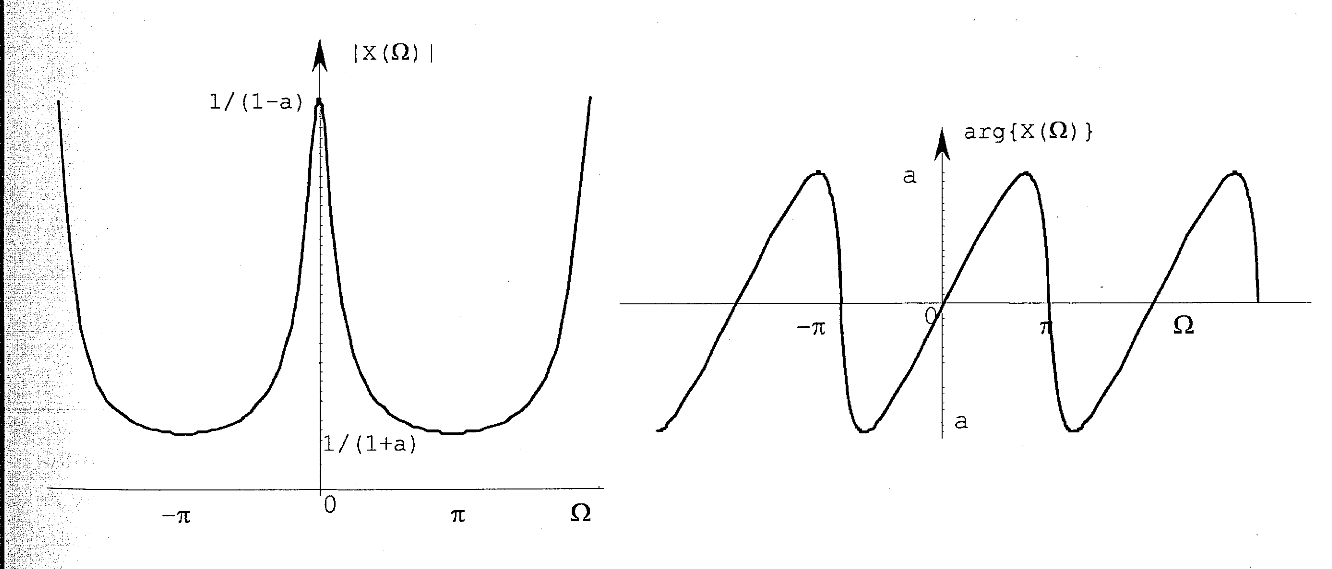


Figura 11.9: Espectros de módulo y fase.

11.8.3. Sistemas de segundo orden

En este caso la ecuación en diferencias que describe los sistemas LTI de segundo orden está dada por

$$y[n] - 2R.cos\phi.y[n-1] + R^2y[n-2] = x[n] \qquad 0 < R < 1 \quad ,0 \leq \phi \leq \pi$$

donde la limitación en el valor de R es la que asegurará la estabilidad del sistema como veremos a continuación. Apliquemos la transformada Z en ambos miembros y despejemos la función transferencia:

$$Y(z)\left(1 - 2R.cos\phi.z^{-1} + R^2z^{-2}\right) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 2R.cos\phi.z^{-1} + R^2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 2R.cos\phi.z + R^2}$$

despejamos las raíces del denominador obteniendo los dos polos del sistema:

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - Re^{i\phi})(z - Re^{-i\phi})}$$

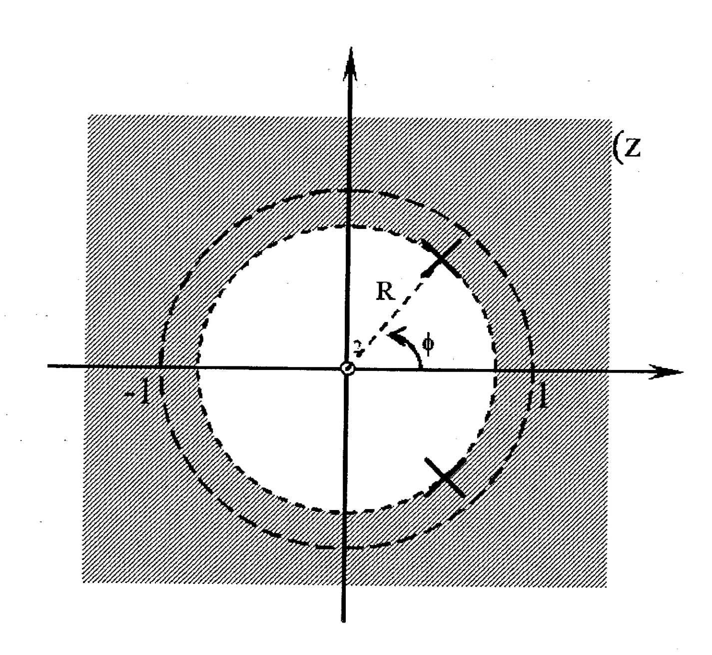


Figura 11.10: Diagrama de polos y ceros

Los valores de R son los que establecen la distancia de los polos al origen, y por lo tanto para asegurar la estabilidad del sistema los mismos deben residir dentro de la circunferencia de radio unitaria: $1 > R > 0$. Como es habitual en sistemas con respuesta impulsional real, los polos siempre aparecen complejos conjugados asegurando la simetría par del espectro de módulos (vea la sección 11.8.4). Asimismo podemos hallar la respuesta en frecuencia del sistema reemplazando z por $e^{i\Omega}$:

$$H(\Omega) = \frac{e^{i2\Omega}}{(e^{i\Omega} - Re^{i\phi})(e^{i\Omega} - Re^{-i\phi})}$$

Finalmente calculemos la respuesta impulsional $h[n]$ del sistema. Separemos en fracciones simples la transferencia $H(z)$:

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - Re^{i\phi})(z - Re^{-i\phi})} = \frac{A}{z - Re^{i\phi}} + \frac{B}{z - Re^{-i\phi}}$$

hallamos los valores de las contantes A y B:

$$A = \frac{R.e^{i2\phi}}{2i.sen\phi} \qquad B = \frac{-R.e^{-i2\phi}}{2i.sen\phi}$$

reemplazando obtenemos las dos fracciones simples:

$$H(z) = \frac{R.e^{i2\phi}}{2i.sen\phi}.\frac{1}{z - Re^{i\phi}} - \frac{R.e^{-i2\phi}}{2i.sen\phi}.\frac{1}{z - Re^{-i\phi}}$$

teniendo en cuenta la siguiente transformación

$$a^n u[n] \longrightarrow \frac{z}{z-a} \tag{11.6}$$

y observando que las fracciones simples que se desean antitransformar no poseen una z en el numerador, debemos multiplicar en 11.6 por z^{-1} para obtener

$$a^{n-1}u[n-1] \longrightarrow \frac{1}{z-a}$$

donde se utilizó la propiedad de desplazamiento temporal. De esta forma antitransformamos las dos fracciones simples reemplazando en cada caso el valor de a correspondiente, y sacando factor común obtenemos:

$$h[n] = \frac{R^n}{2i.sen\phi}\left(e^{i\phi(n+1)} - e^{-i\phi(n+1)}\right)u[n] = \frac{R^n sen\phi(n+1)}{sen\phi}u[n]$$

Por supuesto restan aclarar algunos detalles. Así como en el caso continuo, el sistema de segundo orden discreto presenta las tres alternativas ya conocidas:

- Sistema Sobreamortiguado: Este sería el caso en que los dos polos residan sobre el eje real dentro de la circunferencia de radio unitaria. La respuesta impulsional $h[n]$ sería simplemente la suma de dos exponenciales decrecientes.

- Amortiguamiento crítico: En el caso en que $\phi = 0$ los dos polos se superponen en un mismo punto sobre el eje real. De esta manera obtenemos:

  $$H(z) = \frac{z^2}{(z-R)^2}$$

  y el $h[n]$ es

  $$h[n] = (n+1)R^n u[n]$$

  Para el caso en que $\phi = \pi$ obtenemos nuevamente un polo doble pero en este caso en $z = -R$:

  $$H(z) = \frac{z^2}{(z+R)^2}$$

  y por lo tanto la respuesta impulsional quedaría como

  $$h[n] = (n+1)(-R)^n u[n]$$

- Sistema Subamortiguado: Este es el caso más interesante de analizar, ya que la respuesta al impulso presenta oscilaciones como lo indica claramente su ecuación que reproducimos por comodidad:

$$h[n] = \frac{R^n sen\phi(n+1)}{sen\phi} u[n]$$

Si tenemos en cuenta la posición de los polos en el diagrama, notamos que la respuesta impulsional presenta una oscilación cuya frecuencia depende directamente del valor de ϕ, o dicho de otro modo del *ángulo en que se hallan los polos con respecto al semieje real positivo.* Es así como para valores de ϕ cercanos a cero la oscilación del $h[n]$ será lenta, mientras que para valores de ϕ cercanos a π será más acelerada. Con respecto al término R^n que amortigua la oscilación, notamos que a medida que los polos se acercan a la circunferencia de radio unitaria $|z| = 1$, el amortiguamiento es menor (respuesta más rápida o más oscilante), sin embargo si los polos se acercan al origen se produce un amortiguamiento mayor.

Veamos algunos casos particulares de respuestas impulsionales para sistemas con amortiguamiento crítico y subamortiguados en la figura 11.11 y su equivalente frecuencial en la figura 11.12.

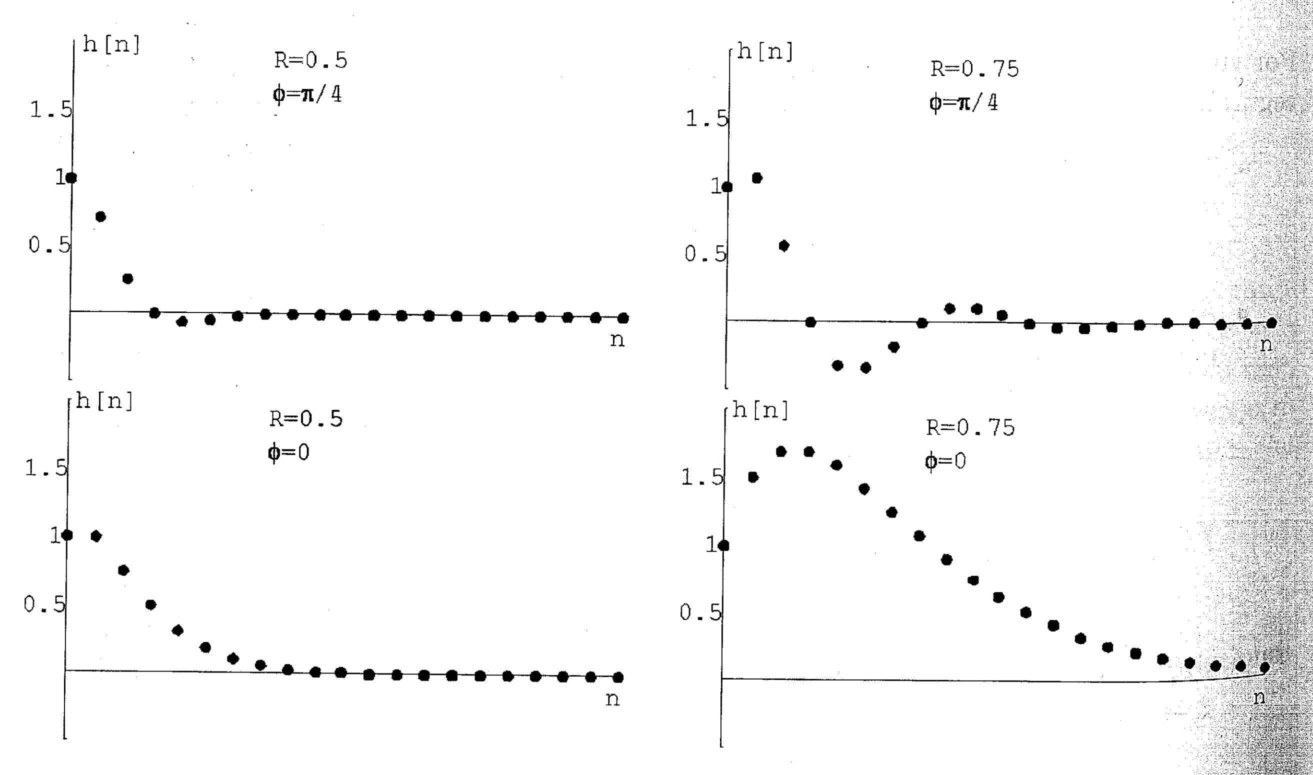


Figura 11.11: Respuestas temporales de sistemas críticos y subamortiguados.

Finalmente analice los gráficos de respuesta en frecuencia. Observe como los picos de la respuesta de módulo se hallan cerca de los ángulos $\Omega = \pm\pi/4$ donde se encuentran ubicados los polos de este ejemplo.

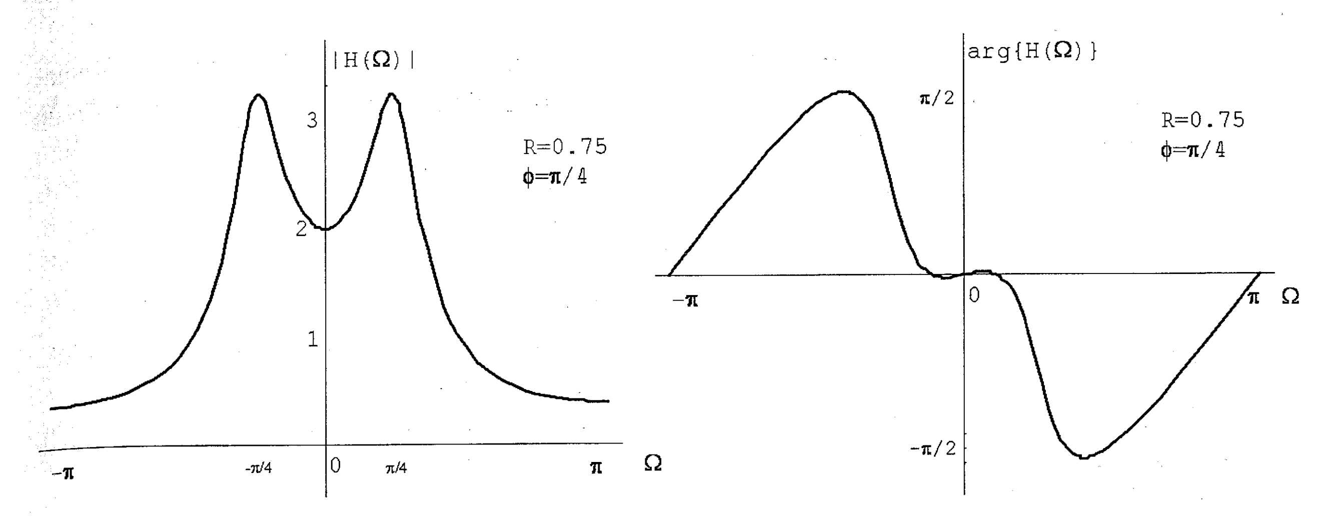


Figura 11.12: Respuesta en frecuencia.

11.8.4. Interpretación geométrica de la TDF del diagrama de polos y ceros

Así como la transformada de Fourier para señales discretas guarda una estrecha relación con su contraparte continua, hemos destacado sus principales diferencias; entre ellas se encuentra la periodicidad que presentan los espectros de las señales discretas. Cuando analizamos la transformada de Laplace resaltamos su utilidad como herramienta de diseño y análisis y mostramos cómo del diagrama de polos y ceros, y de una manera geométrica sencilla, podíamos derivar en el espectro de módulos y fase de la transformada de Fourier. El objetivo de esta sección es, a partir del diagrama de polos y ceros, pero en el plano de la transformada Z, derivar en el espectro de la transformada discreta de Fourier. Como acabamos de mencionar este espectro deberá ser siempre periódico.

La transformada Z se reduce a la transformada de Fourier si la analizamos para $|z| = 1$ o dicho de otra forma, sobre la circunferencia de radio unitaria, siempre y cuando la ROC la incluya. En el caso de la transformada de Laplace, la transformada de Fourier se reducía la eje imaginario $i\omega$, ya que $s = \sigma + i\omega$ y para $\sigma = 0$ obteníamos $s = i\omega$. Para analizar en ese caso la transformada de Fourier en forma geométrica, calculamos los módulos y las fases de los vectores que partían desde ceros y polos hasta el punto $i\omega$, sobre el eje imaginario, que se desea analizar. Concluimos también en que los polos y ceros debían aparecer en forma conjugada para asegurar la simetría par del espectro de módulos (al ser simétricos con respecto al eje real, al moverse por el eje imaginario hacia arriba o hacia abajo, los vectores coincidían).

Siguiendo en mismo razonamiento que para el caso continuo, planteamos una transferencia genérica factorizando el numerador y el denominador (ceros y polos respectivamente):

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = K_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_m)}$$

donde vemos que solo hay 'n' ceros y 'm' polos.

Cálculo de la respuesta de módulo Para calcular el módulo de la transferencia, recordamos que el módulo del producto entre dos número complejos es el producto de sus módulos, y el módulo del cociente es el cociente de sus módulos. Siguiendo el mismo razonamiento que para el caso continuo (10.8.5) obtenemos:

$$|H(z)| = |K_0| \frac{|z - z_1||z - z_2| \cdots |z - z_n|}{|z - p_1||z - p_2| \cdots |z - p_m|}$$

La resta entre dos números complejos da como resultado un vector que los une. El módulo de la resta es la distancia entre los complejos.

Si la circunferencia de radio unitario está incluida en la ROC de la transferencia $H(z)$, podemos calcular la respuesta en frecuencia reemplazando z por $e^{i\Omega}$:

$$|H(\Omega)| = |K_0| \frac{|e^{i\Omega} - z_1||e^{i\Omega} - z_2| \cdots |e^{i\Omega} - z_n|}{|e^{i\Omega} - p_1||e^{i\Omega} - p_2| \cdots |e^{i\Omega} - p_m|}$$

Para cada valor de Ω los puntos $e^{i\Omega}$ representan vectores sobre la circunferencia de radio unitaria $|z| = 1$ ubicados a un ángulo Ω del semieje positivo real. Para el numerador hay que calcular el producto entre las distancias desde cada cero al punto $e^{i\Omega}$ en cuestión. Luego hay que dividir por el producto de las distancias de cada polo al punto $i\omega$ en cuestión. Obviamente los valores de Ω estarán comprendidos entre 0 y 2π ya que comprenden un giro completo; esto explica claramente como el resultado será siempre periódico con período 2π. Si además tenemos en cuenta que los polos y los ceros aparecerán (en el caso que sean complejos) en forma conjugada, podemos asegurar la simetría par del espectro de módulos como se mencionó con anterioridad. Resumimos:

$$|H(\Omega)| = \frac{\prod \text{Distancia desde cada cero al punto } e^{i\Omega}}{\prod \text{Distancia desde cada polo al punto } e^{i\Omega}}$$

En el caso de no haber ceros, el numerador será simplemente 1. En el caso de no haber polos, el denominador será 1.

Cálculo de la respuesta de fase Siguiendo un razonamiento similar al anterior, ahora al evaluar la transferencia para $z = e^{i\Omega}$, en el numerador debemos calcular la fase de un producto de complejos, que da como resultado la suma de las fases de cada uno de los vectores que van desde cada cero al punto $e^{i\Omega}$ que se desea evaluar. Lo mismo sucede en denominador con cada polo. El cociente solo genera la resta entre la sumatoria de las fases de los vectores desde cada cero hasta el punto $e^{i\Omega}$ y la sumatoria de las fases de los vectores desde cada polo al punto $e^{i\Omega}$ en cuestión. Las fases siempre se consideran con respecto al eje positivo real de z.Resumimos:

$$arg\{H(\Omega)\} = \sum \text{Fases de los vectores desde cada cero al punto } e^{i\Omega} - \sum \text{Fases de los vectores desde cada polo al punto } e^{i\Omega}$$

Para ejemplificar se recomienda analizar las respuestas de módulo y fase presentadas en el sistema de primer y segundo orden. Note sobre todo en el caso del sistema de segundo orden, cómo debe realizarse el análisis. Partiendo de $\Omega = 0$ ($z = e^{i\Omega} = 1$) debemos trazar 4 vectores: 2 vectores parten desde el cero doble del origen y concluyen en $z = 1$; los otros 2 parten de cada uno de los polos complejos conjugados y terminan nuevamente en $z = 1$. Para calcular la respuesta de módulo hay que dividir el producto de las dos distancias desde el cero en el origen ($1 \times 1 = 1$) por el producto de las distancias desde los polos. Para el caso del cálculo de la fase (siempre para $\Omega = 0$), los vectores desde el cero doble tienen fase 0 y los vectores desde los polos tienen fases opuestas, por lo tanto la fase para $\Omega = 0$ es cero. Veamos del diagrama de polos y ceros junto a los vectores correspondientes (La ROC no se dibuja para claridad del diagrama aunque la misma abarca a $|z| = 1$:

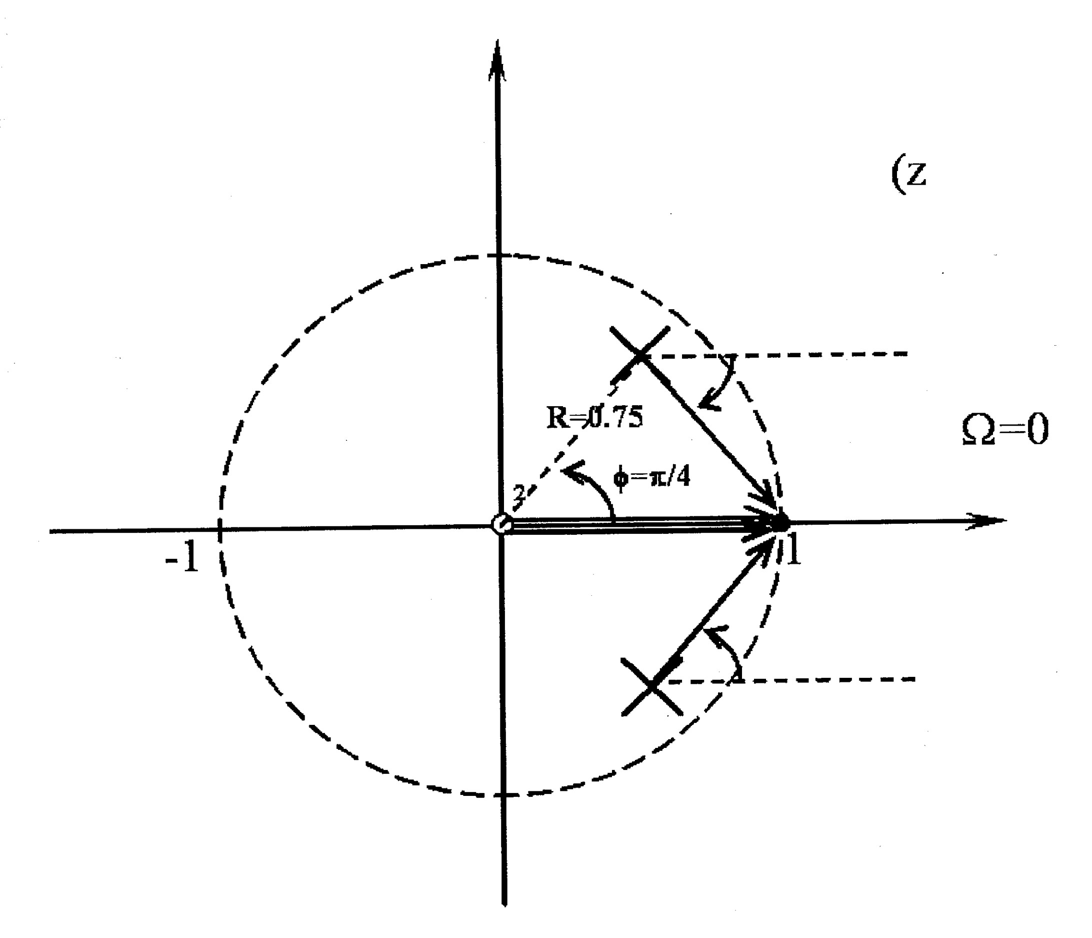


Figura 11.13: Cálculo del espectro de módulo y fase del diagrama de polos y ceros.

Note que se marcaron, desde los polos complejos conjugados, cómo deben ser considerados los ángulos para el cálculo del espectro de fases.

Ahora al calcular el espectro para otros valores de Ω debemos movernos alrededor de la circunferencia de radio unitaria en sentido antihorario, siendo el valor de Ω el ángulo en que nos detendremos y hacia allí se trazarán los vectores desde los ceros y desde los polos. Destaquemos cómo al pasar cerca de los polos (en este caso los polos están ubicados en

$z = e^{i\pi/4}$ y $z = e^{-i\pi/4}$) la respuesta de módulos presenta picos ya que la distancia desde los ceros para todo valor de Ω es uno y la distancia al polo cercano se hace pequeña y forma parte del denominador del cálculo (genera un máximo). Estos picos serán más altos si los polos están más cerca de la circunferencia unitaria (sistema más selectivo). Vemos el trazado de los vectores para un valor de $\Omega = \pi/5$ cercano a la posición del polo en la figura 11.14.

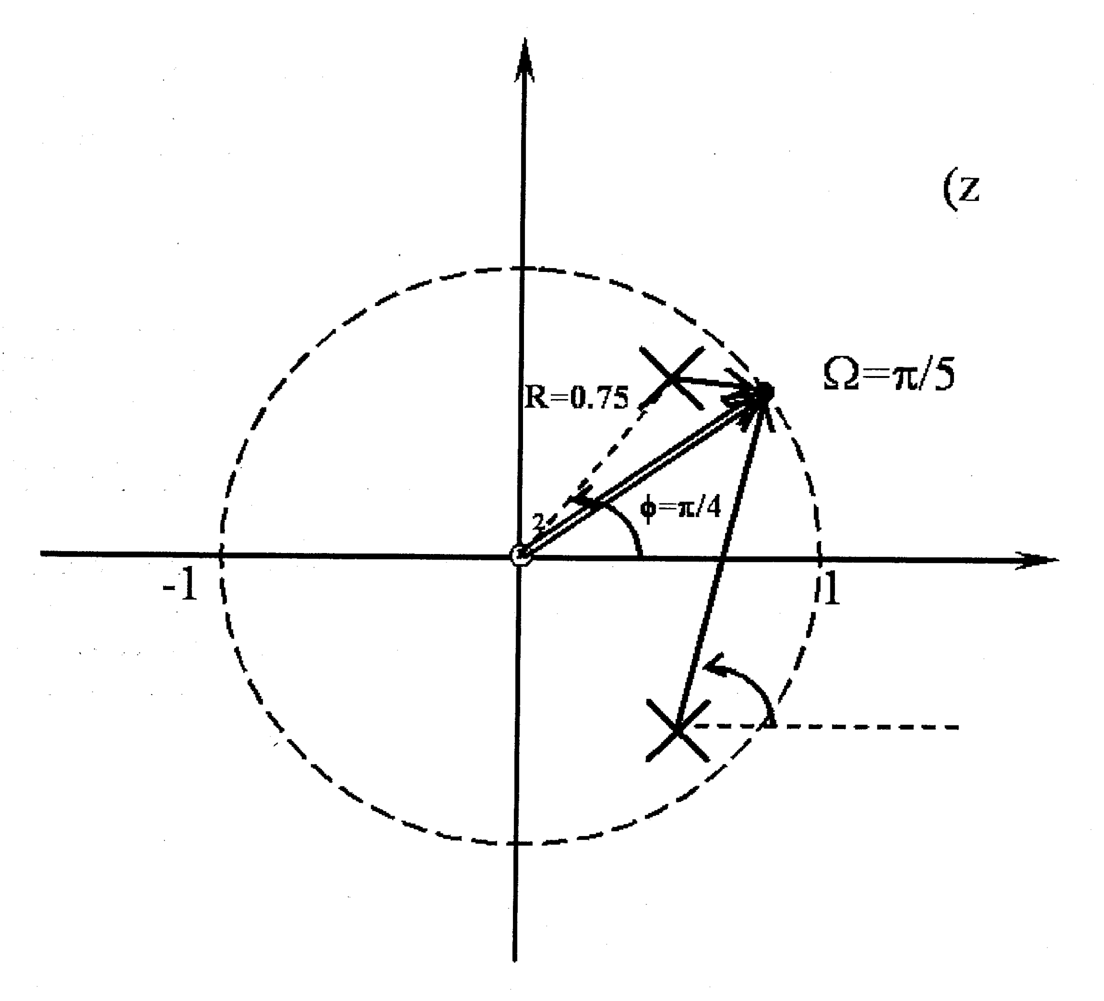


Figura 11.14: Cálculo del espectro de módulo y fase del diagrama de polos y ceros.

Así como la introducción de polos genera esos picos en la respuesta de módulos, es de esperar que los ceros generen el efecto inverso (valles). Los ceros además cuentan con la ventaja que no intervienen en la ROC y por lo tanto pueden residir sobre la circunferencia de radio unitaria. En el capítulo próximo se diseñan filtros donde se colocan especialmente los ceros para eliminar determinadas componentes del espectro.

11.8.5. Filtros digitales

Esta sección tiene como objetivo cerrar el presente capítulo mostrando dos tipos fundamentales de filtros que se ampliarán en detalle en el próximo capítulo. Las diferencias entre

estos dos tipos de sistemas cierran una unidad teórica importante y relacionan muchos de los temas hasta ahora vistos.

Filtros de respuesta finita al impulso: FIR

Este tipo de filtro es el más sencillo de los sistemas LTI. La ecuación en diferencias que lo caracteriza es la siguiente:

$$y[n] = a_0.x[n] + a_1.x[n-1] + a_2.x[n-2] + \cdots + a_M.x[n-M] \tag{11.7}$$

donde el orden del filtro es M. Como la respuesta impulsional es la salida al aplicar un delta en la entrada, simplemente la hallamos como:

$$h[n] = a_0.\delta[n] + a_1.\delta[n-1] + a_2.\delta[n-2] + \cdots + a_M.\delta[n-M]$$

y como M es un número entero la respuesta al impulso es siempre finita. Utilicemos la transformada Z para sacar más conclusiones. Aplicando la transformada Z en ambos miembros de 11.7 y recordando la transformada del delta y la propiedad de desplazamiento, obtenemos

$$H(z) = a_0 + a_1.z^{-1} + a_2.z^{-2} + \cdots + a_M.z^{-M} = \frac{a_0 z^M + a_1.z^{M-1} + a_2.z^{M-2} + \cdots + a_M}{z^M}$$

Por lo tanto vemos que los filtros FIR poseen polos (si es que los tienen) **solamente en el origen** y los ceros pueden estar distribuidos por el plano Z. Como ya analizamos, los polos son los que determinan la ROC y en este caso la misma **siempre** abarcará a $|z| = 1$ asegurando la **estabilidad incondicional** de este tipo de filtros. Asimismo vemos que

$$H(z) = a_0 + a_1.z^{-1} + a_2.z^{-2} + \cdots + a_M.z^{-M} = \frac{Y(z)}{X(z)} \Longrightarrow$$
$$Y(z) = X(z)\left(a_0 + a_1.z^{-1} + a_2.z^{-2} + \cdots + a_M.z^{-M}\right)$$

y podemos confeccionar un diagrama en bloques de la siguiente manera:

Vemos que para los filtros de respuesta finita al impulso (FIR) la salida está compuesta solo por valores escalados de la entrada actual y anteriores; es así como nunca serán inestables ya que para cada muestra $x[n]$ en la entrada, solo debemos sumar las M entradas anteriores y escalarlas según lo indican los coeficientes del filtro. Tanto los $x[n]$ como los coeficientes son finitos. También podemos recordar que la salida de este sistema no es más que la convolución de la entrada con la respuesta impulsional $h[n]$. Como esta respuesta es de longitud finita, la salida será siempre finita.

Resumimos entonces las características principales de estos filtros:

- Los filtros FIR poseen una respuesta al impulso $h[n]$ se duración finita.
- Los filtros FIR son incondicionalmente estables.
- La transferencia $H(z)$ de estos filtros posee ceros distribuidos por el plano y polos, si los tiene, solo en el origen.

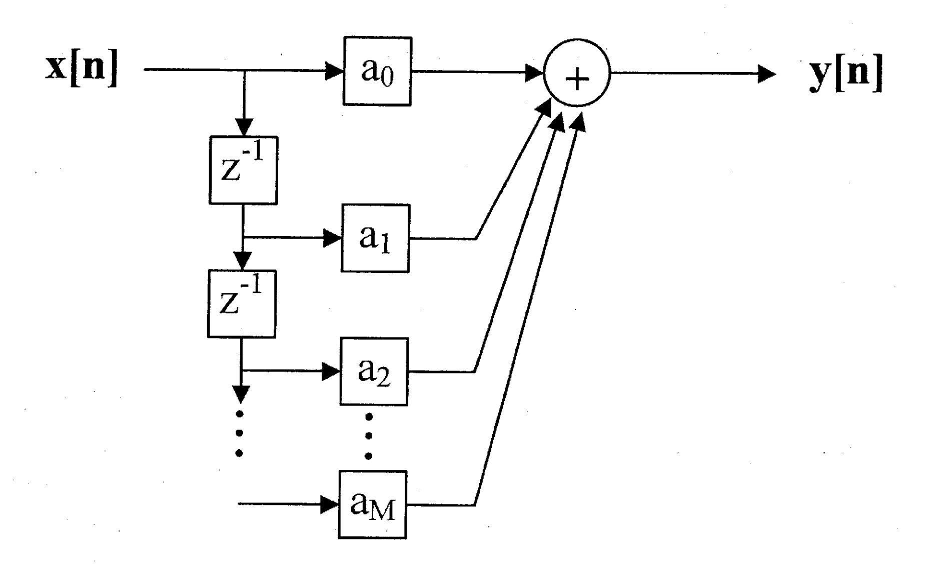


Figura 11.15: Diagrama en bloques de un filtro FIR.

- En el diagrama en bloque notamos solo lazos de realimentación desde la entrada.

Para analizar la respuesta en frecuencia de este tipo de filtros hay que aplicar la transformada discreta de Fourier y transformar el $h[n]$ obteniendo el $H(\Omega)$. Así como los filtros FIR presentan la ventaja de la estabilidad, en contrapartida podemos observar que si la longitud del $h[n]$ (estrechamente relacionada con el orden del filtro) es corta, la respuesta en frecuencia del filtro no podrá tener transiciones entre las bandas de paso o atenuación muy abruptas. En el caso de diseño se propone un $H(\Omega)$ y se antitransforma para obtener el $h[n]$.

Por otro lado si se diseña un espectro con transiciones abruptas se notará un incremento muy considerable del orden del filtro necesario. Esta es la principal limitación de estos filtros, que son muy empleados en las áreas de procesamiento digital de señales utilizando nuevas tecnologías diseñadas exclusivamente para implementar estos filtros (DSP).

Filtros de respuesta infinita al impulso: IIR

Este tipo de sistema LTI posee características diferentes a las vistas en el apartado anterior, aunque siempre debemos partir de la ecuación en diferencias. Veamos que este caso es más genérico que el anterior (lo incluye por completo) ya que para calcular la salida $y[n]$ no solo se utilizan, en la ecuación, valores anteriores de la entrada, sino también valores anteriores de la salida:

$$y[n] = a_0.x[n] + a_1.x[n-1] + \cdots + a_M.x[n-M] - b_1.y[n-1] - \cdots - b_N.y[n-N] \quad (11.8)$$

Es evidente como en este caso no podemos hallar la respuesta al impulso simplemente reemplazando la entrada por un delta, ya que no conseguiríamos resolver la ecuación en diferencias (es lo que sucede, en una analogía, con una ecuación diferencial que requiere ser resuelta para hallar la variable derivada). Para encontrar el $h[n]$ debemos utilizar la

transformada Z. Aplicando la T.Z. en ambos miembros de la ecuación 11.8 y despejando, obtenemos

$$Y(z)\left(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_N z^{-N}\right) = X(z)\left(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_M . z^{-M}\right)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_M . z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_N z^{-N}}$$

Aquí notamos claramente como la transferencia $H(z)$ posee polos y ceros distribuidos por todo el plano (al menos un polo fuera del origen). Esta característica de los filtros IIR los convierte en sistemas que *pueden* ser inestables, pero que sin embargo tienen la posibilidad de tener respuestas en frecuencia mucho más abruptas que para el caso de los filtros FIR, y aun con menos coeficientes. Veamos un diagrama en bloques en la figura 11.16.

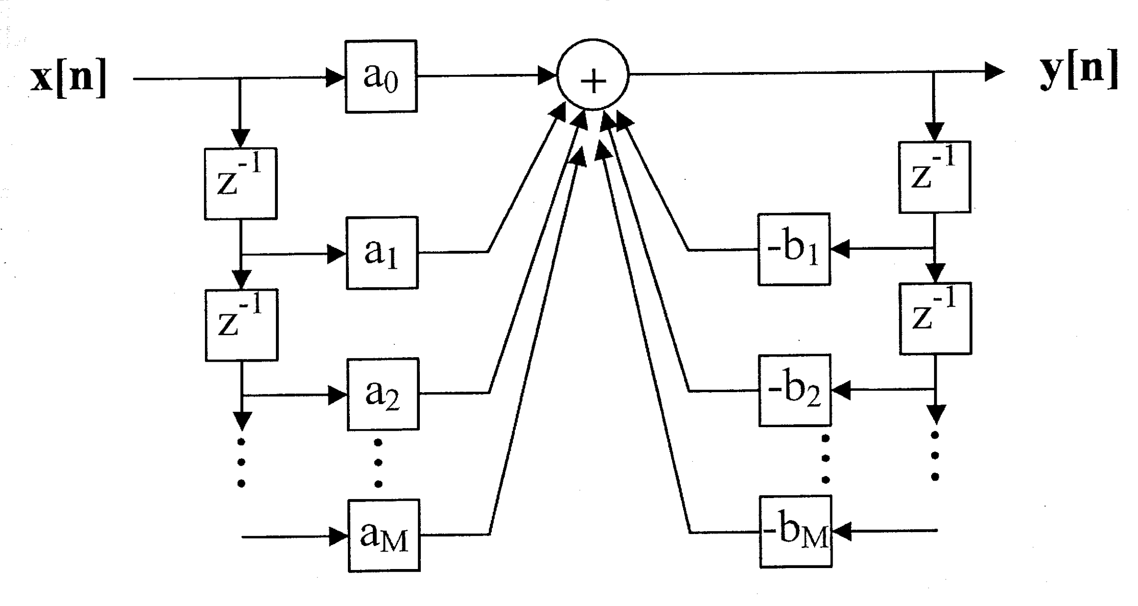


Figura 11.16: Diagrama en bloques de un filtro IIR.

Aquí destacamos la aparición de una realimentación desde la salida (debe existir al menos un lazo de realimentación desde la salida para que el filtro sea IIR). Está realimentación es la que provoca que al aplicar un delta en la entrada (una única muestra en uno y el resto en cero) el valor de la salida se realimenta y provoca que la respuesta impulsional no se extinga nunca: respuesta infinita al impulso. Esta cualidad es la que impide que estos filtros se implementen en la práctica por medio de la convolución, ya que demandaría un tiempo infinito convolucionar la entrada con la respuesta impulsional [1].

Resumamos a continuación las características de los filtros IIR:

[1] Este problema puede ser salvado recortando la respuesta impulsional $h[n]$ del filtro IIR y convirtiéndola en una respuesta finita. Este recorte genera el efecto de haber multiplicado la señal temporal por un pulso cuadrado, que en frecuencia implica la convolución del espectro con una señal del tipo sampling, deformando la respuesta en frecuencia deseada en un comienzo.

- Al colocar un impulso en la entrada, la respuesta $h[n]$ tiene duración infinita.
- El diagrama de polos y ceros de la función transferencia posee, al menos, un polo fuera del origen.
- El sistema puede resultar inestable. Para asegurar la estabilidad es necesario asegurar que todos los polos residan dentro de la circunferencia de radio unitaria.
- En el diagrama en bloques aparece, al menos, un lazo de realimentación desde la salida.

Los filtros IIR son muy utilizados ya que brindan la posibilidad de implementar filtros con transiciones abruptas entre las bandas, utilizando un pequeño número de coeficientes. Para su implementación práctica se sigue, directamente, el diagrama en bloques (o la ecuación en recurrencia). Para su diseño se colocan los ceros y los polos sobre el diagrama, según las especificaciones de filtrado, y se trabaja con la función transferencia. Existen infinidad de métodos de diseño más complicados que están fuera del alcance de esta sección.

11.9. Tabla de transformadas y propiedades

Cuadro 11.1: Transformada Z de señales habituales

$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	z^{-n_0}
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}, \lvert z \rvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{z}{z-1}, \lvert z \rvert < 1$
$\alpha^n u[n]$	$\frac{z}{z-\alpha}, \lvert z \rvert > \lvert \alpha \rvert$
$-\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{z}{z-\alpha}, \lvert z \rvert < \lvert \alpha \rvert$
$n.\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}, \lvert z \rvert > \lvert \alpha \rvert$
$-n.\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}, \lvert z \rvert < \lvert \alpha \rvert$
$cos(\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{z(z-cos(\Omega_0))}{z^2-2cos(\Omega_0)z+1}, \lvert z \rvert > 1$
$sen(\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{z.sen(\Omega_0)}{z^2-2cos(\Omega_0)z+1}, \lvert z \rvert > 1$
$r^n cos(\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{z(z-r.cos(\Omega_0))}{z^2-2.r.cos(\Omega_0)z+r^2}, \lvert z \rvert > r$
$r^n sen(\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{z.r.sen(\Omega_0)}{z^2-2.r.cos(\Omega_0)z+r^2}, \lvert z \rvert > r$
$(n+1)\alpha^n u[n]$	$\left(\frac{z}{z-\alpha}\right)^2, \lvert z \rvert > \lvert \alpha \rvert$
$\begin{cases} \alpha^n & N-1 \leq n \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$	$\frac{1-\alpha^n z^{-N}}{1-\alpha z^{-1}}, \lvert z \rvert > 0$

Cuadro 11.2: Propiedades de la Transformada bilateral Z

	$x[n]$	$X(z), ROC$
	$x_1[n]$	$X_1(z), ROC_1$
	$x_2[n]$	$X_2(z), ROC_2$
Linealidad	$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$	$\alpha X_1(z) + \beta X_2(z), ROC_1 \cap ROC_2$
Desplazamiento temporal	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0} X(z), ROC$
Desplazamiento en frec.	$e^{i\Omega_0 n} x[n]$	$X(e^{-i\Omega_0} z), ROC$
	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right), z_0.ROC$
Producto exponencial	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z), \|a\|.ROC$ espejada
Inversión temporal	$x[-n]$	$X(z^{-1}), ROC^{-1}$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z).X_2(z), ROC_1 \cap ROC_2$
Multiplicación por n	$n.x[n]$	$-z\frac{\partial X(z)}{\partial z}, ROC$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]$	$\frac{1}{1-z} X(z), ROC \cap \|z\| = 1$
Submuestreo	$w[n] = \begin{cases} x[r] & n = rk \\ 0 & n \neq rk \end{cases}$	$X(z^k), ROC^{1/k}$

11.10. Problemas propuestos

1. Calcule la transformada Z, junto con la ROC,de las siguientes señales.

   a) $x[n] = \delta(n - n_0)$.

   b) $x[n] = u[n]$.

   c) $x[n] = u[-n]$.

   d) $x[n] = 0{,}5^n u[n]$.

   e) $x[n] = (-0{,}5)^n u[n]$.

   f) $x[n] = n(0{,}5)^n u[n]$.

   g) $x[n] = 0{,}5^{-n} u[-n-1]$.

   h) $x[n] = 0{,}2^n u[n] + 0{,}6^n u[n]$.

   Rta: $X(z) = \frac{z}{z-0{,}2} + \frac{z}{z-0{,}6}$, $|z| > 0{,}6$

   i) $x[n] = 0{,}2^n u[n] + 0{,}6^n u[-n-1]$.

   j) $x[n] = a^{|n|}, 0 < a < 1$.

   Rta: $X(z) = \frac{az}{1-az} + \frac{z}{z-a}$, $|a| < |z| < 1/|a|$

   k) $x[n] = a^n(u[n] - u[n-N]), 1 > a > 0$. Grafique el diagrama de polos y ceros.

   l) $x[n] = sen(\Omega_0 n)u[n]$. Grafique el diagrama de polos y ceros.

   m) $x[n] = cos(\Omega_0 n)u[n]$. Grafique el diagrama de polos y ceros.

   n) $x[n] = \frac{1}{2}\left((0{,}8)^n u[n] + (-0{,}8)^n u[n]\right)$.

   Rta: $X(z) = \frac{z^2}{z^2-0{,}64}$, $|z| > 0{,}8$

   o) $x[n] = \frac{1}{2}\left((0{,}8i)^n u[n] + (-0{,}8i)^n u[n]\right)$.

   Rta: $X(z) = \frac{z^2}{z^2+0{,}64}$, $|z| > 0{,}8$

   p) $x[n] = cos(\frac{\pi n}{2})u[n] = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0 \ldots\}$.

2. Calcule la convolución entre las siguientes señales utilizando la transformada Z: $x[n] = \{0, 1, 2, 3, 2, 1\}$ $h[n] = \{1, 1, 1\}$ (la primer muestra corresponde al subíndice cero).

   Rta: $y[n] = \{0, 1, 3, 6, 7, 6, 3, 1\}$

3. Calcule la antitransformada de las siguientes funciones utilizando el método que crea conveniente:

   a) $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$

   b) $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$

   Rta: $x[n] = -a^n u[-n-1]$

   c) $X(z) = z^2(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1}), 0 < |z| < \infty$

Rta: $x[n] = \delta[n+2] - \frac{7}{2}\delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-1]$

d) $X(z) = log\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right), |z| > |a|$

Rta: $x[n] = \frac{a^n}{n}u[n-1]$

e) $X(z) = \frac{z}{2z^2-3z+1}, |z| < 0{,}5$

Rta: $x[n] = -(1+2^{-n})u[-n]$

f) $X(z) = \frac{z}{2z^2-3z+1}, |z| > 1$ 7

Rta: $x[n] = (1-2^{-n})u[n-1]$

g) $X(z) = \frac{2z^3-5z^2+z+3}{(z-1)(z-2)}, |z| < 1$

Rta: $x[n] = 2\delta[n+1] + \delta[n] + \left[1 - (1/2)^{-n+1}\right]u[-n]$

h) $X(z) = \frac{z+2}{(z-0{,}5)(z+0{,}2)}, |z| > 0{,}5$

Rta: $x[n] = \left[\frac{25}{7}(0{,}5)^{n-1} - \frac{18}{7}(0{,}2)^{n-1}\right]u[n-1]$

i) $X(z) = \frac{1}{(z-0{,}4)^2(z+0{,}1)}, |z| > 0{,}4$

j) $X(z) = \frac{2+z^{-2}+3z^{-4}}{z^2+4z+3}, |z| > 0$

k) $X(z) = \frac{z}{z^2+1}, |z| > 1$

Rta: $x[n] = sen(\pi n/2)u[n]$

l) $X(z) = \frac{z^2}{z^2+1}, |z| > 1$

m) $X(z) = \frac{z+1}{(z-0{,}5)(z^2-0{,}5z+0{,}25)}$. (Causal). 8.

Rta: $x[n] = 6(0{,}5)^{n-1}\left[1.cos(\pi(n-1)/3) - 0{,}192sen(\pi(n-1)/3)\right]u[n-1]$

4. Un sistema LTI posee una respuesta impulsional $h[n] = \alpha^n u[n], 0 < \alpha < 1$. Calcule su respuesta indicial.

   Rta: $s[n] = \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}u[n]$

5. La salida de un sistema LTI es $y[n] = 2.(\frac{1}{3})^n u[n]$ cuando la entrada fue $x[n] = u[n]$. Se pide:

   a)Encuentre la respuesta impulsional del sistema $h[n]$. 9.

   b)Encuentre la salida $y[n]$ si ahora la entrada es $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$.

   Rta: a) $h[n] = 6\delta[n] - 4(\frac{1}{3})^n u[n]$, b) $y[n] = \left[-6(\frac{1}{2})^n + 8(\frac{1}{3})^n\right]u[n]$

6. Un sistema LTI está descripto por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

   a) Determine la función transferencia $H(z)$.

Rta: $H(z) = \frac{z^2}{z^2-3z/4+1/8}$, $|z| > 0{,}5$

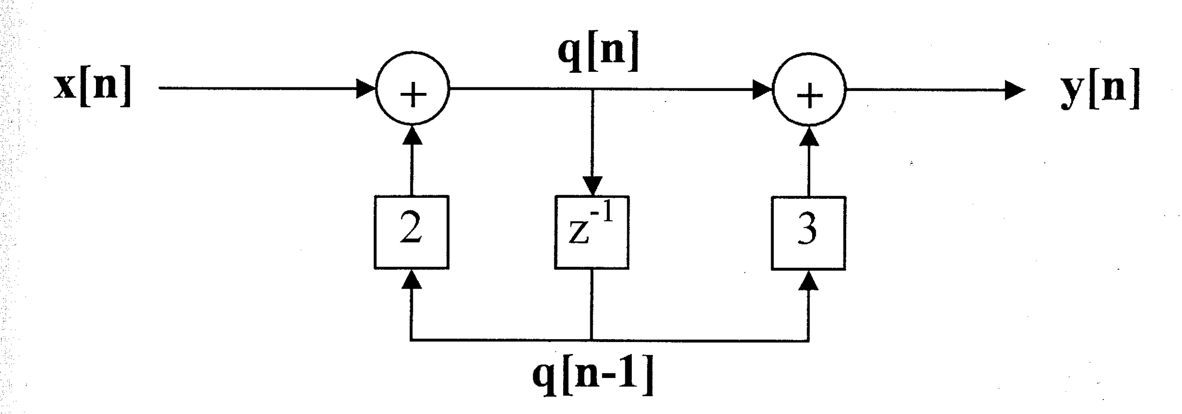
b) Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$.

Rta: $h[n] = \left[(0{,}5)^{n-1} - (0{,}25)^n\right] u[n]$

c) Encuentre la respuesta indicial (al escalón).

Rta: $s[n] = \left[8/3 - (0{,}5)^{n-1} - (1/3)(1/4)^n\right] u[n]$

7. Considere el sistema descripto por el siguiente diagrama en bloques. Escriba una ecuación en diferencias que relaciones la entrada $x[n]$ con la salida $y[n]$. Calcule además



la función transferencia $H(z)$.

Rta: $y[n] - 2y[n-1] = x[n] + 3x[n-1]$, $H(z) = \frac{z+3}{z-2}$

8. Un sistema LTI con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ está descripto por

$$y[n] - a.y[n-1] = x[n]$$

donde a es una constante. Encuentre la salida $y[n]$ cuando $x[n] = Kb^n u[n]$ y la condición inicial es $y[-1] = y_{-1}$.

Rta: $y[n] = y_{-1}.a^{n+1} + k\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}u[n]$

9. Halle la respuesta impulsional $h[n]$ de los siguientes sistemas LTI causales e indique si se tratan de sistemas FIR o IIR.

a)$y[n] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-3]$.

Rta: FIR. $h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-2] + \delta[n-3]$

b)$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] + x[n] - x[n-1]$.

Rta: IIR. $h[n] = [(5/3)(-0{,}25)^n - (2/3)(0{,}5)^n]\, u[n]$

c)$y[n] + 2y[n-1] = x[n] + x[n-1]$.

d)$y[n] - 0{,}5y[n-2] = 2x[n] - x[n-2]$.

10. Si la entrada de un sistema LTI es $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + 2^n u[-n-1]$ provoca la salida $y[n] = 6(\frac{1}{2})^n u[n] - 6(\frac{3}{4})^n u[n]$, halle la función transferencia $H(z)$. Determine si el sistema es estable.

11. Si la entrada de un sistema LTI es $x[n] = 2u[n]$ provoca la salida $y[n] = 4(\frac{1}{2})^n u[n] - 3(-\frac{3}{4})^n u[n]$, halle la respuesta impulsional $h[n]$.

    Rta:$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \left[-2(\frac{1}{2})^n - \frac{7}{2}(-\frac{3}{4})^n\right] u[n-1]$.

12. Un sistema LTI causal tiene la siguiente función transferencia

$$H(z) = \frac{z+1}{z-\frac{1}{2}}$$

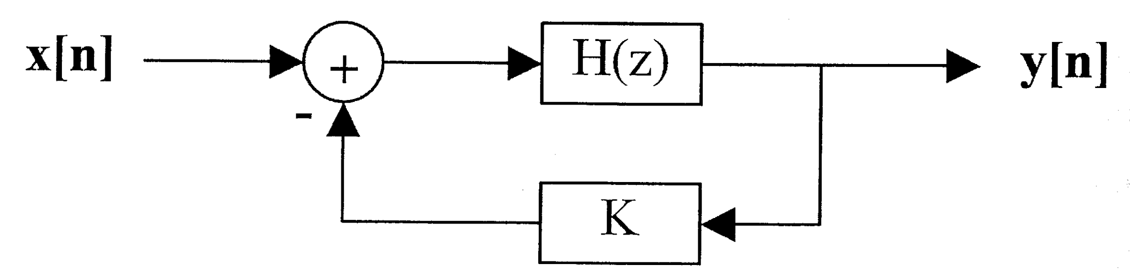
    Encuentre la entrada $x[n]$ que provoca la salida $y[n] = -\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n u[n] - \frac{4}{3}2^n u[-n-1]$.

    Rta: $x[n] = \frac{1}{15}(\frac{1}{4})^n u[n] - \frac{2}{3}2^n u[-n-1] - \frac{4}{15}(-1)^n u[-n-1]$.

13. Un sistema de segundo orden inestable, posee la siguiente función transferencia:

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 1{,}44z^{-2}}$$

    y se lo desea estabilizar colocándolo en el siguiente sistema realimentado:



    Encuentre la función transferencia del nuevo sistema completo y halle el valor de la contante K para asegurar la estabilidad del mismo.

    Rta: $K > 0{,}44$

14. La entrada a un sistema causal es $x[n] = u[-n-1] + (\frac{1}{2})^n u[n]$. La transformada Z de la salida es

$$Y(z) = -\frac{z}{2(z-\frac{1}{2})(z+1)}$$

    Encuentre la función transferencia del sistema $H(z)$.

    Rta:$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

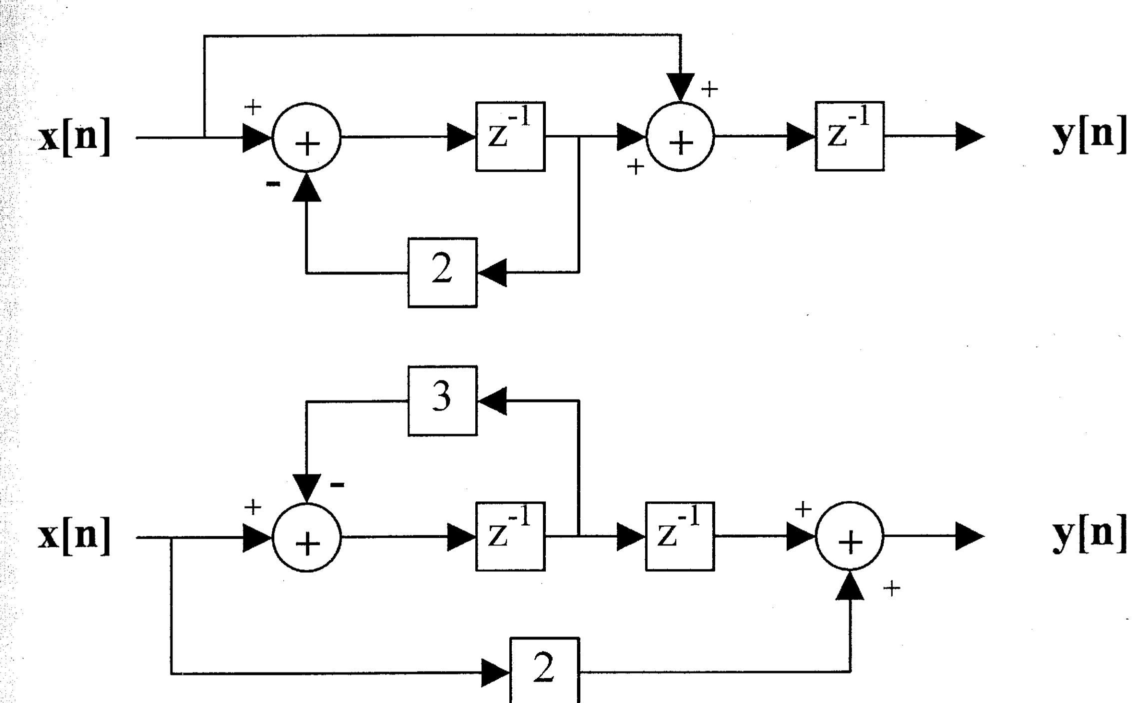
15. La función transferencia de un sistema LTI causal es

$$H(z) = \frac{1}{1 + az^{-1} + 0{,}3z^{-2}}$$

Determine el valor de la constante a para que sea estable.

Rta: $|a| < 1{,}3$.

16. Calcule la función transferencia de los siguientes sistemas:



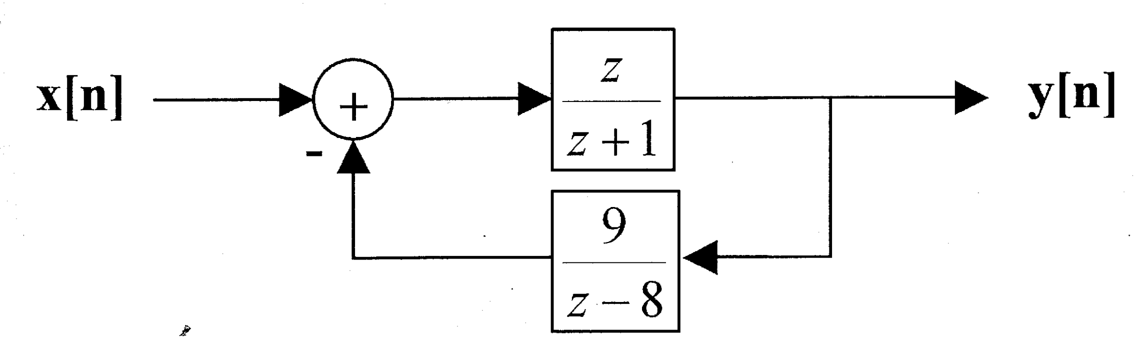
17. Un sistema LTI posee la siguiente función transferencia

$$H(z) = \frac{3z}{(z+0{,}5)(z-0{,}5)}$$

La respuesta indicial (al escalón) es $s[n] = \left[(\frac{1}{2})^n - 3(-\frac{1}{2})^n + 4\right] u[n]$. Determine las condiciones iniciales $y[-1]$ e $y[-2]$ que produjeron esta respuesta.

Rta: $y[-1] = 24$, $y[-2] = 8$

18. Considere el siguiente sistema realimentado.



a) Determine la respuesta al impulso del sistema.

Rta: $h[n] = [2(-4)^n - 2^n]\, u[n]$

b) Determine la respuesta indicial del sistema.

Rta: $s[n] = \left[2^{n+1} + (8/5)(-4)^n + (7/5)\right] u[n]$

c) Calcule la salida $y[n]$ a la entrada $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ con $y[-1] = -3$, $y[-2] = 4$.

Rta: $y[n] = [-0{,}55(0{,}5)^n + 30{,}2(-4)^n + 9{,}3(2)^n]\, u[n]$

19. Para los siguientes sistemas descriptos por ecuaciones en diferencias se pide calcular la respuesta en frecuencia (módulo y fase) utilizando el método gráfico.

    a) $y[n] = \frac{1}{2}\,(x[n] + x[n-1])$.

    b) $y[n] = \frac{1}{3}\,(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$.

    c) $y[n] = \frac{1}{3}\,(x[n+1] + x[n] + x[n-1])$.

    d) $y[n] = x[n] - x[n-1]$.

    e) $y[n] = x[n+1] + x[n-1]$.

    f) $y[n] = x[n] + x[n-10]$.

Aplicación en MatLab

```
%TRANSFORMADA Z
%Para la aplicación de la transformada Z (al igual que en la transformada
%de Laplace) se utilizarán funciones del toolbox "Control system" de Matlab
%(TF, POLE, ZERO, ZPLANE, FREQZ), que permiten un análisis que parte desde
%el dominio frecuencial (Transformada conocida), pudiéndose estimar las
%repuestas numéricas en el dominio "n" (IMPULSE, STEP). Para realizar un
%análisis que tenga como origen el dominio "n", puede utilizarse el
%toolbox "Symbolic Math", que permite trabajar en forma simbólica (ZTRANS,
%IZTRANS)

%TOOLBOX CONTROL----------------------------------------------------------------
%Vector Numerador de H(z)
Num=[1 0 1];
%Vector Denominador de H(z)
Den=[1 0 0.64];
%Función transferencia (igual que en Laplace, pero con Ts=1)
H=tf(Num,Den,1)

%Análisis de polos y ceros
pole(H)
zero(H)

%Cálculo de los residuos
residue(Num,Den)

%Diagrama de Polos y Ceros
figure(1);
zplane(Num,Den);

%Respuesta en frecuencia
figure(2);
freqz(Num,Den);

%Respuesta al impulso
figure(3);
n=0:1:20;
impulse(H,n);

%Respuesta al escalón
figure(4);
step(H,n);


%TOOLBOX SYMBOLIC MATH----------------------------------------------------------
%Dominio Frecuencia compleja
%Variable simbólica
syms z
%Función transferencia
H=(z^4-1)/z^4
%Antitransformada (h)
h=iztrans(H)

%Dominio "n"
%Variable simbólica
syms n
%Respuesta al impulso
h=(0.25)^n;
%Transformada(H)
H=ztrans(h)
```

Capítulo 12

Filtros Digitales

12.1. Introducción

Tanto los conceptos iniciales de variable compleja, así como las herramientas de transformación analizadas tienden a introducir al lector en el análisis y el diseño de sistemas LTI. En este capítulo centraremos la atención en un aspecto más práctico y concreto. Sentaremos las bases para el diseño de filtros digitales en base a especificaciones concretas impuestas por el problema que se desea solucionar. Existen infinidad de aplicaciones para los temas vistos y, aunque los filtros pueden parecer las centrales, no lo son. Solo utilizaremos el tema de filtrado para mostrar cómo llevar a la práctica un tema teórico. Presentaremos a lo largo del capítulo varios tipos de filtros y estudiaremos sus características principales. El tema es muy extenso para ser cubierto en un capítulo y solo se pretende transmitir un criterio ordenado para encarar temas más avanzados.

12.2. Filtrado

Comencemos por mostrar un ejemplo real de un filtro continuo y su contraparte discreta. Esto servirá como punto de partida.

En un sistema LTI el espectro de salida es el resultado del producto entre el espectro de entrada y la respuesta en frecuencia del sistema. Esto es, para un sistema continuo

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Como las tres funciones son de variable compleja, el producto complejo se puede interpretar como un producto de módulos y una suma de fases:

$$\begin{aligned} |Y(\omega)| &= |X(\omega)||H(\omega)| \\ arg\{Y(\omega)\} &= arg\{X(\omega)\} + arg\{H(\omega)\} \end{aligned}$$

El proceso de filtrado consiste en eliminar, atenuar o amplificar alguna banda de frecuencias de la entrada con respecto a otras. Esto se logra modelando el $H(\omega)$ según las exigencias de las especificaciones.

El filtro ideal pasa-bajos cuenta con la siguiente respuesta en frecuencia:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

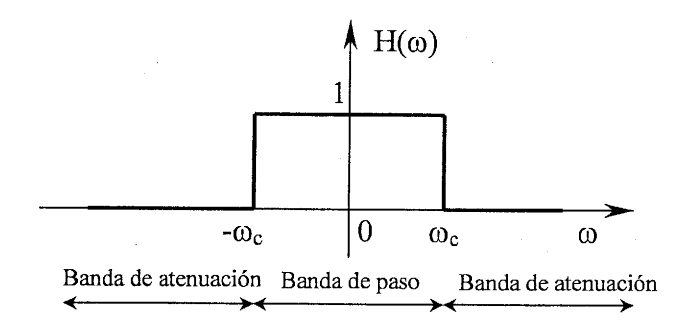
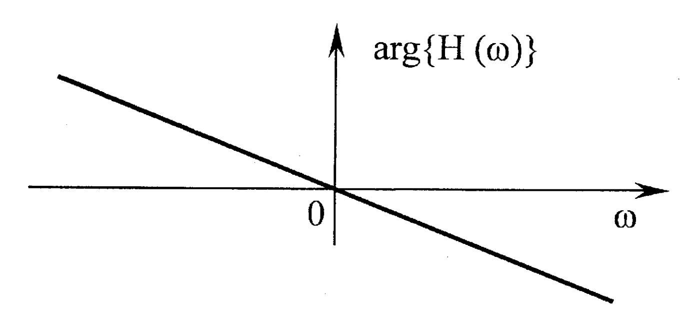


Figura 12.1: Filtro pasa-bajos ideal.

Elimina toda la banda de atenuación, y permite pasar a la banda de frecuencia de paso. A las frecuencias características de este filtro $\pm\omega_c$ se las denomina frecuencias de corte. El filtro es ideal ya que el pasaje entre la banda de paso y la de atenuación es inmediato. En la práctica la gradualidad de esta transición es la que determinará, de alguna manera, el orden y la calidad del filtro. Este filtro ideal sin distorsión posee una respuesta de fase cero. Toda señal cuyo espectro esté dentro de la banda de paso aparecerá a la salida sin distorsión. En la práctica esto implicaría que no existe ningún retardo entre la aplicación de una señal de entrada y la respuesta a la salida; lo cual es evidentemente incongruente. Cualquier sistema real posee esos retardos, por lo que un filtro un poco más real es aquel que posee una fase lineal como la siguiente:



Esta fase simplemente produce un desplazamiento de la señal temporal (propiedad de desplazamiento de la transformada de Fourier: $x(t-t_0) \longrightarrow e^{-i\omega t_0}X(\omega)$) que, muchas veces, es aceptable. Además debemos recordar que la respuesta al impulso (la transformada inversa de la respuesta en frecuencia), de este sistema es

$$h(t) = \frac{sen(\omega_c t)}{\pi t}$$

La respuesta temporal de este filtro se realiza mediante la convolución. La señal del tipo *sinc* posee oscilaciones que pueden ser indeseadas en la respuesta temporal. Estas oscilaciones son

debidas fundamentalmente a la abrupta transición entre las bandas de paso y atenuación. Suavizando esta transición se logrará solucionar este inconveniente temporal.

12.2.1. Filtros Butterworth

Solo a modo de ejemplo trabajaremos con un filtro continuo denominado *Butterworth*. Un filtro RC posee una respuesta en frecuencia como la siguiente:

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{i\omega + 1/RC}$$

y su ecuación diferencial es

$$v_i(t) = RC\frac{\partial v_c}{\partial t} + v_c(t)$$

donde $v_i(t)$ es la tensión de entrada y $v_c(t)$ es la tensión sobre el capacitor.

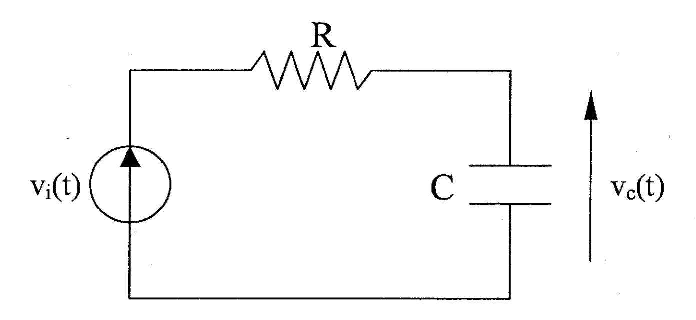


Figura 12.2: Circuito serie R-C.

Como ya vimos en la aproximación asintótica, la frecuencia de corte es $\omega_c = 1/RC$ $(-3dB)$. Para incrementar la pendiente de la asíntota se incrementa el orden del denominador. De esta forma un filtro *Butterworth* de orden N tiene la siguiente respuesta en frecuencia:

$$H_B(\omega) = \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}} \qquad (12.1)$$

La frecuencia de corte ω_c es, como en el caso del filtro de primer orden, la frecuencia en que la amplitud cae $\sqrt{2}$ con respecto a $H_B(\omega = 0)$. A medida que aumentamos el orden del filtro el pasaje entre la banda de paso y transición será más abrupta. Observe la respuesta en frecuencia en los gráficos 12.3.

Los filtros Butterworth son muy utilizados debido a que, tanto en la banda de paso como en la de atenuación, tienen un comportamiento monótono. Otros tipos de filtros presentan oscilaciones acotadas en alguna o en ambas bandas. Circuitos típicos de filtros *Butterworth* de segundo y tercer orden se presentan en la Fig. 12.4.

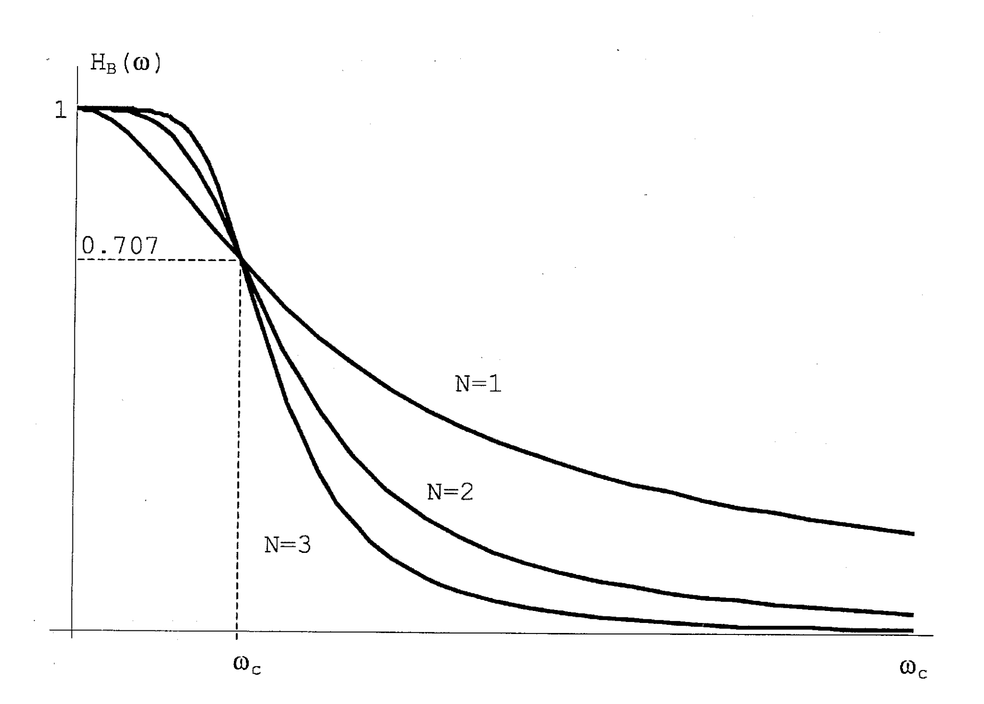


Figura 12.3: Respuesta en frecuencia de los filtros Butterworth.

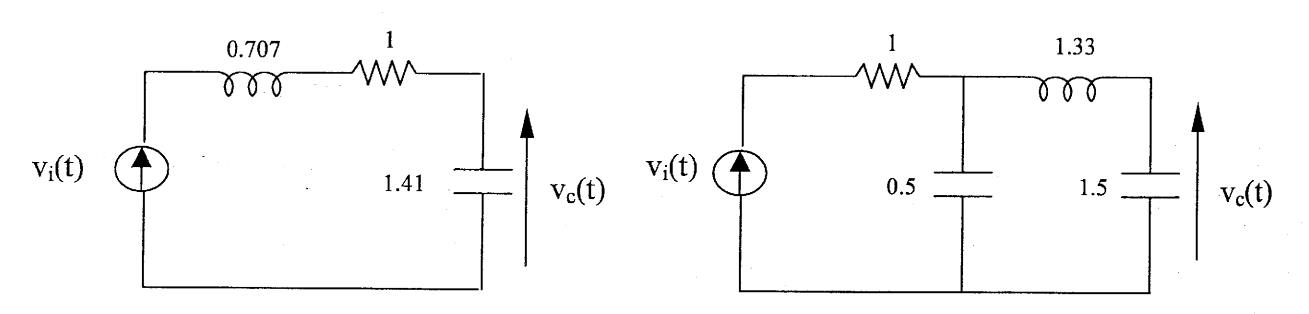


Figura 12.4: Circuitos Butterworth.

Veamos cómo hallar el diagrama de polos y ceros, en el plano de Laplace s. De la respuesta en frecuencia 12.1 podemos escribir

$$|H_B(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (i\omega/i\omega_c)^{2N}}$$

Podemos asegurar además, si imponemos que $h_B(t)$ sea real, que

$$|H_B(\omega)|^2 = H_B(\omega)H_B^*(\omega) = H_B(\omega)H_B(-\omega) = \frac{1}{1 + (i\omega/i\omega_c)^{2N}}$$

donde el asterisco * denota el complejo conjugado. Como $s = i\omega$, podemos escribir

$$H_B(s)H_B(-s) = \frac{1}{1 + (s/i\omega_c)^{2N}}$$

Para diagramar la distribución de polos, hallemos las raíces del denominador:

$$
\begin{aligned}
1+(s/i\omega_c)^{2N} &= 0 \\
s &= \underbrace{i}_{e^{i\pi/2}}\,\omega_c\,\underbrace{\sqrt[2N]{-1}}_{e^{i\pi(2k+1)/2N}} \qquad k=0,1,2\ldots(2N-1) \\
s &= \omega_c e^{i\pi[(2k+1)/2N+1/2]}
\end{aligned}
$$

Entonces los polos de $H_B(s)H_B(-s)$ se ubican de la siguiente forma:

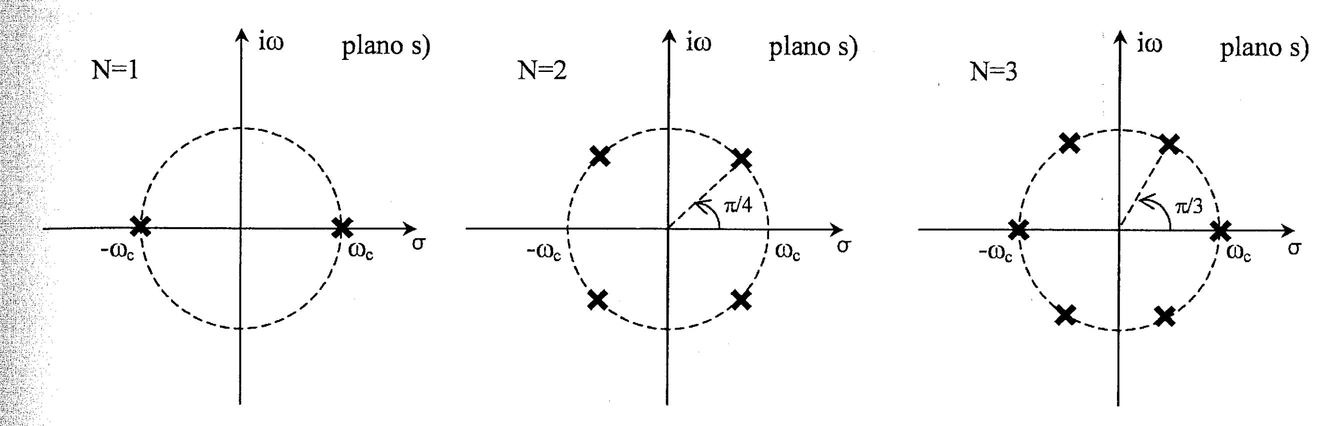


Figura 12.5: Diagramas de polos y ceros de los filtros Butterworth.

Note que nunca un polo cae sobre el eje $i\omega$. Además cuando N es impar hay polos sobre el eje real y cuando N es par no. Si ahora deseamos obtener los polos de $H_B(s)$ en función de $H_B(s)H_B(-s)$ note que los polos graficados están espejados con respecto al eje $i\omega$ y por lo tanto, teniendo en cuenta $s=-s$ seleccionamos solo los polos que residen a la izquierda (zona estable) para $H_B(s)$ y los de la zona derecha serán de $H(-s)$.

Vemos por ejemplo para $N=1$ obtenemos:

$$
\begin{aligned}
H_B(s)H_B(-s) &= \frac{1}{1+(s/i\omega_c)^2} = \frac{1}{1-\frac{s^2}{\omega_c^2}} = \frac{\omega_c^2}{s^2-\omega_c^2} \\
H_B(s)H_B(-s) &= \underbrace{\frac{\omega_c}{s+\omega_c}}_{H_B(s)} \cdot \underbrace{\frac{\omega_c}{s-\omega_c}}_{H_B(-s)}
\end{aligned}
$$

por lo tanto para $N=1$:

$$H_B(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

De igual manera podemos obtener para $N=2$

$$H_B(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2+\sqrt{2}\omega_c s+\omega_c^2}$$

y para $N = 3$

$$H_B(s) = \frac{\omega_c^3}{(s+\omega_c)(s^2+\omega_c s+\omega_c^2)}$$

como se puede verificar gráficamente dejando solo los polos sobre el semiplano izquierdo. Teniendo en cuenta además que $Y(s) = X(s)H_B(s)$ y utilizando la propiedad de derivación temporal de la transformada de Laplace ($x'(t) \longrightarrow sX(s)$) se deja a cargo del lector la obtención de las ecuaciones diferenciales correspondientes a cada caso.

Analicemos la contraparte discreta de este filtro. Hacemos notar que el filtro pasa-bajos ideal discreto tendrá características muy similares a su análogo continuo; aunque su respuesta en frecuencia será, por supuesto, periódica como muestra la siguiente figura:

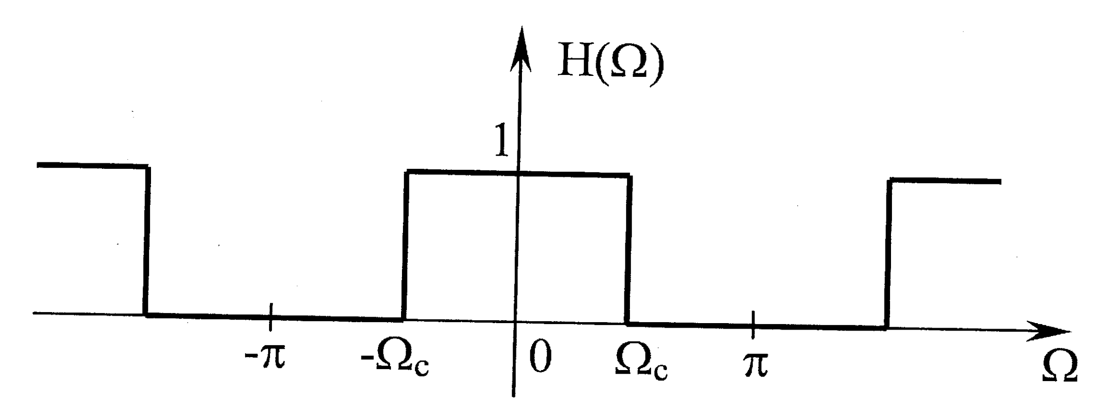


Figura 12.6: Respuesta en frecuencia de un filtro pasa-bajos discreto ideal.

La respuesta en frecuencia del filtro *Butterworth* discreto , en contraparte con 12.1, es

$$H_B(\Omega) = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{tan(\Omega/2)}{tan(\Omega_c/2)}\right)^{2N}}} \tag{12.2}$$

La respuesta en frecuencia es análoga a la del filtro continuo. De hecho la frecuencia de corte Ω_c, independientemente del orden del filtro (y al igual que su contraparte continua), esta ubicada cuando $H_B(\Omega)$ cae $\sqrt{2}$ por debajo de $H_B(\Omega = 0)$ (figura 12.7).

12.3. Obtención del $H(\Omega)$ a partir del $H(\omega)$

Nos ocuparemos a continuación de explicar cómo se obtuvo la respuesta en frecuencia del filtro *Butterworth* discreto en base al continuo. Existen varios métodos que permiten realizar pasajes desde el tiempo continuo al discreto. Estos métodos son muy utilizados ya que permiten extrapolar la teoría de filtros analógicos continuos, a un campo discreto, posibilitando su implementación digital. Veremos entonces tres métodos diferentes para llevar un filtro continuo a su análogo discreto, resaltando en cada caso las ventajas y desventajas que presenta cada uno.

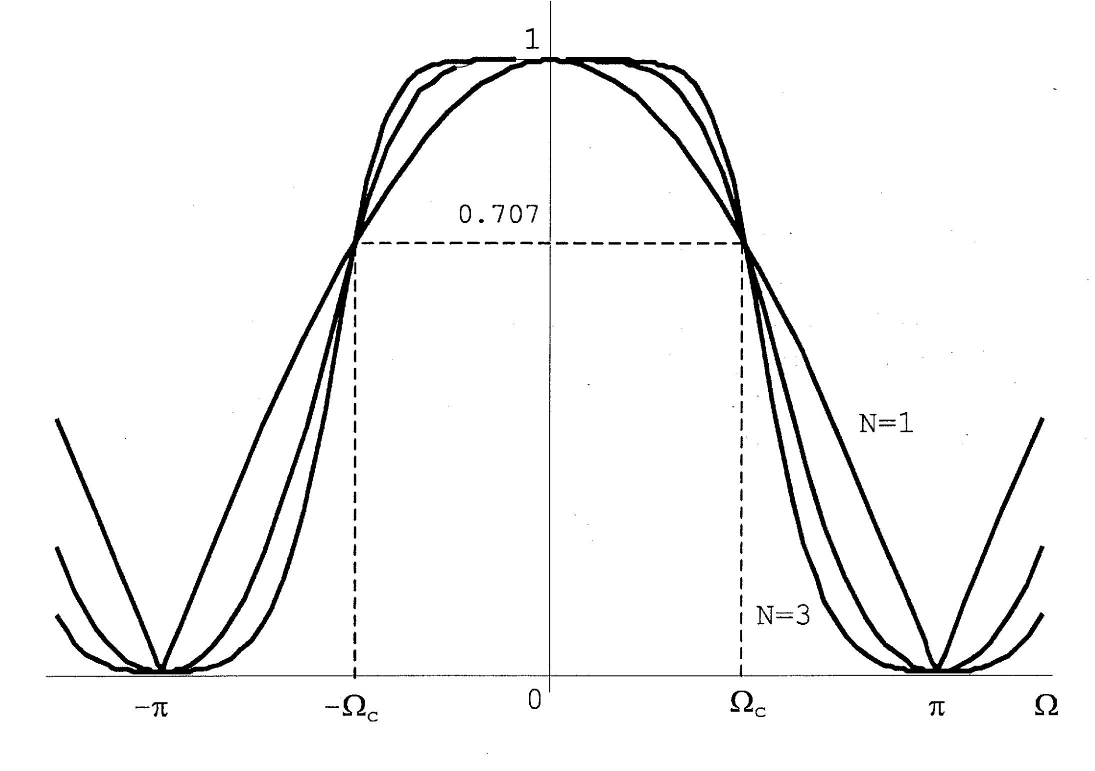


Figura 12.7: Respuesta en frecuencia de un filtro Butterworth discreto.

12.3.1. Invariancia al impulso

La idea central del método consiste en, dada la respuesta impulsional $h(t)$ del filtro continuo, obtener su equivalente discreta $h[n]$ muestreando $h(t)$ de forma que

$$h[n] = h(nT_s)$$

El efecto en el espectro fue analizado en el capítulo de muestreo: siempre y cuando el $H(\omega)$ sea de banda limitada y la selección del T_s sea correcto, el espectro del filtro discreto será una réplica periódica del continuo (escalada por $1/T$).

Recordemos que el proceso de muestreo se realiza multiplicando la señal a muestrear, en este caso el $h(t)$ del filtro, por un peine de deltas:

$$\begin{aligned} h(t) &\longrightarrow H(\omega) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s) &\longrightarrow \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \\ h(nT_s) = h(t).\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s) &\longrightarrow \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega - n\omega_s) \end{aligned}$$

donde $\omega_s = 2\pi/T_s$ es la frecuencia de muestreo y se utilizó la propiedad de modulación de la transformada de Fourier ($x_1(t).x_2(t) \longrightarrow 1/2\pi X_1(\omega) * X_2(\omega)$). La limitación fundamental de este muestreo radica en asegurar que $H(\omega)$ sea acotada en banda ($H(\omega) = 0, |\omega| > \omega_{MAX}$)

Para analizar cómo se relaciona la ubicación de los polos y ceros en el plano Z con respecto a dónde se ubicaban en el plano s, debemos aplicar la transformada de Laplace a $h(nT_s)$ de la siguiente forma:

$$h(nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{h(nT_s)}_{constante} \delta(t - nT_s) \longrightarrow H(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT_s)e^{-snT_s} \qquad (12.3)$$

donde al transformar la sumatoria, el término $h(nT_s)$ no depende de t, y utilizando la propiedad de desplazamiento de la transformada de Laplace ($x(t - t_0) \longrightarrow e^{-st_0}X(s)$) obtuvimos $\delta(t - nT_s) \longrightarrow e^{-snT_s}$.

La transformada Z de $h[n]$ es

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

y como $h[n] = h(nT_s)$, podemos asegurar que

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT_s)z^{-n} \qquad (12.4)$$

Por lo tanto observando simultáneamente 12.3 y 12.4 podemos concluir en que la relación entre s y z es

$$\boxed{H(z)\Big|_{z=e^{sT_s}} = H(s)} \qquad (12.5)$$

El mapeo conforme establecido por la transformación exponencial 12.5 puede ser analizado de la siguiente forma. Si utilizamos la siguiente convención:

$$\begin{aligned} z &= \rho + e^{i\varphi} \\ s &= \sigma + i\omega \end{aligned}$$

obtenemos

$$z = e^{sT_s} = e^{(\sigma+i\omega)T_s} = \underbrace{e^{\sigma T_s}}_{\rho}\underbrace{e^{i\omega T_s}}_{\varphi}$$

Esto es:

- Como el valor de ρ debe estar limitado entre $\pm\pi$ (un giro completo), entonces podemos considerar por ejemplo $\pi/T_s > \omega > -\pi/T_s$. Variar ω entonces genera circunferencias concéntricas en el plano z.

- Para valores de σ positivos, que representan rectas verticales en el semiplano derecho s, el $\rho = e^{\sigma T_s}$ genera radios, de las circunferencias mencionadas, mayores que uno.

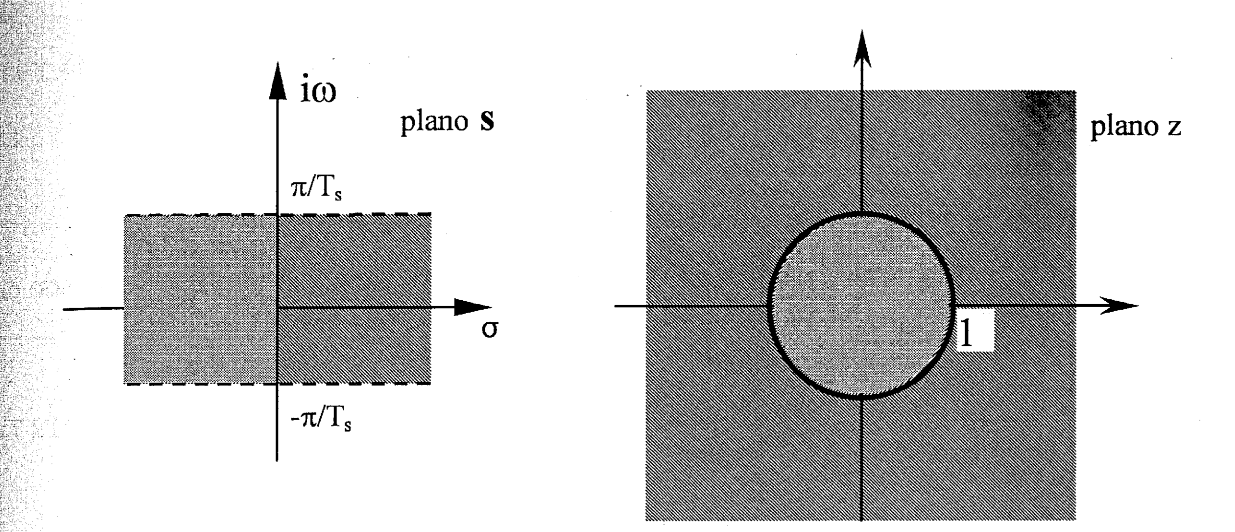


Figura 12.8: Resultado del mapeo.

- Para valores de σ negativos, que representan rectas verticales en el semiplano izquierdo s, el $\rho = e^{\sigma T_s}$ genera radios menores que uno.

Veamos el resultado del mapeo en la figure 12.8.

Hagamos notar algunos puntos. Si el $H(\omega)$ del filtro continuo es acotado en banda, y la selección de la frecuencia de muestreo respeta el teorema de Nyquist, entonces $\omega_s \geq 2\omega_{MAX}$ y entonces $2\pi/T_s > 2\omega_{MAX}$, por lo tanto $\pi/T_s = \omega_{MAX}$. Esto indica que todo el espectro estará concentrado entre las banda marcadas $\pm\pi/T_s$ y asimismo lo harán los polos. Además, si el sistema es estable, los polos estarán dentro de la zona rayada en el semiplano izquierdo, que será mapeada **dentro** de la circunferencia unitaria *asegurando* la estabilidad del filtro discreto. La principal desventaja del método, como ya mencionamos, es la imposición de acotar en banda $H(\omega)$

12.3.2. Aproximación por derivadas

Así como en el caso anterior se utilizó la respuesta impulsional del filtro continuo a implementar en el campo discreto, este método plantea utilizar la ecuación diferencial que caracteriza al sistema continuo y encontrar su ecuación en diferencias análoga. Para cumplir este objetivo, debemos recordar que una aproximación de primer orden para una derivada puede ser la resta de la muestra actual con la anterior. Teniendo en cuenta además el período de muestreo, podemos sugerir la siguiente aproximación:

$$y'(t) = \frac{y[n] - y[n-1]}{T_s} \tag{12.6}$$

y para una derivada de segundo orden, aplicando el mismo criterio, obtenemos

$$y''(t) = \frac{\frac{y[n]-y[n-1]}{T_s} - \frac{y[n-1]-y[n-2]}{T_s}}{T_s} = \frac{y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]}{T_s^2}$$

Veamos qué sucede por ejemplo al aplicar la transformada de Laplace a la izquierda y la transformada Z a la derecha de la igualdad 12.6:

$$sY(s) = Y(z)\frac{1 - z^{-1}}{T_s}$$

Como deseamos que $Y(s) = Y(z)$ podemos ver que la transformación (conforme) desde el plano Z al plano s en este caso es:

$$\boxed{s = \frac{1 - z^{-1}}{T_s}} \qquad (12.7)$$

o despejando z:

$$\boxed{z = \frac{1}{1 - sT_s}} \qquad (12.8)$$

Analicemos cómo se transforma el eje imaginario $s = i\omega$. Todos los puntos deben ser, en primera instancia multiplicados por T_s, y luego espejados debido al signo negativo, por lo tanto aun se conservan sobre el mismo eje. Luego hay que sumarle 1 con lo cual se desplazan todos a la derecha hasta $\sigma = 1$. Finalmente aplicamos la inversión, utilizando el método estudiado:

$$\sigma - 1 = 0 \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 0 \\ D = -1 \end{cases}$$

obteniendo, con $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} -1(x^2 + y^2) + x &= 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

una circunferencia como muestra la figura 12.9. Verifique además comprender la zona rayada.

Para valores pequeños de sT_s ($sT_s \to 0$), los puntos mapeados estarán cerca de $z = 1$. Si se desea mantener la forma de la respuesta en frecuencia del sistema continuo en el discreto, el eje imaginario $s = i\omega$ debería transformarse en la circunferencia de radio unitaria $|z| = 1$. Esto solo sucede para los puntos mencionados, es decir si el valor de T_s es lo suficientemente pequeño para que la aproximación de primer orden sea aceptable, o dicho de otra forma sT_s debe ser muy pequeño (la frecuencia de muestreo f_s por lo menos 10 veces más grande que la frecuencia máxima del $H(\omega)$).

Vemos, por otro lado, que en este método no aparece el efecto de *aliasing* que presentaba el método anterior.

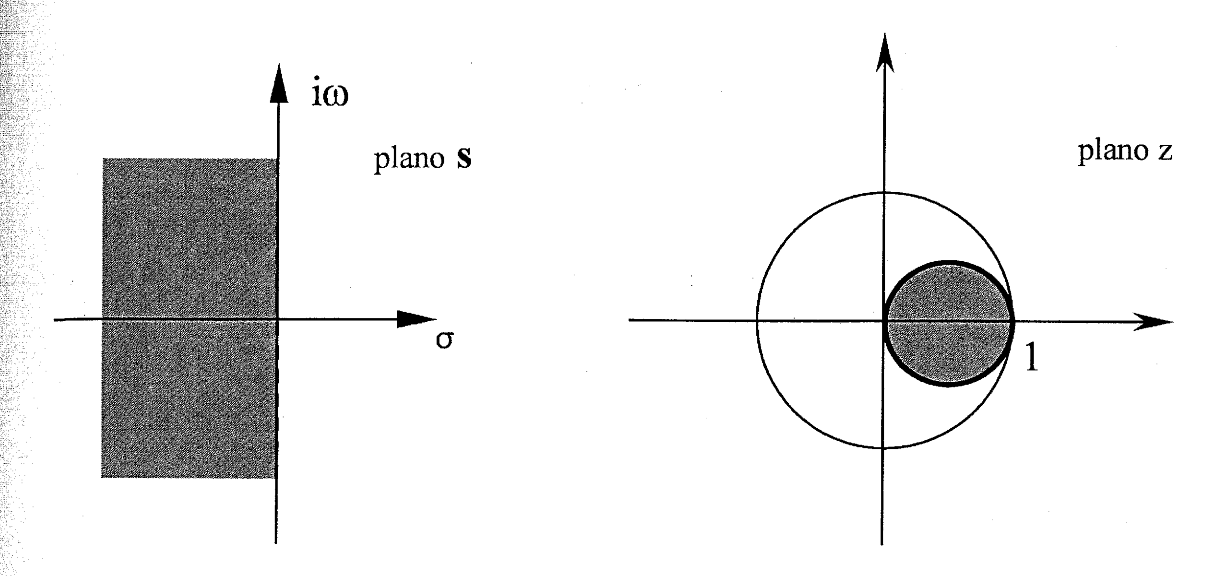


Figura 12.9: Resultado del mapeo.

12.3.3. Transformación bilineal

Este último caso es el más utilizado por presentar un mapeo muy conveniente desde el plano s al z y viceversa. La transformación está gobernada por la siguiente relación:

$$\boxed{s = \frac{2}{T_s}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} \tag{12.9}$$

y despejando z obtenemos:

$$\boxed{z = \frac{1 + (T_s/2)s}{1 - (T_s/2)s}} \tag{12.10}$$

Veamos cómo, a partir de 12.10, podemos hallar el lugar geométrico donde se mapea el semiplano izquierdo del plano s. Operemos para obtener la siguiente relación:

$$z = 1 + \frac{1 + (T_s/2)s + 1 - 1}{1 - (T_s/2)s} = \frac{2}{1 - \frac{sT_s}{2}} - 1$$

Mapeando el eje imaginario $i\omega$ junto con el semiplano debemos primero multiplicar a los puntos por la constante T_s y luego espejarlos debido al signo negativo; luego al sumar 1 los puntos se desplazan hasta $\sigma = 1$, la inversión, el producto por 2 y el nuevo desplazamiento pueden verse en forma ordenada gráficamente (figura12.10).

El semiplano izquierdo del plano s de Laplace quedó mapeado completamente dentro de la circunferencia de radio unitario, y más aun, el eje imaginario $i\omega$ es ahora la circunferencia de radio unitaria $|z| = 1$. Los sistemas estables continuos serán entonces también continuos en su equivalente discreto.

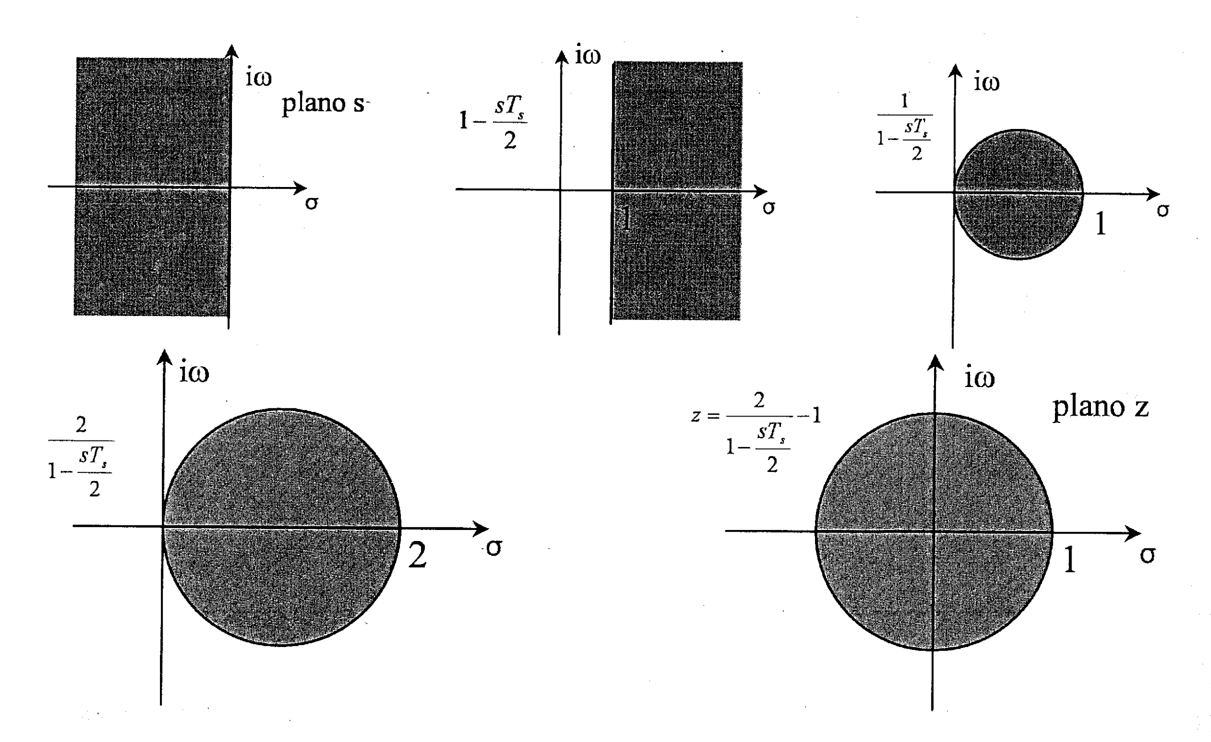


Figura 12.10: Mapeo del semiplano izquierdo a través de la función bilineal.

Veamos entonces cómo se relacionan los espectros continuos con sus análogos discretos. Utilizando 12.9, reemplazamos $s = i\omega$ y $z = e^{i\Omega}$:

$$\begin{aligned} i\omega &= \frac{2}{T_s}\frac{1-e^{-i\Omega}}{1+e^{-i\Omega}} = \frac{2}{T_s}\frac{e^{-i\Omega/2}}{e^{-i\Omega/2}}\frac{e^{i\Omega/2}-e^{-i\Omega/2}}{e^{i\Omega/2}+e^{-i\Omega/2}} \\ i\omega &= i\frac{2}{T_s}\frac{sen(\Omega/2)}{cos(\Omega/2)} \end{aligned}$$

entonces:

$$\omega = \frac{2}{T_s} tan(\Omega/2) \tag{12.11}$$

Si ahora despejamos Ω obtenemos

$$\Omega = 2.tan^{-1}\frac{\omega.T_s}{2} \tag{12.12}$$

grafiquemos esta última relación para comprender cómo se relacionan los espectros mencionados en la figura 12.11.

Note que el espectro de un filtro continuo se debe desarrollar a lo largo de todo el eje ω (ya que el $H(\omega)$ es aperiódico). Si ahora entramos con un valor de ω al gráfico saldremos con el valor de Ω que le corresponderá en el filtro discreto. La transformación bilineal tiene un efecto de *compresión* del espectro continuo para que quepa dentro de uno entre $\Omega \pm \pi$.

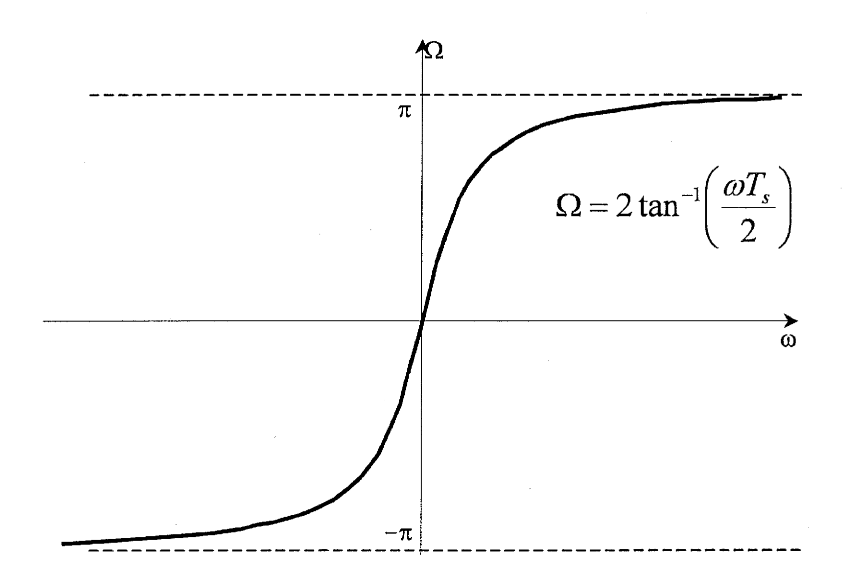


Figura 12.11: Desdoblamiento del eje frecuencial.

Como el arcotangente es periódico con período 2π, esto generará el espectro deseado. La curvatura no lineal del eje frecuencial genera espectros continuos y discretos muy similares aunque las frecuencias de corte continuas y discretas no coinciden con exactitud.

Veamos el diseño de un filtro pasa-bajos de primer orden. Un filtro continuo pasa-bajos de primer orden posee la siguiente función transferencia:

$$H(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} \tag{12.13}$$

La frecuencia de corte ω_c se caracteriza por ser el punto en que la amplitud cae 3dB con respecto a $H(\omega = 0)$, o en términos de potencia, el punto de potencia mitad [1]:

$$\frac{|H(\omega_c)|^2}{|H(0)|^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 10.log_{10}\left[\frac{|H(\omega_c)|^2}{|H(0)|^2}\right] = 10.log_{10}\left[\frac{1}{2}\right] = -3dB$$

Asumiendo que en forma normalizada $H(0) = 1$, entonces

$$|H(\omega_c)|^2 = \frac{1}{2}$$

De esta forma hallamos la frecuencia de corte de 12.13, recordando que $s = i\omega$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{\alpha}{i\omega+\alpha} \\ |H(\omega)|^2 &= \frac{\alpha^2}{\omega^2+\alpha^2} = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2+1} \end{aligned}$$

[1]Recuerde que para trabajar en dB se aplica $20.log_{10}(|H(\omega)|)$ a las transferencias y para el caso de trabajar con módulos al cuadrado:$10.log_{10}(|H(\omega)|^2)$

y para $\omega = \omega_c$:

$$|H(\omega_c)|^2 = \frac{1}{\left(\frac{\omega_c}{\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

de donde $\omega_c = \alpha$. Graficamos entonces el espectro de potencia del filtro pasa-bajos continuo en la figura 12.12.

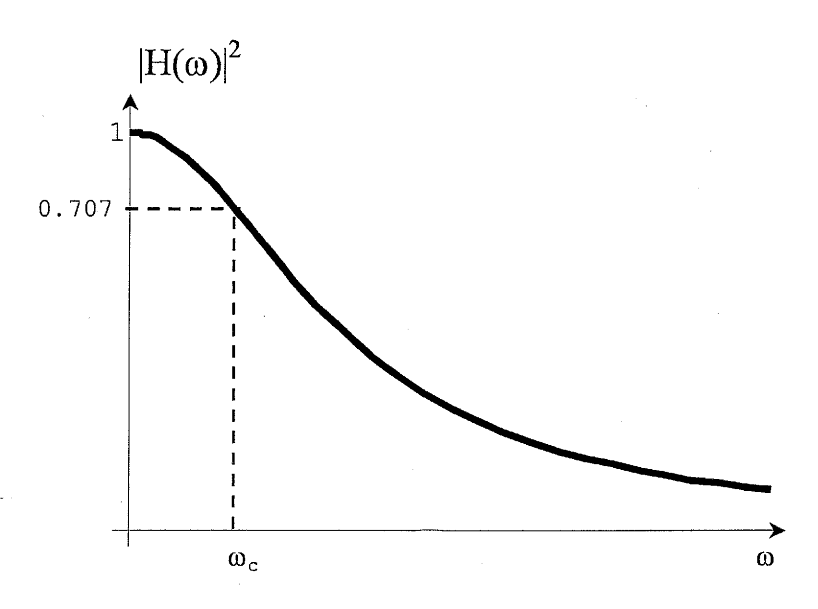


Figura 12.12: Respuesta en frecuencia de un filtro pasa-bajos en el campo continuo.

La frecuencia normalizada discreta con respecto a la frecuencia de muestreo es:

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi f}{f_s} = \frac{2\pi\omega}{\omega_s}} \tag{12.14}$$

La especificación del filtro tendrá como parámetros la frecuencia de muestreo f_s y la frecuencia de corte f_c.

Para pasar al plano z, utilizamos 12.9 en 12.13:

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\alpha}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \alpha} = \frac{\alpha(1+z^{-1})}{1 - z^{-1} + \alpha(1+z^{-1})}$$

Podemos finalmente escribir

$$H(z) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \frac{1+z^{-1}}{1 - \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) z^{-1}} = B\frac{1+z^{-1}}{1-Az^{-1}}$$

donde

$$\boxed{A = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad B = \frac{\alpha}{1+\alpha}} \tag{12.15}$$

y recordando que en este caso

$$\boxed{\alpha = \omega_c}$$

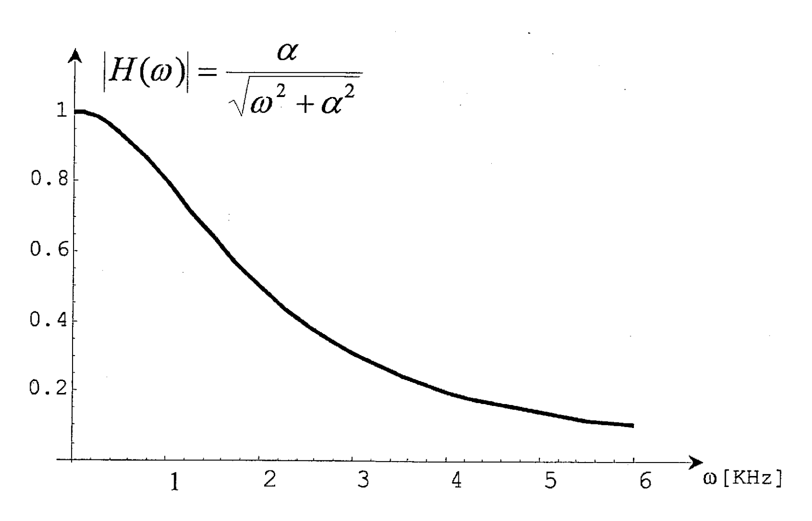
Los pasos para el diseño son los siguientes:

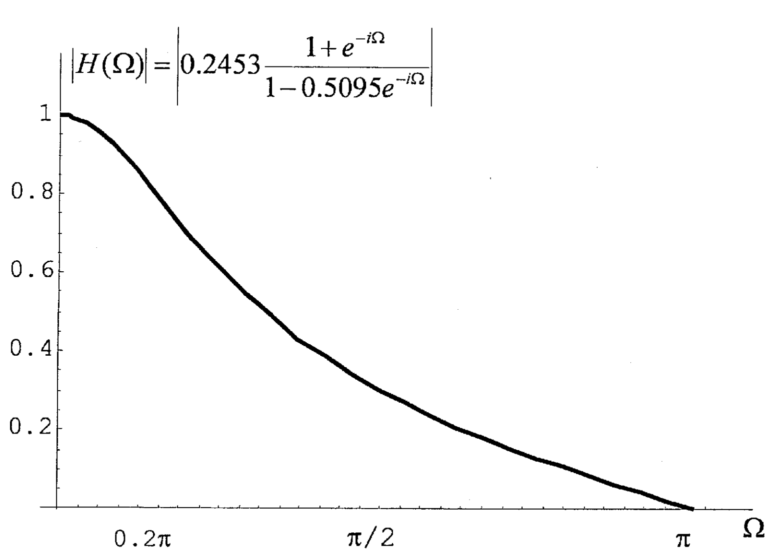
1. Los parámetros son la frecuencia de corte f_c y la frecuencia de muestreo f_s.
2. Hallamos la Ω_c correspondiente del filtro discreto utilizando 12.14.
3. La especificación de la frecuencia de corte es para el filtro discreto. Para hallar la frecuencia de corte ω_c del filtro continuo utilizamos la relación 12.11 de la transformación bilineal
$$\alpha = \omega_c = tan\left(\frac{\Omega_c}{2}\right)$$
4. Dado que $\alpha = \omega_c$, utilizamos las relaciones 12.15 para finalmente hallar el filtro resultante:
$$H(z) = B\frac{1+z^{-1}}{1-Az^{-1}}$$

Ejemplo 12.3.1 *Diseñe un filtro digital de primer orden que opere a $f_s = 10KHz$ y cuya frecuencia de corte sea $1KHz$.*

Seguimos los puntos de diseño:

1. *Establecemos los parámetros del filtro: $f_c = 1KHz$ y $f_s = 10Khz$.*
2. *Hallamos Ω_c como*
$$\Omega_c = \frac{2\pi f_c}{f_s} = \frac{2\pi 1KHz}{10KHz} = 0{,}2\pi$$
3. *La frecuencia correspondiente para el eje frecuencial continuo es:*
$$\omega_c = tan\left(\frac{\Omega_c}{2}\right) = tan(0{,}1\pi) = 0{,}3249$$
4. *Hallamos $\alpha = 0{,}3249$ y las contantes A y B:*
$$A = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0{,}5095 \qquad B = \frac{\alpha}{1+\alpha} = 0{,}2453$$
Finalmente el filtro discreto pedido es el siguiente:
$$H(z) = B\frac{1+z^{-1}}{1-Az^{-1}} = 0{,}2453\frac{1+z^{-1}}{1-0{,}5095z^{-1}}$$
Grafiquemos ambos espectros, el continuo y el discreto.





12.4. Realización de filtros digitales

Una vez obtenida la función transferencia del filtro digital, es importante conocer las formas de implementación posibles que permiten facilitar su puesta en marcha en una computadora. Veremos algunos esquemas a continuación y comentaremos sus características.

12.4.1. Forma directa

Consideremos como ejemplo una función transferencia de segundo orden:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \tag{12.16}$$

cuya ecuación en diferencias es

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] - b_1 y[n-1] - b_2 y[n-2]$$

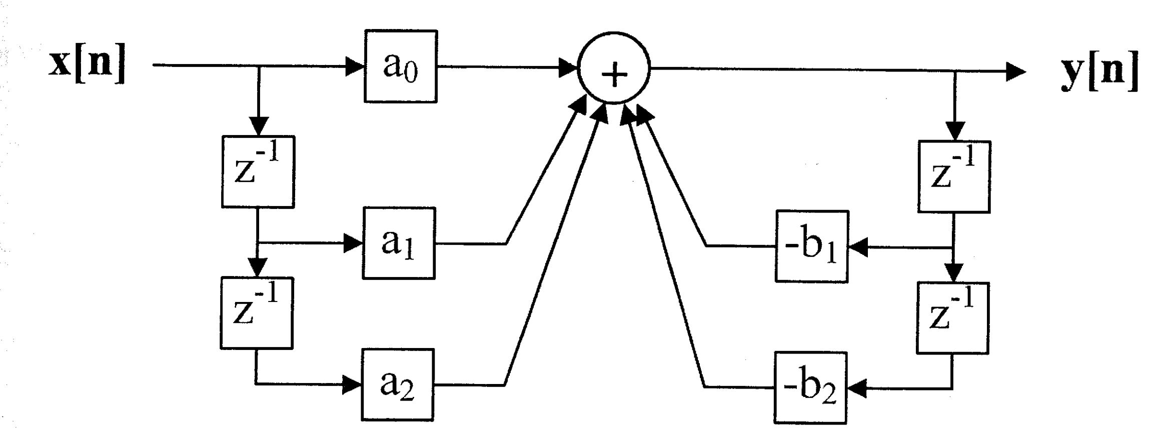


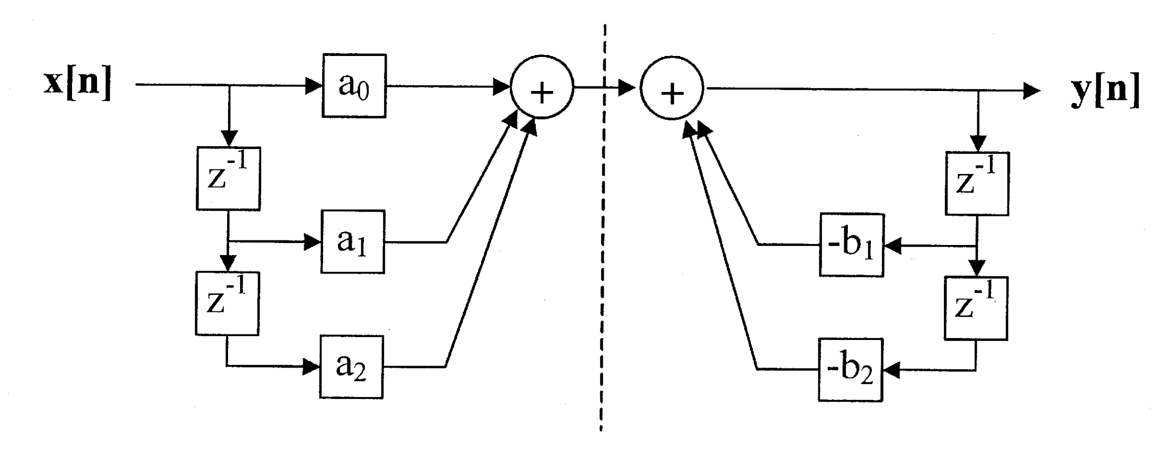
Figura 12.13: Diagrama en bloques de un sistema de segundo orden.

El diagrama en bloques correspondiente es el de la figure 12.13.

Esta forma de implementación cuenta con un solo sumador. Los parámetros a_0, a_1, a_2 son los que caracterizan la realimentación de entrada (no recursiva), y b_1, b_2 caracterizan la realimentación de la salida (recursiva).

12.4.2. Forma canónica

Para llegar a la forma canónica vamos a operar sobre los bloques de la forma directa. En primer instancia separemos al sumador central en dos sumadores:



De esta manera tenemos dos sistemas LTI en cascada y por lo tanto podemos intercambiarlos obteniendo la misma salida, como se observa en la figura 12.14

y finalmente unimos los bloques de retraso z^{-1} ya que a sus salidas generan idénticas señales, llegando a la forma canónica buscada.

Esta forma se puede obtener analíticamente separando a los ceros (numerador $N(z)$)de la expresión 12.16 de los polos (denominador $D(z)$), confeccionando dos sistemas en cascada:

$$H(z) = \frac{1}{D(z)}.N(z)$$

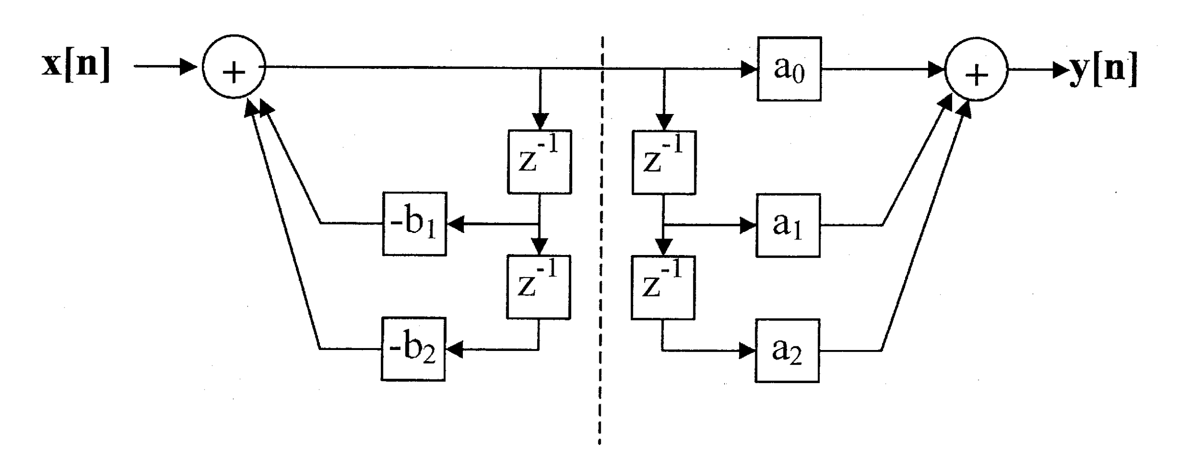


Figura 12.14: Diagrama en bloques

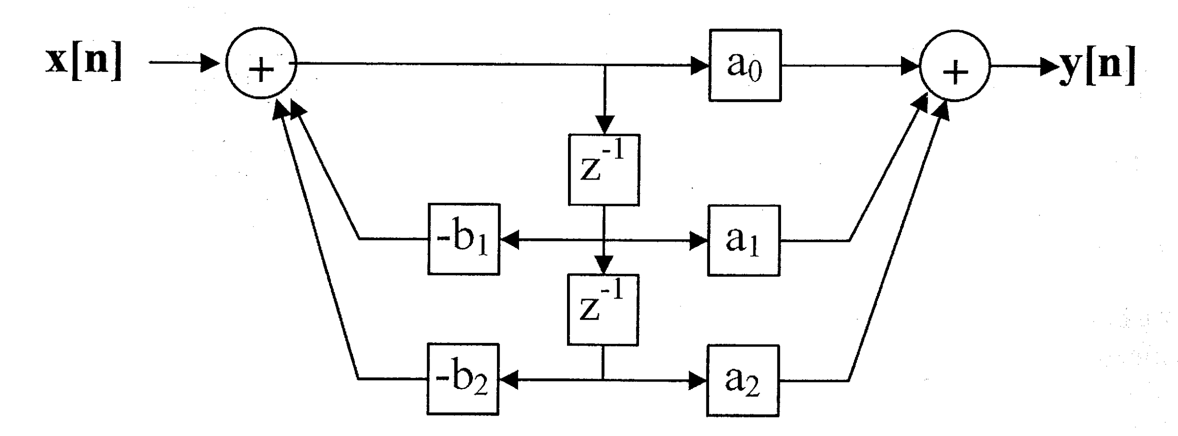


Figura 12.15: Forma canónica del diagrama en bloques de un sistema de segundo orden.

Tanto la forma directa como la canónica se pueden generalizar para una transferencia con N polos y M ceros, sin necesidad que $N = M$.

12.4.3. Diseño en cascada

Si ahora planteamos una transferencia genérica con N polos y M ceros

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_M z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_N z^{-N}} \tag{12.17}$$

y deseamos implementarla en la forma directa, mantenemos el único sumador central y agregamos las realimentaciones en la entrada o en la salida correspondientes. Es simple también implementar la forma canónica siempre conservando sus dos sumadores.

Presentamos entonces la última forma de implementación que supone factorizar el numerador y el denominador en sus raíces, formando términos de segundo orden. De esta

manera podemos colocar K bloques de segundo orden en cascada:

$$H(z) = \prod_{i=0}^{i=K-1} H_i(z) = \prod_{i=0}^{i=K-1} \frac{a_{i0} + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}}{1 + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2}} \qquad (12.18)$$

Elegir bloques de segundo orden no es arbitrario. Al tener polinomios de segundo orden en el numerador y en el denominador, podemos agrupar ceros o polos complejos conjugados por bloque, sumado la posibilidad de ceros o polos simples. Pos supuesto no todos los coeficiente a_i o b_i deben ser distintos de cero. Veamos el diagrama en bloques de una cascada de dos bloques de segundo orden:

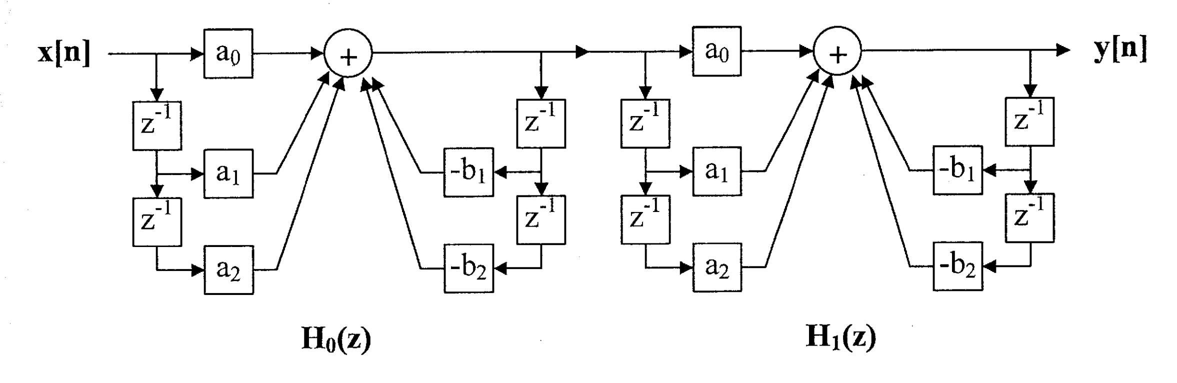


Figura 12.16: Sistemas en cascada.

12.4.4. Cascada a canónica y viceversa

Para pasar de la estructura en cascada a la canónica solo hay que distribuir el numerador de 12.18 y reconocer los parámetros a_m y b_m. La obtención del diagrama en bloques es inmediata.

En el caso de querer llevar una expresión como la 12.17 a la forma en cascada, es necesario factorizar el numerador en sus raíces (simples, dobles o complejas conjugadas) y agruparlas por separado. Luego se pueden agrupar los polos con los ceros indistintamente. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 12.4.1 *Detemine la realización en cascada de la siguiente función transferencia:*

$$H(z) = \frac{1 - 1{,}5z^{-1} + 0{,}48z^{-2} - 0{,}33z^{-3}0{,}9376z^{-4} - 0{,}5328z^{-5}}{1 + 2{,}2z^{-1} + 1{,}77z^{-2} + 0{,}52z^{-3}}$$

Hallamos entonces las raíces del numerador: los ceros.

$$z_1 = 0{,}9 \qquad z_{2,3} = -0{,}5 \pm 0{,}7i \qquad z_{4,5} = 0{,}8 \pm 0{,}4i$$

y las del denominador: los polos.

$$p_1 = -0{,}8 \qquad p_{2,3} = -0{,}7 \pm 0{,}4i$$

confeccionamos entonces el numerador con los siguientes términos

$$(1 - 0{,}9z^{-1})$$
$$(1 - (-0{,}5 + 0{,}7i)z^{-1})(1 - (-0{,}5 - 0{,}7i)z^{-1})$$
$$(1 - (-0{,}8 + 0{,}4i)z^{-1})(1 - (-0{,}8 - 0{,}4i)z^{-1})$$

y el denominador con

$$(1 + 0{,}8z^{-1})$$
$$(1 - (-0{,}7 + 0{,}4i)z^{-1})(1 - (-0{,}7 - 0{,}4i)z^{-1})$$

Haciendo los productos correspondiente, obtenemos la expresión final, donde se agrupó arbitrariamente:

$$H(z) = \underbrace{\frac{1 - 0{,}9z^{-1}}{1 + 0{,}8z^{-1}}}_{H_0(z)} \underbrace{\frac{1 + z^{-1} + 0{,}74z^{-2}}{1 + 1{,}4z^{-1} + 0{,}65z^{-2}}}_{H_1(z)} \underbrace{(1 - 1{,}6z^{-1} + 0{,}8z^{-2})}_{H_2(z)}$$

12.5. Diseño de filtros FIR

Como ya describimos en el capítulo de transformada Z, los filtros FIR poseen características muy interesantes. Su estabilidad incondicional por la ausencia de polos sumado su fase lineal, convierte a un filtro FIR en una alternativa a la hora de solucionar problemas concretos. Una vez impuestas las especificaciones del filtrado que se desea obtener, el objetivo es encontrar al conjunto de M coeficientes que forman la respuesta al impulso $h[n] = \{a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}\}$ que las cumplan. Recordemos que un filtro FIR de orden N, tendrá $N+1$ coeficientes a determinar y que, cuanto más *estrictas* sean las especificaciones, de mayor orden será el filtro resultante. Veremos a continuación dos métodos clásicos de diseño de filtros FIR. El primero mediante el uso de ventanas, y el segundo utilizando la DFT.

12.5.1. Ventanas

El método de diseño de ventanas se aplica para intentar llevar filtros ideales a la práctica, y su implementación es muy sencilla. Planteemos los cuatro filtros ideales clásicos en el campo discreto, recordando que sus espectros son siempre periódicos de período 2π.

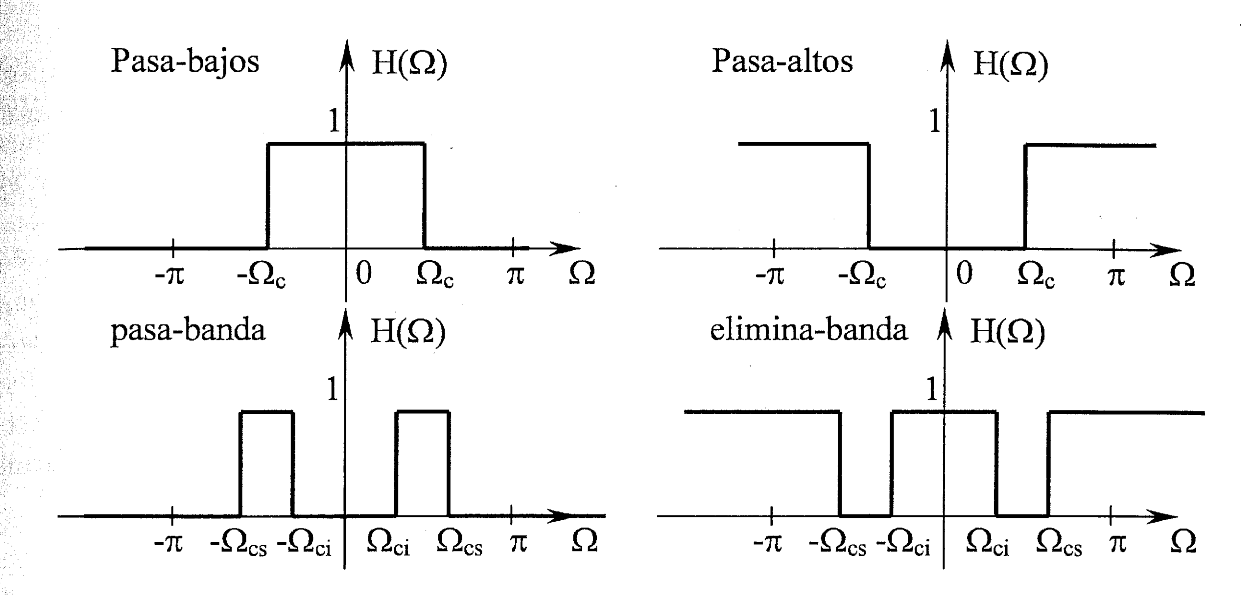


Figura 12.17: Diseño filtros FIR.

Aplicando la transformada inversa de Fourier para señales discretas, podemos hallar la respuesta impulsional $h[n]$:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega)e^{i\Omega n}d\Omega$$

Convolucionando este $h[n]$ con la entrada, obtendríamos la salida deseada. El problema reside en que generalmente este $h[n]$ es una señal bilateral y posee un número infinito de muestras. Esto lo hace imposible de llevar a la práctica. Hallemos las respuestas impulsionales para cada caso:

$$\begin{aligned}
h_{PB}[n] &= \delta[n] - \frac{sen(\Omega_c n)}{\pi n} \qquad (Pasa - bajos) \\
h_{PA}[n] &= \frac{sen(\Omega_c n)}{\pi n} \qquad (Pasa - altos) \\
h_{PBA}[n] &= \frac{sen(\Omega_{cs} n) - sen(\Omega_{ci} n)}{\pi n} \qquad (Pasa - banda) \\
h_{EBA}[n] &= \delta[n] - \frac{sen(\Omega_{cs} n) - sen(\Omega_{ci} n)}{\pi n} \qquad (Elimina - banda)
\end{aligned}$$

donde en los filtros pasa-banda y elimina-banda, a las frecuencias de corte las denominamos:

- Frecuencia de corte inferior Ω_{ci}.
- Frecuencia de corte superior Ω_{cs}.

Note las relaciones complementarias que presentan entre sí los filtros pasa-bajos y pasa-altos, así como los pasa-banda y elimina-banda. Esto último puede ayudar mucho a simplificar el diseño y la implementación.

Veamos además que como se supuso una fase cero, las respuestas en frecuencia $H(\Omega)$ se supusieron **reales** y por lo tanto los $h[n]$ son pares.

Ventana Rectangular

Para solucionar el problema de la duración infinita de las respuestas al impulso, se propone a continuación aplicar una *ventana* que recorte el $h[n]$ para hacerlo finito. Este truncamiento lo realizaremos, en principio, con una ventana rectangular. De esta forma tomaremos M coeficientes a cada lado de la siguiente manera:

$$\boxed{h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega)e^{i\Omega n}d\Omega \qquad -M \leq n \leq M}$$

donde el número de coeficientes será siempre impar, y será $N = 2M + 1$:

$$h[n] = \{h[-M], h[-M+1], \ldots, h[0], h[1], \ldots h[M]\}$$

donde el $h[0]$ es el coeficiente central. Para que el filtro sea causal, desplazaremos todos los coeficientes M lugares a la derecha, obteniendo finalmente los coeficientes del filtro $a[n]$ como

$$a[n] = h[n-M] = \{a[0], a[1], \ldots a[2M]\}$$

Veamos el efecto gráfico:

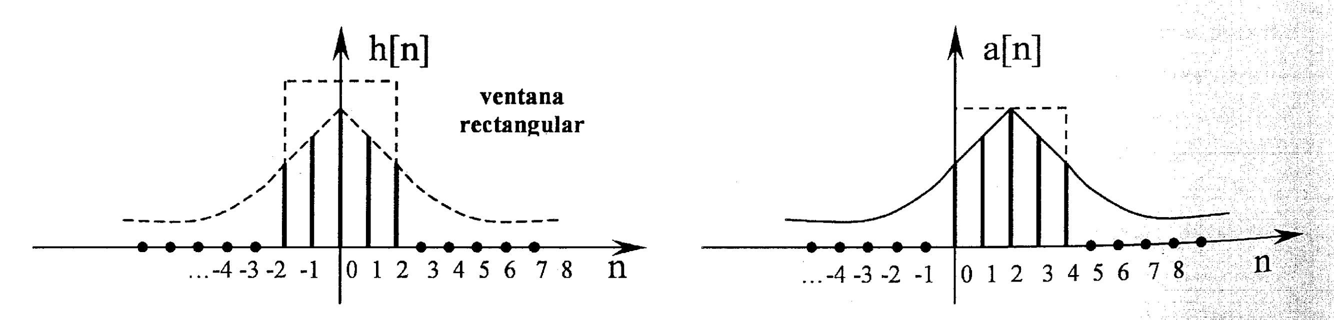


Figura 12.18: Diseño filtros FIR.

Al truncar el $h[n]$ original que generaba un filtro ideal, es de esperar que el espectro se vea deformado. Para analizar qué sucedió con el espectro, pensemos a la ventana rectangular como una función:

$$w[n] = u[n] - u[n - 2M + 1]$$

que se *aplica* luego de desplazar M lugares al $h[n]$ original. El término *aplicar* implica **multiplicar** el $h[n]$ con la ventana $w[n]$. Como es un producto temporal, en frecuencia debemos convolucionar el espectro $H(\Omega)$ (respuesta en frecuencia ideal deseada) con el espectro de la ventana (del tipo *sinc*). A medida que más **ancha** sea la ventana (M más grande), su espectro se comprimirá consiguiendo flancos más abruptos que permitan acercarse al caso ideal. Por el contrario, tomando una ventana **angosta** (pocas muestras), la *sinc* será más ancha y por lo tanto la transición entre las bandas de paso y atenuación serán más graduales. Así se establece la relación de compromiso entre el costo computacional (debido al orden del filtro o a su largo) y las imposiciones de las especificaciones.

Escribamos como ejemplo a continuación los coeficientes para un filtro pasa-bajos:

$$a[n] = h[n-M] = \frac{sin\,[\Omega_c(n-M)]}{\pi(n-M)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{12.19}$$

donde se utilizó $N = 2M + 1$.

Veamos un ejemplo práctico:

Ejemplo 12.5.1 *Grafique las respuestas en frecuencia de dos filtros pasa-bajos que operan a una frecuencia de muestreo de $f_s = 10KHz$ y poseen una frecuencia de corte de $1KHz$; implementados con una ventana rectangular de 41 muestras y 121 muestras respectivamente.*

Comenzamos hallando la frecuencia de corte normalizada Ω_c como

$$\Omega_c = \frac{2\pi f_c}{f_s} = \frac{2\pi 1Khz}{10KHz} = 0{,}2\pi$$

En el primer caso el orden del filtro es 40, ya que $N = 41$. Como $N = 2M+1$ entonces $M = (N-1)/2 = 20$. Calculamos los coeficientes de 12.18 como:

$$a[n] = h[n-20] = \frac{sin\,[0{,}2\pi(n-20)]}{\pi(n-20)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, 40$$

Para el segundo filtro el orden es 120 con $N = 121$ y $M = 60$. Los coeficientes son

$$a[n] = h[n-60] = \frac{sin\,[0{,}2\pi(n-60)]}{\pi(n-60)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, 120$$

y los graficamos en la figura 12.19.

Note que en el gráfico parece estar trazada una curva continua, aunque no lo es: las muestras discretas están muy próximas entre si generando el efecto de continuidad.

Aplicamos ahora la transformada de Fourier [2] *y calculamos el espectro resultante para cada caso, como*

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} a[n]e^{-i\Omega n}$$

[2] En realidad el cálculo se hizo mediante una DFT de 1024 muestras

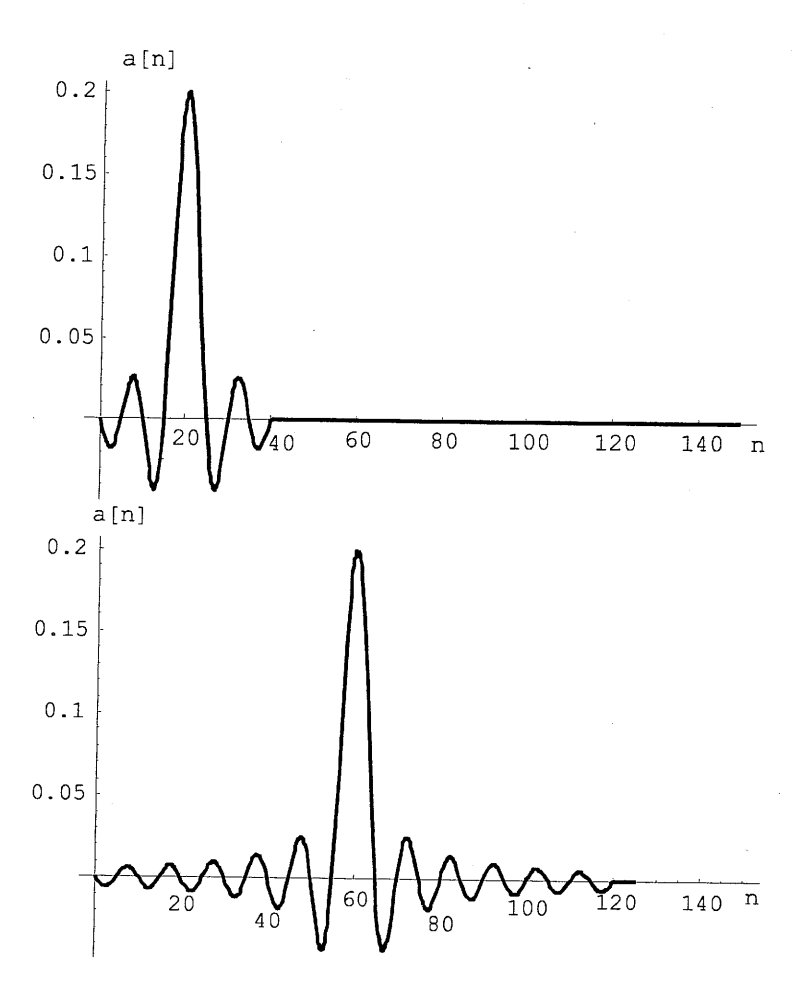


Figura 12.19: Diseño filtros FIR

Observe los espectros en la figura 12.20.

Note que al utilizar una ventana rectangular, con un número considerable de muestras, el espectro del filtro ideal se logra con bastante exactitud exceptuando una oscilación (denominada *ripple*) en las bandas de paso y atenuación. Este *ripple* es consecuencia directa de la utilización de una ventana muy abrupta de corte como es la rectangular. Proponemos a continuación una solución a este problema indeseable.

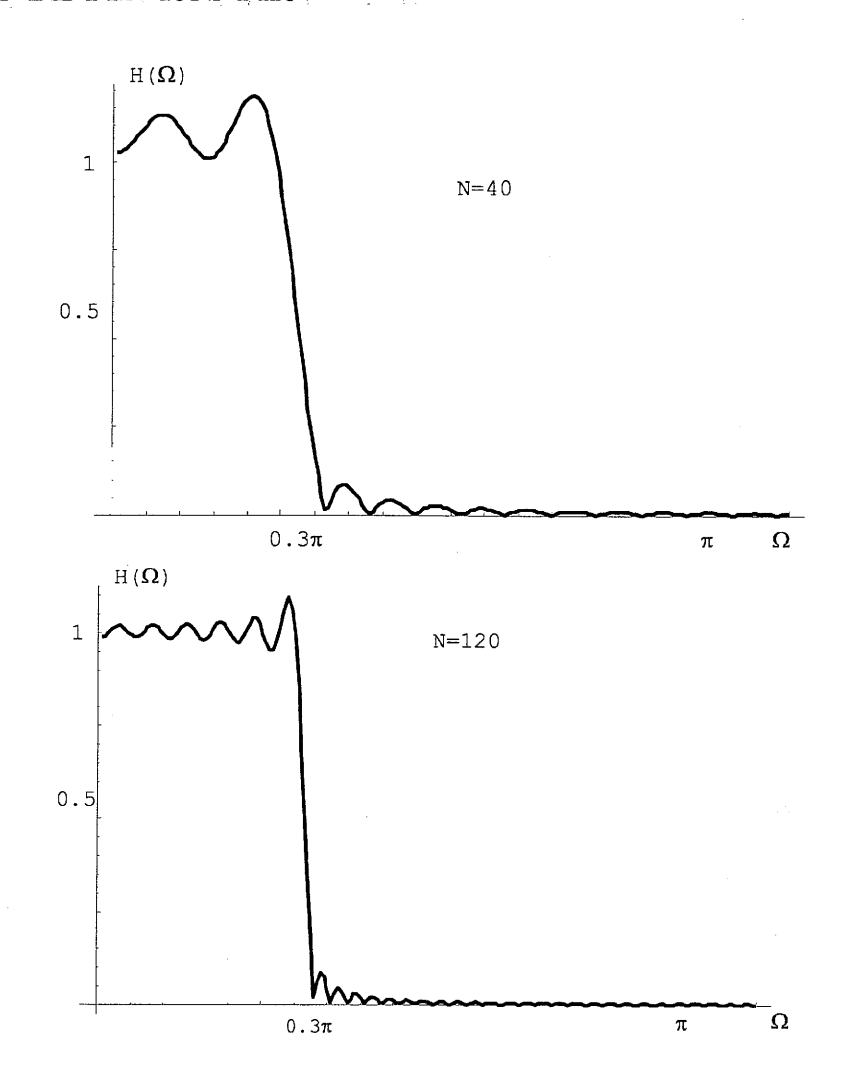


Figura 12.20: Diseño filtros FIR. Respuesta en frecuencia

Ventana de Hamming

Para aliviar el efecto del *ripple* se propone multiplicar a la respuesta impulsional por una ventana con una forma menos abrupta que posea un espectro sin esas oscilaciones indeseadas. Proponemos la ventana de *Hamming*, que tiene la siguiente expresión:

$$w[n] = 0{,}54 - 0{,}46.cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

donde, como hasta el momento, N es el largo de la ventana y $N = 2M + 1$.

De esta forma los coeficientes del filtro, por ejemplo, pasa-bajos quedarán finalmente como:

$$a[n] = w[n].h[n-M] = \left[0{,}54 - 0{,}46.cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right] \frac{sen\left[\Omega_c(n-M)\right]}{\pi(n-M)}$$

Grafiquemos la forma de la ventana para $N = 512$ en la figura 12.21.

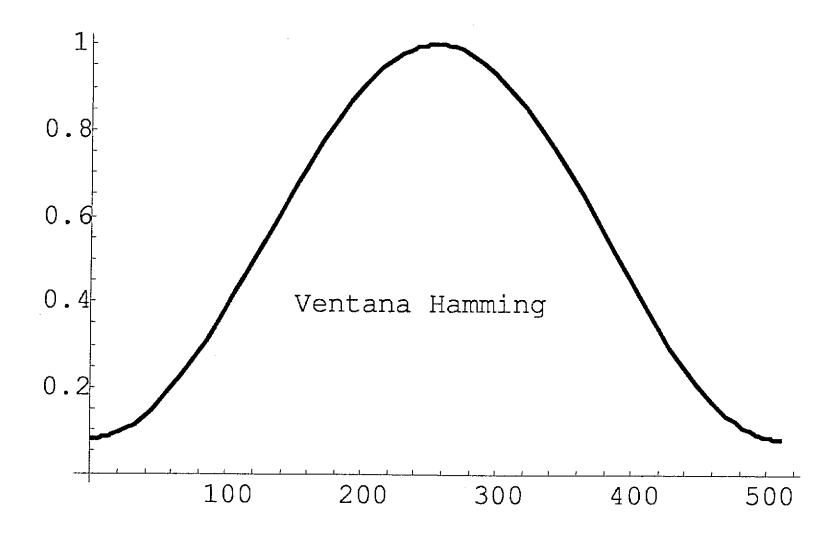


Figura 12.21: Ventana de Hamming

Entonces ahora, no solo se toman N elementos del $h[n]$ original (que recordemos que era infinito y debía ser recortado para su implementación), sino que esos N elementos se multiplican por la amplitud correspondiente a la ventana.

Ejemplo 12.5.2 *Utilizando el ejemplo 12.5.1 para el filtro con* 120 *muestras, utilice ahora una ventana de Hamming.*

Construimos entonces una ventana de Hamming de 120 *muestras:*

$$w[n] = 0{,}54 - 0{,}46.cos\left(\frac{2\pi n}{119}\right)$$

y la multiplicamos por la respuesta impulsional desplazada, para obtener los coeficientes del filtro.

$$a[n] = w[n].h[n-60] = \left[0{,}54 - 0{,}46.cos\left(\frac{2\pi n}{119}\right)\right]\frac{sin\,[0{,}2\pi(n-60)]}{\pi(n-60)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, 120$$

La ventana se observa en la figura 12.22 y el espectro obtenido en la figura 12.23.
Note como el efecto del ripple desapareció.

Así como la ventana de *Hamming* existen una docena de ventanas diferentes que ofrecen en mayor o menor medida el mismo efecto.

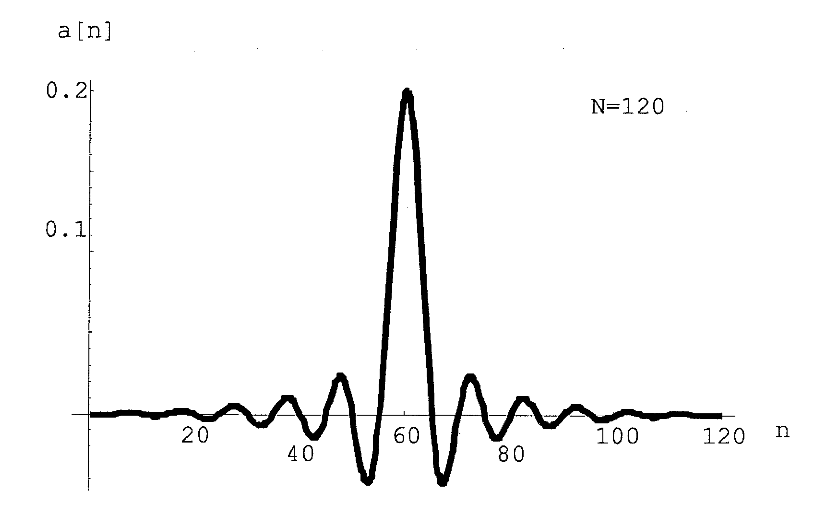


Figura 12.22: Espectro de la ventana de Hamming

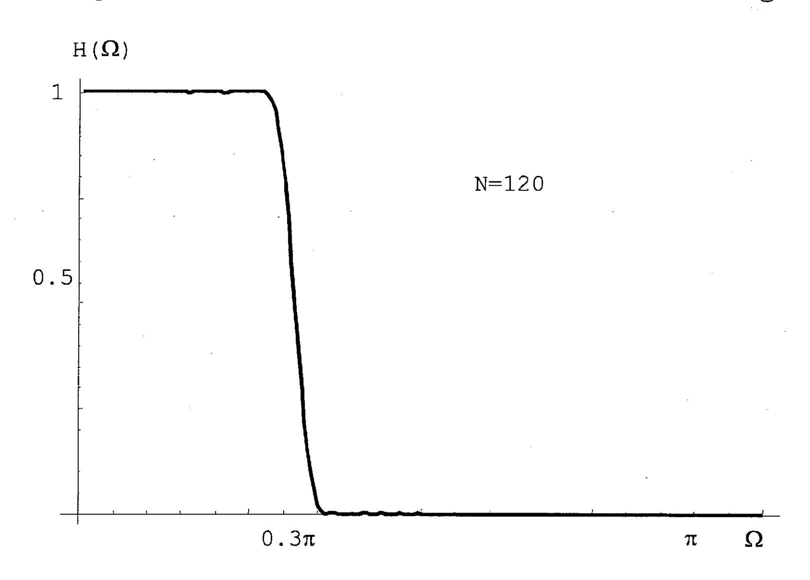


Figura 12.23: Respuesta impulsional del filtro diseñado

Note que, como era de esperar, al utilizar una ventana menos abrupta que la rectangular (y solucionar el problema del *ripple* que era del 8,9 %), el espectro presenta más gradualidad en su transición (y ahora el ripple pico es 0,2 %). Esto implica que para conseguir cumplir con la misma especificación de un filtro, al utilizar otra ventana, la cantidad de coeficientes $a[n]$ será mayor. La relación de compromiso se vuelve a establecer.

Para comparar las ventanas en el campo frecuencial se puede comparar el ancho Δf_w del lóbulo principal de sus espectros. Como ya sabemos, a medida que el largo temporal N de la ventana crece, el Δf_w disminuye y viceversa. La relación entre el Δf_w y el N es:

$$\Delta f_w = \frac{c.f_s}{N-1}$$

donde para la ventana rectangular $c = 1$ y para de de *Hamming* $c = 2$. Además podemos

comparar la atenuación del segundo lóbulo con respecto al central. Para la ventana rectangular es $-13dB$ y para la de *Hamming* es $-40dB$, lo que confirma la diferencia entre el *ripple* en cada una.
La ventana rectangular y la de *Hamming* son fijas; no poseen ningún parámetro que permita regular su gradualidad y, por lo tanto, una vez establecido el largo N, el pico de *ripple* máximo es fijo. Otras ventanas, como la de *Kaiser* ofrecen estas ventajas aunque su diseño es más complicado.

12.5.2. Muestreo frecuencial

El método de ventanas se aplica para conseguir filtros similares a los ideales. Un recurso diferente se utiliza en el caso en que la especificación del filtro sea arbitraria. La forma de la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ puede ser arbitraria. Utilizando la IDFT se puede invertir el espectro deseado y hallar la respuesta impulsional $h[n]$. Recordemos que tanto la DFT como la IDFT de una señal de N muestras, produce N muestras como resultado. Es así como, una vez diseñado el espectro deseado, el mismo se muestrea en N muestras, se antitransforma, y se obtiene el $h[n]$.

Finalmente se puede utilizar cualquier ventana para atenuar el efecto del recorte, tal como hemos hecho anteriormente, siempre desplazando al respuesta para que el filtro sea causal:

$$a[n] = w[n].h[n-M] \qquad n = 0, 1, 2 \ldots, N-1$$

con $N = 2M + 1$.

12.5.3. Diseño de filtros IIR

El diseño de filtros IIR difiere del diseño de filtros FIR en varios aspectos. Para diseñar un filtro IIR se utiliza, generalmente, la transformación bilineal aplicada sobre la transferencia de algún filtro continuo. Sin embargo existen algunos diseños específicos muy utilizados que tienen sus propias recetas de diseño. Veamos un ejemplo concreto de filtros que se utilizan para eliminar una banda de frecuencia muy puntual: los filtros *notch*.

Filtros Notch

La mejor manera de introducir a este tipo de filtros es mostrar su respuesta en frecuencia. Observe atentamente la figura 12.24.

Estos filtros se utilizan para eliminar, principalmente, señales temporales periódicas. Por ejemplo, el ruido de línea de 50Hz es un ruido muy típico al adquirir señales biomédicas, ya que las mismas son de baja frecuencia. Como la tensión de línea es senoidal, su espectro son dos deltas que pueden ser eliminados con este tipo de filtro.

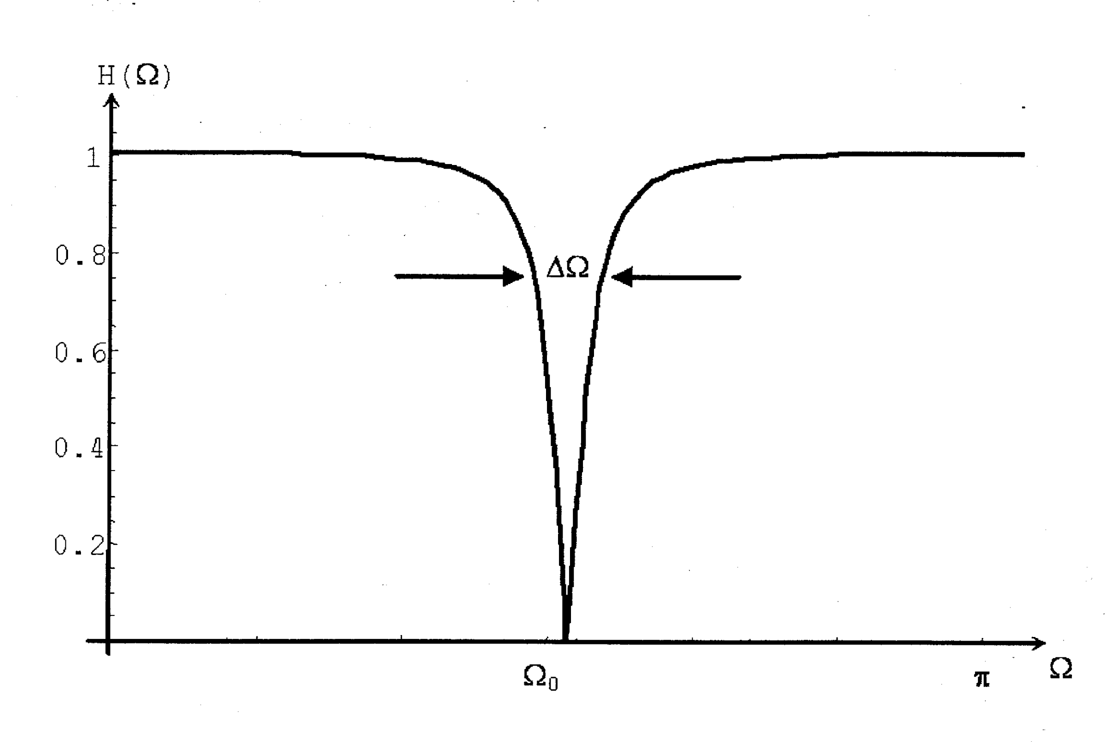


Figura 12.24: Respuesta en frecuencia de un filtro Notch.

La función transferencia de los filtros *Notch* es la siguiente:

$$H(z) = \frac{\left(1 - e^{i\Omega_0} z^{-1}\right)\left(1 - e^{-i\Omega_0} z^{-1}\right)}{\left(1 - R.e^{i\Omega_0} z^{-1}\right)\left(1 - R.e^{-i\Omega_0} z^{-1}\right)} = \frac{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

distribuyendo obtenemos

$$\boxed{H(z) = \frac{1 - 2.cos(\Omega_0).z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2.R.cos(\Omega_0) z^{-1} + R^2 z^{-2}}}$$

Veamos el diagrama de polos y ceros en la figura 12.25.

La transferencia posee dos ceros y dos polos. Los ceros están sobre la circunferencia de radio unitaria $|z| = 1$ a un ángulo Ω_0. Los polos están muy cerca (exagerado en el gráfico), sobre la misma línea. La respuesta en frecuencia de módulo se deduce, del diagrama de polos y ceros, de la siguiente forma. Comenzando de $\Omega = 0$ ($z = 1$) trazamos los vectores desde los ceros, multiplicamos sus distancias, y luego dividimos por el producto de las distancias desde los polos. La cercanía de los polos hasta los ceros se comanda con el parámetro R indicado en la figura. Típicamente su valor es $R > 0{,}95$. Así vemos que los vectores trazados desde los polos y desde los ceros serán muy similares, generando que la respuesta sea plana, aun a medida que avanzamos incrementando Ω (giramos en sentido antihorario por la circunferencia $|z| = 1$). Veamos qué sucede cuando Ω se acerca a Ω_0. Observe la expansión de esta zona.

vemos que al acercarnos al cero, el vector desde el cero se hace, en módulo, menor al del polo. El cociente (cero sobre polo) se hace pequeño hasta que en $\Omega = \Omega_0$, parados

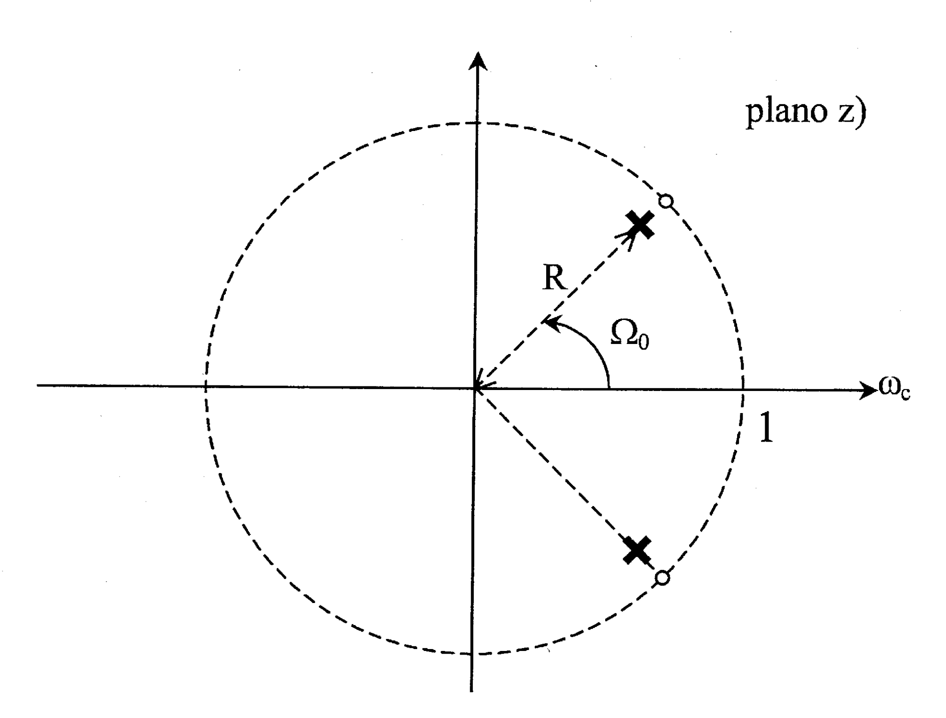


Figura 12.25: Diagrama de polos y ceros de un filtro Notch.

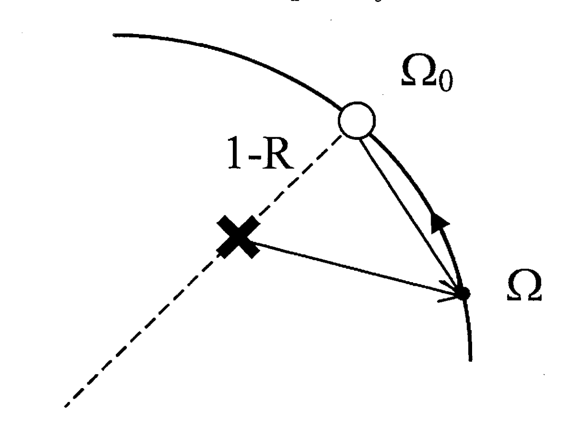


Figura 12.26: Expansión

sobre el polo, la transferencia llega a cero. Aclaramos además que no se tuvieron en cuenta los vectores desde los conjugados ya que son muy similares y se cancelan al dividir sus distancias. A medida que $R \to 1$ la *aguja* se hace más aguda y el $\Delta\Omega$ se achica. Para fijar el valor de R en la práctica se comienza con $R = 0{,}95$ y se aumenta lentamente hasta eliminar completamente el ruido. Aclaremos además que no siempre es deseable que el $\Delta\Omega$ sea tan pequeño, ya que se corre el riesgo de no eliminar completamente un ruido que posee un *shift* (movimiento) frecuencial leve. Veamos un ejemplo de diseño.

Ejemplo 12.5.3 *Un sistema de filtrado digital para señales biológicas opera a una frecuencia de muestreo de $f_s = 400Hz$. La señal a adquirir está inmersa en ruido de línea de*

$f_1 = 50Hz$. Diseñe un filtro Notch que elimine esa interferencia.

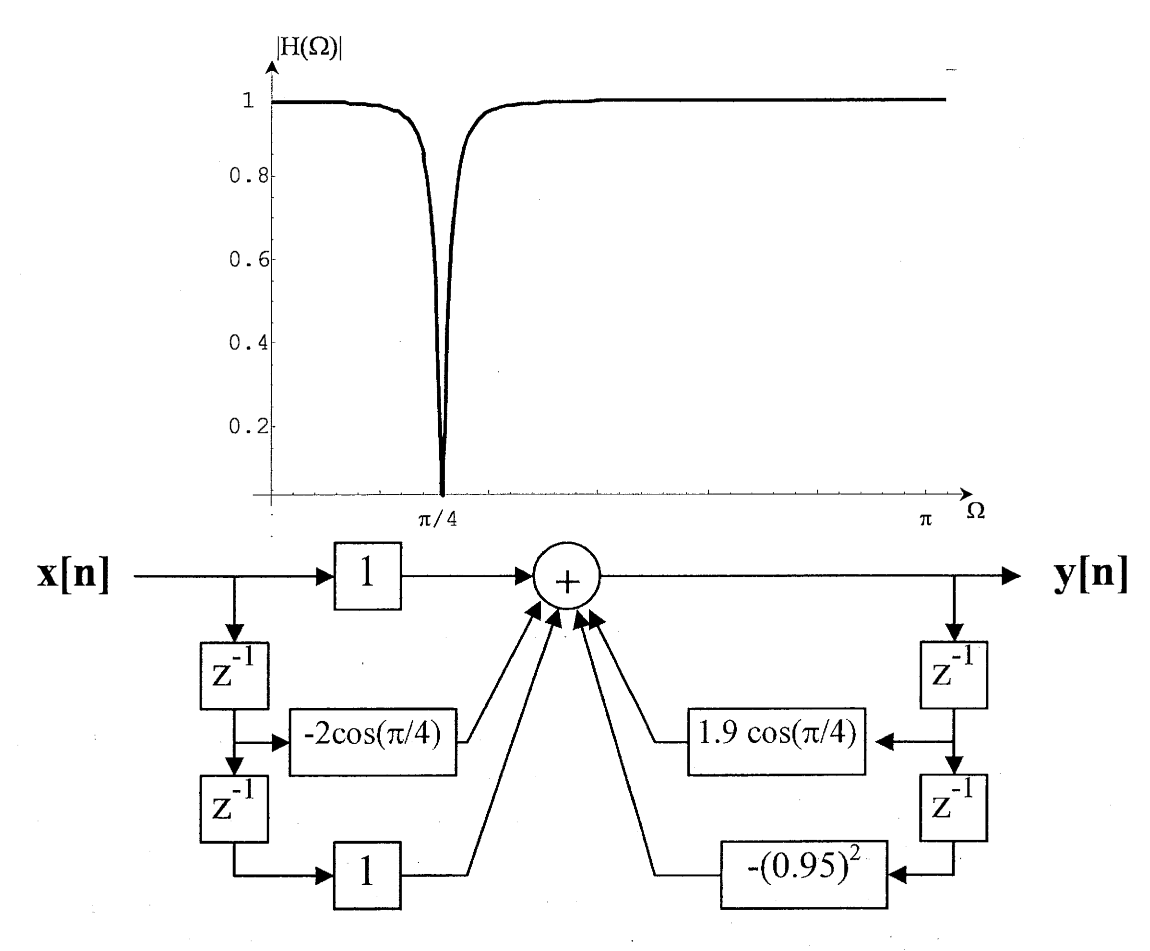
Hallemos la frecuencia normalizada Ω_0 utilizando, como siempre, la siguiente ecuación

$$\Omega_0 = \frac{2\pi f_1}{f_s} = \frac{2\pi 50Hz}{400Hz} = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto confeccionamos la función transferencia (12.20) colocando los polos y los ceros a un ángulo de $\Omega_0 = \pi/4$. El valor de R lo fijamos inicialmente en $R = 0{,}95$:

$$H(z) = \frac{\left(1 - e^{i\pi/4}z^{-1}\right)\left(1 - e^{-i\pi/4}z^{-1}\right)}{\left(1 - 0{,}95.e^{i\pi/4}z^{-1}\right)\left(1 - 0{,}95.e^{-i\pi/4}z^{-1}\right)} = \frac{1 - 2.cos(\pi/4).z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2 \cdot 0{,}95 \cdot cos(\pi/4)z^{-1} + (0{,}95)^2 z^{-2}}$$

Grafiquemos su respuesta en frecuencia y su implementación en bloques en la forma directa:



Comentemos además que en la práctica la tensión de línea no es una senoidal perfecta y, por lo tanto, la segunda armónica de 100Hz no es despreciable. Para poder eliminarla también, se puede diseñar un filtro notch y colocarlo en cascada.

Un filtro *Notch* utilizado en la práctica, es aquel que elimina no solo la primer armónica de la señal periódica indeseada, sino **todas** las armónicas. Para eso deberíamos colocar *agujas* equidistantes. El problema principal radica en que la frecuencia de muestreo sea un múltiplo exacto de la frecuencia Ω_0 que se desea eliminar, y de esa manera podemos proponer la siguiente función transferencia:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - R^N.z^{-N}}$$

donde N es el número de *agujas* que aparecerán. Note que las raíces tanto del numerador como del denominador, son las raíces de la unidad, y por lo tanto son equidistantes. Veamos gráficamente el espectro para $N = 5$ y $R = 0{,}9$:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-5}}{1 - (0{,}95)^5.z^{-5}}$$

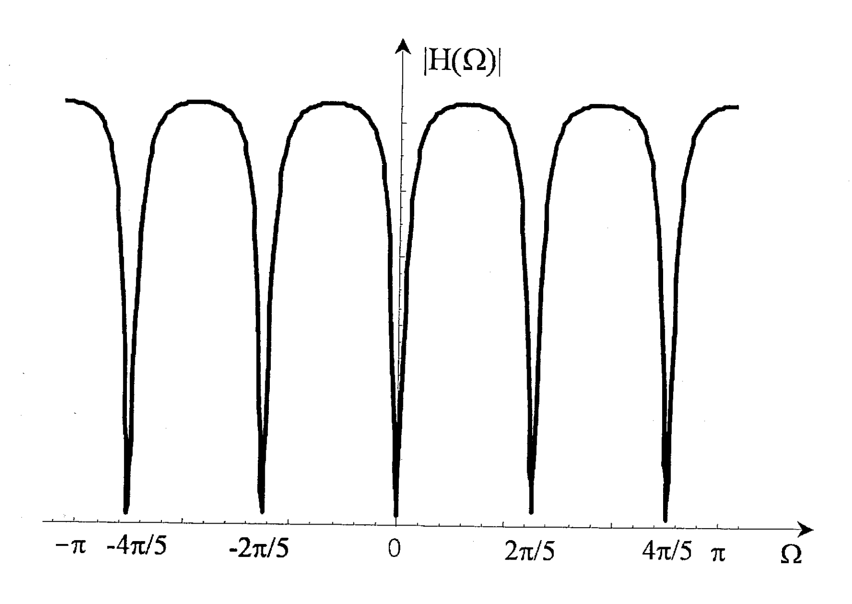


Figura 12.27: Filtro Notch para todas las armónicas.

12.6. Resumen del capítulo

Utilizando a las transformadas como herramientas de cálculo avanzamos en el diseño de sistemas prácticos. En este capítulo se diseñaron varios tipos de filtros. Se mostró cómo migrar un filtro continuo a su análogo discreto y a cumplir con las especificaciones impuestas. Se avanzó en la construcción de diagramas en bloques en forma directa, canónica y en cascada. Utilizando el método del *ventaneo* se diseñaron filtros FIR que son de fácil implementación temporal mediante el uso de la convolución. En el final del capítulo se introdujo el diseño de un tipo especial de filtros IIR, los filtros *Notch*. Con las ideas presentadas en el capítulo se pretende simplemente introducir al lector en las técnicas de análisis y diseño de sistemas, para motivarlo a realizar futuros estudios de mayor complejidad.

12.7. Problemas propuestos

1. Un filtro *Butterworth* pasa-bajos continuo normalizado posee una frecuencia de corte de $1KHz$. Calcule en dB cual es la atenuación que provoca sobre una señal de $2KHz$ para $N = 1$, $N = 2$ y $N = 3$.

2. Un filtro digital posee la siguiente función transferencia:

$$H(z) = \frac{z^{-1}(1 + 2z^{-2})(1 + 3z^{-2})}{1 - z^{-6}}$$

   a) Dibuje el diagrama en bloques de la forma directa de implementación.

   b) Dibuje el diagrama en bloques de la forma canónica.

   c) Factorice el sistemas en sub-sistemas de segundo orden y confeccione el diagrama en bloques en cascada.

3. Halle las formas directa, canónica y en cascada del siguiente filtro digital:

$$H(z) = \frac{(2 - 3.z^{-1})(1 + z^{-2})}{1 - 0{,}25z^{-4}}$$

4. Si se utiliza un circuito R-C como filtro pasa-bajos, la salida se toma desde la tensión del capacitor. Si como salida tomamos la tensión sobre el resistor obtenemos un filtro pasa-altos. Se pide:

   a) Realice un esquema del circuito tomando como salida la tensión sobre el resistor.

   b) Halle la nueva ecuación diferencial y su correspondiente función transferencia $H(s)$.

   c) Halle la respuesta en frecuencia y grafique su módulo y fase indicando y calculando las frecuencias de corte en función de los valores de R y C.

   d) Utilice la transformación bilineal para encontrar el equivalente discreto del filtro pasa-altos continuo.

   e) Diseñe un filtro pasa-altos discreto que opera a una frecuencia de muestreo de $f_s = 100KHz$ y cuya frecuencia de corte es $f_c = 25KHz$.

5. Diseñe un filtro FIR pasa-bandas que trabaja a una frecuencia de muestreo de $30KHz$ y cuyas frecuencias de corte son $\omega_{ci} = 3KHz$ y $\omega_{cs} = 5KHz$. El Δf_w de discriminación debe ser de $100Hz$. Utilice una ventana rectangular. Calcule cuántas muestras más debe tener el filtro si se utiliza una ventana de*Hamming* para cumplir la misma especificación.

6. Diseñe un filtro FIR elimina-banda que trabaja a una frecuencia de muestreo de $44KHz$ y cuyo objetivo es eliminar un sonido grave de una pista de audio digital. Las frecuencias de corte son $\omega_{ci} = 10Hz$ y $\omega_{cs} = 25Hz$. El Δf_w de discriminación debe ser de $1Hz$. Utilice una ventana de Hamming.

7. Un filtro FIR se puede diseñar de manera simple colocando ceros sobre la circunferencia de radio unitario en las zonas donde se desea atenuar. Esto sin embargo provoca que las amplitudes en el resto des espectro no sean muy uniformes. Se dispone de los siguientes filtros FIR:

   I. Dos ceros complejos conjugados en $z = \pm i$ y un polo doble en el origen.

   II. Dos ceros complejos conjugados en $z = e^{\pm i\pi/3}$ y un polo doble en el origen.

   III. Un cero en $z = 1$, un cero en $z = -1$ y un polo doble en el origen.

   Para cada uno se pide:

   b) Dibuje el diagrama de polos y ceros.

   c) Halle la función transferencia $H(z)$.

   d) Halle la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ en forma analítica y grafíquela. Verifíquela con el método gráfico.

   e) Si la frecuencia de muestreo es $f_s = 5KHz$ calcule para cada caso cuales serán las frecuencias (en KHz) que se eliminan para cada filtro.

   f) Implemente en forma directa cada uno de los filtros.

8. Si se utiliza el método de muestreo frecuencial, con un $N = 512$ y $f_s = 10KHz$, para diseñar un filtro FIR con una ventana de *Hamming*. Calcule la resolución frecuencial mínima con que se puede diseñar el espectro.

9. Un sistema de procesamiento de señales electrocardiográficas (ECG) requiere filtrar el ruido de línea de $50Hz$ de la señal adquirida a una frecuencia de muestreo de $F_s = 600Hz$. Se pide:

   a) Diseñe la función transferencia tomando $R = 0{,}8$.

   b) Realice el diagrama en bloques en forma directa y canónica para la implementación del filtro.

   c) Grafique el diagrama de polos y ceros.

   d) Halle la respuesta impulsional $h[n]$.

   e) Halle una ecuación en diferencias que relacione a la entrada ruidosa $x[n]$ con la salida filtrada $y[n]$.

   f) Calcule el $\Delta\Omega$ teniendo en cuenta que el mismo se considera, al igual que una frecuencia de corte, a $-3db$ de $H(\Omega = 0)$.

   g) Agregue en cascada un filtro que además filtre la primer armónica de $100Hz$. Utilice nuevamente $R = 0{,}8$. Realice el diagrama en bloques en la forma directa y canónica.

Apéndice A

Números complejos

A.1. Introducción

La aparición de los números complejos en el siglo XVI no generó en ese momento un gran impacto. Esto seguramente se debió a que sus aplicaciones reales parecían muy distantes. En la actualidad los números complejos forman parte de las aplicaciones prácticas más sobresalientes en el campo de la ingeniería, muchas de las cuales aparecen en este libro. El objetivo de este apéndice es introducir a los números complejos y mostrar cómo se opera con ellos. El desarrollo de funciones de variables complejas junto con los conceptos de límite, derivadas e integrales se desarrollan en sus respectivos capítulos. Todo el conjunto de conceptos será utilizado a lo largo de todo el libro, por lo tanto se recomienda prestar especial atención a cada uno de ellos.

A.2. Algebra de complejos

La manera más simple de encarar el por qué de la utilización de un número complejo, puede verse en la imposibilidad de encontrar una solución a la siguiente ecuación:

$$x^2 + 1 = 0$$

La solución sería $x = \sqrt{-1}$, siendo este un número que no pertenece al campo real.

Comencemos entonces por definir a un número complejo:

Definición A.2.1 *Un número complejo z es un par ordenado de números reales x e y:*

$$z = (x, y)$$

Donde llamaremos a 'x' la parte real de z ($x = Re\{z\}$) y a 'y' la parte imaginaria de z ($y = Im\{z\}$).

Como cada número complejo es un par ordenado, los mismos pueden ser representados en un plano que llamaremos *Plano Complejo*. En ese plano el número complejo puede representarse

como un punto o como un vector. Utilizaremos siempre el eje de las abscisas para la parte real, y el eje de las ordenadas para la parte imaginaria. Grafiquemos entonces un complejo cualquiera $z_1 = (x_1, y_1)$:

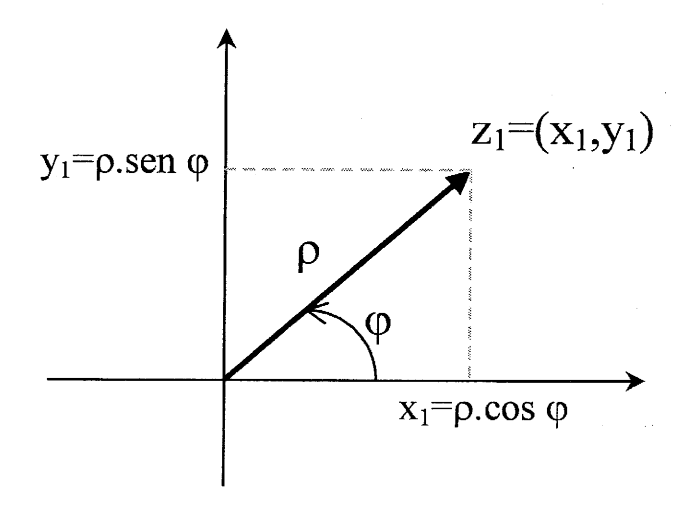


Figura A.1: Plano complejo.

Como elegimos representar al complejo como un vector, definimos además al **módulo** del vector ρ, como la distancia del complejo al origen $(z = (0, 0))$, y a la **fase** del vector φ como el ángulo que forma el vector con respecto al semieje real positivo.

Es evidente que si la parte imaginaria de un número complejo es cero, entonces ese número se representa como un vector sobre el eje real. De esta forma podemos ver que *el conjunto de números reales está incluido en el de los números complejos, y los mismos se hallan sobre el eje de las abscisas.*

Al conjunto de los números complejos los denominaremos con la letra $\mathbb{C}$.

A.2.1. Suma y producto

Definamos a continuación las dos operaciones básicas entre números complejos.

Definición A.2.2 *Dados dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, definimos a la suma como:*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{A.1}$$

y al producto como

$$z_1.z_2 = (x_1.x_2 - y_1.y_2, x_1.y_2 + x_2.y_1) \tag{A.2}$$

Estas definiciones no son tan arbitrarias como parece a primera vista. La suma entre complejos implica simplemente sumar la parte real y la parte imaginaria de cada uno para conformar el resultado. La suma es una operación interna, y por lo tanto su resultado siempre será otro número complejo (par ordenado). En el caso del producto, la operación

parece más complicada, aunque veremos más adelante como se simplifica este razonamiento con operaciones algebraicas. El producto también es una operación cerrada y por lo tanto su resultado es siempre un número complejo. La suma y el producto son ambas conmutativas. El producto es distributivo con respecto a la suma.

Ejemplo A.2.1 *Dados dos números complejos* $z_1 = (3,2)$ *y* $z_2 = (-2,1)$*, realice las siguientes operaciones :*

1. $z_1 + z_2$
2. $z_1.z_2$
3. $3.z_1$ *(número real multiplicado por un complejo.*
4. $z_1 - z_2$
5. $z_1.(z_1 + z_2)$

Comencemos identificando la parte real y la parte imaginaria de cada número complejo.

$$\begin{aligned} z_1 &= (x_1, y_1) = (3,2) \Longrightarrow x_1 = 3 \qquad y_1 = 2 \\ z_2 &= (x_2, y_2) = (-2,1) \Longrightarrow x_2 = -2 \qquad y_2 = 1 \end{aligned}$$

1. $z_1 + z_2$. *Utilicemos (A.1).*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (3 - 2, 2 + 1) = (1,3)$$

2. $z_1.z_2$. *Utilicemos (A.2).*

$$z_1.z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) = (3 \cdot (-2) - 2 \cdot 1, 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 2) = (-8, -1)$$

3. $3.z_1$. *En este caso recordemos que los números reales están incluidos dentro de los complejos, de manera que el número* 3 *es el complejo* $(3,0)$*. Utilizando el mismo razonamiento que en el punto anterior para el producto de complejos, obtenemos con* $z_1 = (3,0)$

$$z_1.z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) = (3.(-2) - 0 \cdot 1, 3 \cdot 1 + (-2),0) = (-6,3)$$

Note que al multiplicar un número real por un complejo, podemos multiplicar la parte real y la imaginaria por separado para conformar el resultado. Si $\alpha \in I\!R$*, entonces:*

$$\alpha.z_1 = \alpha.(x_1, y_1) = (\alpha.x_1, \alpha.y_1)$$

4. $z_1 - z_2$. *El caso de la resta puede verse de la siguiente forma:*

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-1).z_2$$

y por lo analizado en el punto anterior:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-1).z_2 = (x_1, y_1) + (-1)(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - y_1, x_2 - \\ z_1 - z_2 &= (3 - (-2), 2 - 1) = (5, 1) \end{aligned}$$

5. $z_1.(z_1 + z_2)$. *Podemos realizar esta operación de dos formas. La primera es encontrar el resultado de la suma entre paréntesis y luego multiplicar, la segunda consiste en distribuir el producto.*

El primer caso, y utilizando los resultados anteriores, sería:

$$z_1.(z_1 + z_2) = (3, 2) \cdot ((3, 2) + (-2, 1)) = (3, 2) \cdot (1, 3) = (3{,}1 - 2 \cdot 3, 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2) = (-3, 11)$$

Para el segundo caso, distribuimos de manera que

$$z_1.(z_1 + z_2) = z_1.z_1 + z_1.z_2$$

Realizamos el primer producto:

$$z_1.z_1 = (x_1^2 - y_1^2, 2x_1y_1) = (9 - 4, 2 \cdot 3 \cdot 2) = (5, 12)$$

finalmente

$$z_1.z_1 + z_1.z_2 = (5, 12) + (-8, -1) = (-3, 11)$$

Forma binómica

Una representación más conveniente para operar con números complejos es la forma binómica. Para ello definimos a la unidad imaginaria como:

Definición A.2.3 *Llamaremos unidad imaginaria al complejo* $i = (0, 1)$. *De esta forma, cualquier número complejo* $z \in \mathbb{C}, z = (x, y)$ *se puede escribir en su forma binómica como:*

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + y.(0, 1) = x + i.y$$

donde, como siempre la parte real e imaginaria de un número complejo pertenecen a los reales: $x \in I\!R \wedge y \in I\!R$.

Es muy simple de demostrar que las operaciones definidas entre complejos representados como pares ordenados se cumplen de manera simple al operar algebraicamente en forma binómica. Simplemente resta dilucidar que valor toman las potencia de la unidad imaginaria:

$$
\begin{aligned}
i^0 &= 1 \\
i^1 &= i \\
i^2 &= (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1 \\
i^3 &= i^2.i = (-1,0).i = -i \\
i^4 &= i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1 \\
i^5 &= i^4.i = i
\end{aligned}
$$

y así se repiten sucesivamente $\{1, i, -1, -i, 1, i, \dots\}$. Recordando el planteo inicial, de encontrar la solución a la ecuación $x^2 + 1 = 0$, se puede concluir en que como $i^2 = -1$ y $(-i)^2 = -1$, las dos soluciones de esa ecuación son $x_{1,2} = \pm i$ (solución en el campo complejo). Las restricciones que aparecían en el campo real se desvanecerán ya que *siempre* se encontrará una solución en el campo complejo sin importar el orden del polinomio.

Note además que a un complejo cuya parte imaginaria vale cero, lo representamos directamente por su número real. Por ejemplo $(9,0) = 9$. De esta forma la operación entre complejos es muy sencilla:

Ejemplo A.2.2 *Sean $z_1 = (3,2)$ y $z_2 = (-2,1)$. Calcule su suma y su producto.*

Utilicemos la representación binómica: $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = -2 + i$. Para realizar la suma, sumamos parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria:

$$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (-2 + i) = 3 + 2i - 2 + i = 3 - 2 + i(2 + 1) = 1 + 3i$$

Al realizar el producto distribuimos y utilizamos $i^2 = -1$:

$$z_1.z_2 = (3 + 2i).(-2 + i) = 3.(-2) + 3i + 2i.(-2) + 2\underbrace{i.i}_{i^2=-1} = -6 + 3i - 4i - 2 = -8 - i$$

Los resultados coinciden con los del ejemplo (A.2.1).

Forma trigonométrica

Cuando representamos al número complejo como un vector, introdujimos los conceptos de módulo y fase. Hacemos notar a continuación cómo se realizan los cálculos en función de la parte real e imaginaria:

$$z \in \mathbb{C}/z = x + i.y \Longrightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right) \tag{A.3}$$

Por supuesto es necesario analizar el signo de la parte real y de la imaginaria para identificar el cuadrante y calcular el valor de la fase φ en forma correcta.

La fase de un número complejo tiene además otra característica notoria. Un complejo z_1 con módulo y fase ρ_1, φ_1 respectivamente, es coincidente con otro de módulo y fase $\rho_1, \varphi_1 + 2\pi$. Es por eso que un complejo en su forma trigonométrica se escribe como:

$$z = \rho\,[cos(\varphi + 2k\pi) + i.sen(\varphi + 2k\pi)] \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Podemos utilizar la relación de *Euler*: $e^{i\varphi} = cos(\varphi) + i.sen(\varphi)$ [1] para escribir la forma trigonométrica de la siguiente manera:

$$e^{i\varphi} = cos(\varphi) + i.sen(\varphi) \Longrightarrow z = \rho\,[cos(\varphi + 2k\pi) + i.sen(\varphi + 2k\pi)] = \rho.e^{i(\varphi+2k\pi)}$$

Esta es la forma *exponencial* o *polar*, donde ρ es el módulo y φ la fase (ambos números reales, $\rho > 0$ y φ generalmente en radianes):

$$z = x + i.y \Longrightarrow \rho = |z| \qquad \wedge \qquad \varphi = arg\{z\}$$

Llevar un complejo desde la forma exponencial a la forma binómica es simplemente descomponerlo es su parte real y su parte imaginaria (proyecciones contra los ejes):

$$z = \underbrace{\rho.cos(\varphi + 2k\pi)}_{real} + i.\underbrace{\rho.sen(\varphi + 2k\pi)}_{imaginaria}$$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo A.2.3 *Halle el módulo y la fase del siguiente número complejo:* $z = 2 - i\sqrt{3}$.

Utilizando las expresiones (A.3), y teniendo en cuenta que el complejo se encuentra en el cuarto cuadrante:

$$\rho = |z| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7} \qquad arg\{z\} = \varphi = arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\pi}{3}$$

por lo tanto:

$$z = 2 - i\sqrt{3} = \sqrt{7}\left[cos(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi) + i.sen(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi)\right] = \underbrace{\sqrt{7}}_{modulo}\; e^{\overbrace{i.(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi)}^{fase}}$$

Hacemos notar que siempre al hallar un módulo, dentro de la raíz aparece una suma de cuadrados. Es común confundir los conceptos y elevar al cuadrado la unidad imaginaria i, generando una resta. El concepto de módulo es la distancia al origen, siempre debe ser un número positivo y su interpretación debe ser geométrica a través del Teorema de Pitágoras.

[1] La relación de *Euler* se explica y demuestra en el capítulo 1, ecuación (1.2). Por el momento solo es necesario tomarla como una definición.

Enumeramos a continuación cuatro números complejos muy utilizados: $e^{\pm i\pi} = -1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{-i\pi/2} = -i$ y $e^{i2\pi} = 1$.

La forma exponencial o polar nos permiten realizar algunas interpretaciones más acerca de algunas operaciones ya vistas. En el momento en que se decide sumar dos números complejos, la forma binómica es evidentemente la más adecuada. Pero al realizar un producto, la forma binómica requiere distribuir los términos. Veamos qué sucede al realizar un producto en forma polar.

Utilicemos los siguientes números complejos, y sus expresiones binómica y exponenciales:

$$z_1 = x_1 + i.y_1 = \rho_1.e^{i\varphi_1} \qquad z_2 = x_2 + i.y_2 = \rho_2.e^{i\varphi_2}$$

Si realizamos el producto en forma exponencial, el complejo resultante tendrá un módulo igual al producto de los módulos y una fase igual a la suma de las fases:

$$z_1.z_2 = \rho_1.e^{i\varphi_1}.\rho_2.e^{i\varphi_2} = \underbrace{\rho_1.\rho_2}_{modulo}\; e^{i\overbrace{(\varphi_1 + \varphi_2)}^{fase}}$$

La forma exponencial además permite revelar las siguientes igualdades:

$$\boxed{sen(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$$

las cuales pueden ser verificadas utilizando la fórmula de *Euler*. Recuerde además:

$$\boxed{senh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}}$$

A.2.2. Cociente de complejos

Para calcular el cociente entre dos números complejos, podemos utilizar su representación exponencial de la siguiente forma:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1.e^{i\varphi_1}}{\rho_2.e^{i\varphi_2}} = \underbrace{\frac{\rho_1}{\rho_2}}_{modulo}\; e^{i\overbrace{(\varphi_1 - \varphi_2)}^{fase}}$$

pero si intentamos encontrar el mismo resultado en forma binómica la tarea será un poco más laboriosa.

Introduzcamos una operación nueva en el campo complejo:

Definición A.2.4 *Se denomina **complejo conjugado** de $z = x + i.y = \rho e^{i\varphi}$ al complejo $\bar{z} = z^* = x - i.y = \rho e^{-i\varphi}$, cuyo módulo es el mismo y su fase opuesta. El efecto de conjugar se puede observar gráficamente espejando el vector con respecto al eje real. Designaremos indistintamente las siguientes nomenclaturas para indicar 'complejo conjugado': un asterisco * o una barra sobre el complejo.*

Dibujemos los conjugados de dos complejos, el primero en el primer cuadrante y el segundo en el segundo cuadrante. Note el efecto de espejo que se produce (figura A.2).

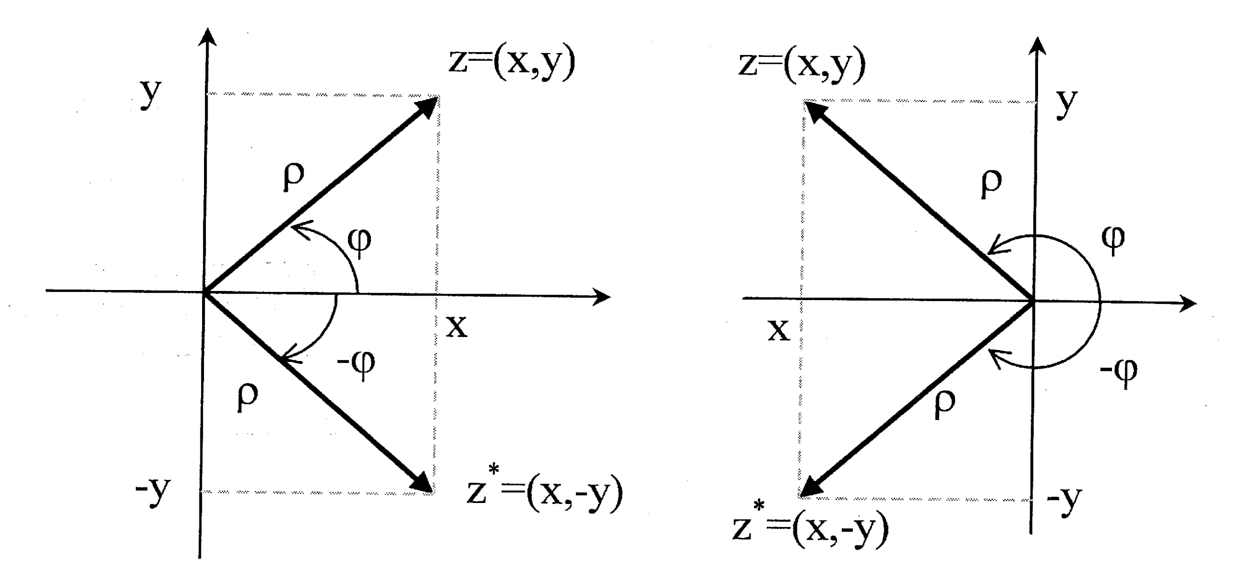


Figura A.2: Complejos conjugados.

Asimismo se pueden demostrar fácilmente las siguientes igualdades, utilizando $z_1 = x_1 + i.y_1$, $z_2 = x_2 + i.y_2$, $z_1^* = x_1 - i.y_1$ y $z_2^* = x_2 - i.y_2$:

- $(z^*)^* = z$.
- $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$.
- $(z_1.z_2)^* = z_1^*.z_2^*$.
- $(z_1 + z_1^*)/2 = Re\{z_1\} = x_1$.
- $(z_1 - z_1^*)/2 = i.Im\{z_1\} = i.y_1$.
- $z_1.z_1^* = |z_1|^2$.($|z_1|^2$ es siempre real y mayor a cero).

Utilizando esta última propiedad, podemos plantear la división entre complejos en la forma binómica. Para eso, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (para

conseguir un denominador real) y poder distribuir:

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + i.y_1}{x_2 + i.y_2} = \frac{x_1 + i.y_1}{x_2 + i.y_2}\frac{(x_2 - i.y_2)}{(x_2 - i.y_2)} = \frac{(x_1 + i.y_1)(x_2 - i_y 2)}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{(x_1.x_2 + y_1.y_2) + i(y_1.x_2 - y_2.x_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \underbrace{\frac{(x_1.x_2 + y_1.y_2)}{x_2^2 + y_2^2}}_{real} + i.\underbrace{\frac{(y_1.x_2 - y_2.x_1)}{x_2^2 + y_2^2}}_{imaginaria}
\end{aligned}
$$

A.2.3. Igualdad de números complejos

Diremos que dos números complejos son iguales si sus partes reales e imaginarias son iguales, o si sus módulos son iguales y sus fases difieren en $2.k.\pi$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Es evidente que los números complejos, al ser pares ordenados, no se pueden relacionar como uno mayor o menor a otro.

La resolución de ecuaciones de igualación requiere siempre la separación en parte real e imaginaria. De esta forma una simple ecuación deriva en dos igualdades, que permiten hallar el complejo incógnita (parte real y parte imaginaria). Veamos un ejemplo:

Ejemplo A.2.4 *Resolver la siguiente ecuación compleja:*

$$\frac{z - i}{z + 2} = 2i$$

Se busca un número complejo $z = x + i.y$ que verifique esa igualdad. Podría intentarse encontrar, en vez de su parte real (x) y su parte imaginaria (y), su módulo y fase como $z = \rho e^{i\varphi}$. Vemos que tenemos una única ecuación y dos incógnitas. Utilicemos la forma binómica:

$$
\begin{aligned}
z - i &= (z + 2)2i = 2iz + 4i \\
(x + iy) - i &= 2i(x + iy) + 4i \\
x + i(y - 1) &= -2y + i(4 + 2x)
\end{aligned}
$$

Igualamos las partes real e imaginaria:

$$
\begin{cases} x = -2y \\ y - 1 = 4 + 2x \end{cases}
$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $x = -2 \wedge y = 1$, por lo tanto $z = -2 + i$.

A.2.4. Potenciación y radicación

La potenciación de un número complejo se puede calcular tanto en su forma binómica como en su forma exponencial, siendo esta última la más indicada [2].

Sea un complejo en su forma exponencial $z = \rho.e^{i(\varphi+2k\pi)}$ [3], podemos elevarlo a un cierto exponente n como:

$$z^n = (\rho.e^{i(\varphi+2k\pi)})^n = \rho^n.e^{i.n(\varphi+2k\pi)} = \rho^n.e^{i.n\varphi}$$

Se eliminó el $2.k\pi$ para hacer evidente que el resultado de la potenciación es otro número complejo único. Si por ejemplo $n = 2$, el resultado en módulo es el cuadrado del módulo original; y la fase, el doble.

La forma trigonométrica es:

$$z^n = \rho^n.\left[cos(n\varphi) + i.sen(n\varphi)\right]$$

La operación inversa a la potenciación es la radicación. Podemos utilizar el mismo razonamiento empleado pero elevando el complejo a un exponente fraccionario. Veamos qué sucede:

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = (\rho.e^{i(\varphi+2k\pi)})^{1/n} = \rho^{1/n}.e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \rho^{1/n}.e^{i\frac{\varphi}{n}}e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad k = 0, 1, \ldots n-1 \quad \text{(A.4)}$$

Al aplicar la radicación nos encontramos con que si aplicamos la raíz cuadrada, obtenemos como resultado dos números complejos diferentes. Si aplicamos una raíz cúbica obtenemos tres resultados diferentes y así sucesivamente. Más aun, los resultados de la radicación son complejos cuyos módulos siempre son $\rho^{1/n}$ (residen sobre una circunferencia) y cuyas fases están distribuidas alrededor del centro en forma equidistante(dividen a la vuelta completa 2π por n). Será evidente que la radicación de complejos no es *función*.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo A.2.5 *Calcule $\sqrt[4]{-1}$ y grafique el resultado.*

Como es una raíz cuarta, tendremos cuatro resultados. El número complejo $z = -1$ tiene módulo uno y fase π, por lo tanto se puede expresar en su forma exponencial como:

$$z = -1 = 1.e^{i(\pi+2k\pi)} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Aplicando (A.4) obtenemos los cuatro resultados:

$$\sqrt[4]{-1} = 1^{1/4}.e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4})} = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

---

[2] La forma exponencial era la recomendada en el caso de realizar un producto. La forma binómica es más complicada ya que requiere resolver $(x + i.y)^n$ para hallar parte real e imaginaria.

[3] Cuando se demuestran operaciones se tiende a utilizar la forma genérica utilizando el $\varphi + 2k\pi$; que se omitió anteriormente por comodidad.

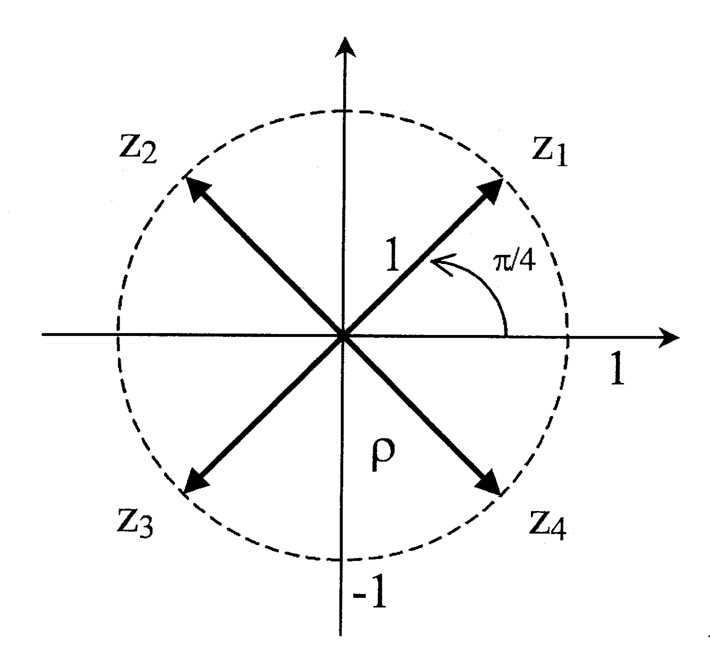


Figura A.3: Raíces de la unidad.

A.2.5. Logaritmo de un complejo

Utilicemos inicialmente el logaritmo natural aunque la base no presentará diferencias significativas para el razonamiento. Si aplicamos el logaritmo natural a un complejo expresado en forma exponencial $z = \rho.e^{i(\varphi+2k\pi)}$, obtenemos:

$$ln\left(\rho.e^{i(\varphi+2k\pi)}\right) = \underbrace{ln(\rho)}_{real} + i\underbrace{(\varphi + 2k\pi)}_{imaginaria} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{A.5}$$

En el caso de la radicación enésima obteníamos n resultados diferentes. En el caso del logaritmo vemos que para cada valor de k, el resultado es diferente, teniendo infinitas soluciones. Cada número complejo resultado se ubica sobre una recta vertical $x = ln(\rho)$, y sus partes imaginarias están distanciadas por múltiplos de 2π. Es evidente que el logaritmo tampoco será *función* así definido.

Ejemplo A.2.6 *Calcule $ln(-2)$ y grafique el resultado.*

El logaritmo tiene infinitos resultados que hallamos con (A.5) y expresando a $z = -2$ en su forma exponencial $z = 2.e^{i(\pi+2k\pi)}$:

$$ln\left(2.e^{i(\pi+2k\pi)}\right) = ln(2) + i.(\pi + 2k\pi) \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Aclaremos además que si $0 < \rho < 1$, $ln(\rho) < 1$ y entonces los puntos resultantes estarán en el segundo y tercer cuadrante. Además si se toma el valor de $k = 0$ se dice que se está tomando

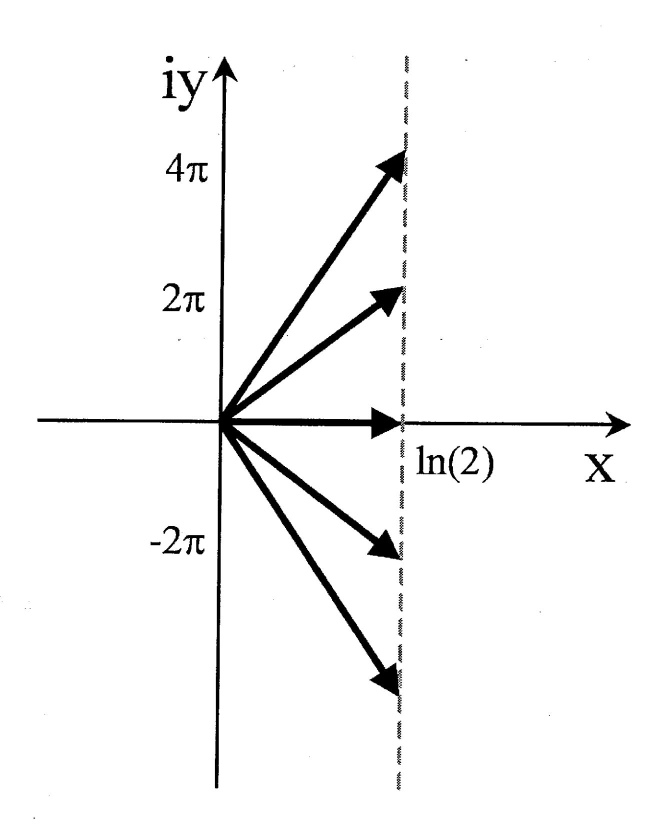


Figura A.4: Imagen de la $f(z) = ln(z)$ para $z = 2$.

la parte principal del logaritmo, y por lo tanto el único resultado residirá dentro una franja horizontal limitada por $z = \pm i\pi$.

En el gráfico los puntos presentan una simetría con respecto al eje horizontal. Esta simetría solo se establece si se calcula el logaritmo de un número con parte imaginaria cero (en el ejemplo $ln(-2)$). Si, por otro lado, se intenta calcular el logaritmo de $1 + i$ se puede verificar que esa simetría desaparece. Los puntos estarán todos sobre una recta vertical $ln(\rho) = ln(\sqrt{2})$ y distanciados hacia arriba y hacia abajo en múltiplos de 2π, siendo el primer punto ($k = 0$): $ln(\sqrt{2}) + i\pi/4$, pero para $k = -1$: $ln(\sqrt{2}) - i3\pi/4$.

A.3. Estructura del campo complejo

Luego de haber analizado algunas operaciones básicas con números complejos, daremos mayor formalismo a la definición de la estructura del campo complejo.

Dados los complejos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ analicemos las siguientes propiedades de la operación suma:

1. Clausura: La suma de dos complejos da como resultado otro complejo.

2. Asociativa: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.

3. Conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

4. Existencia del elemento neutro para la suma. $z + (0,0) = z$.

5. Existencia del opuesto. $z + (-z) = 0$.

Al cumplirse estas cinco propiedades se puede asegurar que el conjunto $\mathbb{C}$ con la operación de suma tiene estructura conmutativa: $(\mathbb{C}, +)$.

Para la operación producto aplicamos las mismas propiedades:

1. Clausura: El producto de dos complejos da como resultado otro complejo. $z_1.z_2 \quad \in \mathbb{C}$.

2. Asociativa: $z_1.(z_2.z_3) = (z_1.z_2).z_3$.

3. Conmutativa: $z_1.z_2 = z_2.z_1$.

4. Existencia del elemento neutro para el producto. $z.(1,0) = z$.

5. Existencia del inverso. $z.(1/z) = (1,0)$ excepto para el caso $z = (0,0)$.

Podemos decir entonces que $\mathbb{C}$ es un grupo conmutativo con respecto al producto: $(\mathbb{C}, .)$ Como además de cumplirse las cinco propiedades para la suma y las cinco para el producto, se puede aplicar la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma $(z_1.(z_2+z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3)$, la estructura $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo:$(\mathbb{C}, +, .)$.

Si definimos la operación producto por un escalar, para un $z \in \mathbb{C}$ como $\alpha.z = \alpha(x,y) = (\alpha.x, \alpha.y)$ con $\alpha \in I\!R$, podemos verificar las siguientes propiedades $(\alpha, \beta \in I\!R)$:

1. Clausura: El producto de un complejo por un escalar da como resultado otro complejo. $\alpha.z_1 \quad \in \mathbb{C}$.

2. Asociativa combinada : $\alpha.(\beta.z_1) = (\alpha.\beta).z_1$.

3. Distributiva: $\alpha.(z_1 + z_2) = \alpha z_1 + \alpha z_2$.

4. Existencia del elemento neutro . $1.z = z$.

5. Distributividad combinada: $z_1(\alpha + \beta) = z_1\alpha + z_1 + \beta$

Se dice entonces que $\mathbb{C}$ con la suma y el producto por un escalar tiene una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo real: $(\mathbb{C}, +, I\!R, .)$.

A.3.1. Norma y distancia

Se llama norma de un espacio vectorial real A a una función $f = ||z|| : A \to I\!R^+$, que satisfaga las siguientes propiedades:

1. $||z|| \geq 0$; Si $||z|| = 0$ entonces $z = 0$ (neutro aditivo en A).

2. $||z_1 + z_2|| \geq ||z_1|| + ||z_2||$.

3. $||\alpha z|| = |\alpha|.||z||$.

Podemos decir entonces que $\mathbb{C}$ es un espacio normado, y la norma se halla de la siguiente manera:

Definición A.3.1 *La norma de un complejo $z \in \mathbb{C}, z = (x, y)$ es un número real tal que:*

$$||z|| : \mathbb{C} \to I\!R^+ : ||z|| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que no es otra cosa que el módulo del complejo.

Para definir la *distancia* en un conjunto $\mathbb{C}$ es necesario encontrar una función $(d(z_1, z_2))$ tal que para cada par de elementos del conjunto z_1 y z_2, se verifiquen las siguientes propiedades:

1. No negativa. $d(z_1, z_2) \geq 0$, $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$.
2. Simétrica. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$.
3. Triangular. $d(z_1, z_2) \leq d(z_2, z) + d(z, z_2)$.

En el conjunto de los complejos $\mathbb{C}$ definimos a la distancia de la siguiente forma:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Esta distancia se denomina euclídea. Gráficamente se observa en la figura A.5.

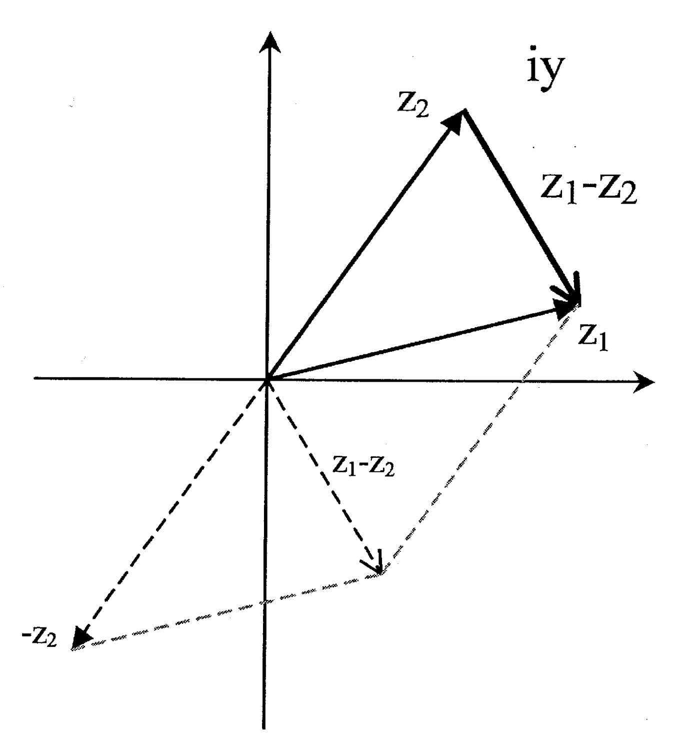


Figura A.5: distancia euclídea

El vector $z_1 - z_2$ es aquel que parte de z_2 y termina en z_1. En el gráfico se puede ver el método del paralelogramo para la suma de vectores, donde se sumó $z_1 + (-z_2)$ y se transportó el resultado para mayor claridad.

A.3.2. Propiedades de módulo

Se pueden demostrar las siguientes propiedades, utilizando los complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

1. $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$.
2. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2.Re\{z_1.z_2^*\}$.
3. $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2.Re\{z_1.z_2^*\}$.
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
5. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

donde el asterisco * implica el complejo conjugado.

A.3.3. Plano complejo ampliado

Si al conjunto de todos los números complejos se le agrega un punto denominado **infinito** o punto impropio, obtenemos un nuevo conjunto al que llamamos *plano complejo ampliado.* Esto lo simbolizamos como $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \infty$

A.4. Conjunto de puntos en el plano complejo

. Todas las operaciones vistas siguen siendo válidas pero se postula además que:

- Para todo complejo $z \in \mathbb{C}^*$ distinto de infinito $z \neq \infty$, $\infty + z = \infty + z$ y $z/\infty = 0$.
- Para todo complejo $z \in \mathbb{C}^*$ distinto de cero $z \neq 0$, $\infty.z = z.\infty = \infty$ y $z/0 = \infty$.

El conjunto $\mathbb{C}^*$ no posee la estructura de espacio vectorial pero brinda algunas ventajas que serán aprovechadas más adelante. Para representar el infinito en el plano es necesario introducir el concepto de esfera de *Rienman*, mapear cada punto del plano sobre la esfera quedando solo el punto del polo norte sin imagen; siendo el mismo el infinito.

A.4.1. Conjuntos de puntos

Para comenzar a conocer la topología de los números complejos, es necesario realizar algunas definiciones que nos permitan agrupar a los puntos en un conjunto.

Comencemos definiendo un entorno.

Definición A.4.1 *Se denomina* **entorno de centro** z_0 **y radio** r, *al conjunto de todos los números complejos cuya distancia a* z_0 *es menor que* r*:*

$$E(z_0, r) = E(z_0) = \{z / |z - z_0| < r, \quad r \geq 0\}$$

Definición A.4.2 *Se denomina* **entorno reducido o vecindad de centro** z_0 **y radio** r, *al conjunto de todos los números complejos cuya distancia a* z_0 *es menor que* r *excluyendo al punto* z_0:

$$V(z_0, r) = V(z_0) = \{z/0 < |z - z_0| < r, \quad r \geq 0\}$$

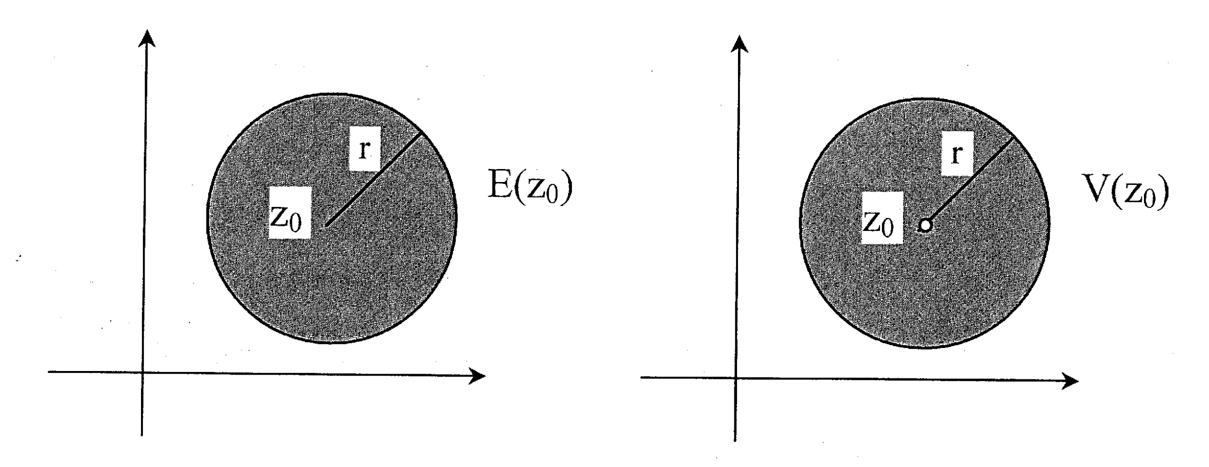


Figura A.6: Entorno y vecindad.

A.4.2. Clasificación de puntos

Podemos definir dentro del plano $\mathbb{C}^*$ a un subconjunto de puntos S. Con respecto a ese subconjunto podemos tener:

Definición A.4.3 *Punto interior.* z_0 *es interior al subconjunto* S *si existe algún entorno del punto tal que todos los puntos del entorno pertenecen a* S:

$$z_0 \text{ es interior a } S \Leftrightarrow \exists E(z_0)/\forall z[z \in E(z_0) \Rightarrow z \in S]$$

Al conjunto de todos los puntos interiores se lo llama 'Interior de S'.

Definición A.4.4 *Punto exterior.* z_0 *es exterior al subconjunto* S *si existe un entorno del punto tal que ningún punto del entorno pertenece a* S:

$$z_0 \text{ es exterior a } S \Leftrightarrow \exists E(z_0)/\forall z[z \in E(z_0) \Rightarrow z \notin S]$$

Definición A.4.5 *Punto frontera.* z_0 *es frontera de* S *si en cualquier entorno del punto que se considere hay puntos que pertenecen a* S *y puntos que no pertenecen a* S:

$$z_0 \text{ es frontera de } S \Leftrightarrow \forall E(z_0) : \exists z_1 \in E(z_0), \exists z_2 \in E(z_0)/ (z_1 \in S_\wedge z_2 \notin S)$$

Al conjunto de todos los puntos frontera se lo llama 'Frontera de S'.

Definición A.4.6 *Punto de acumulación.* z_0 *es punto de acumulación de* S *si en cualquier entorno reducido del punto hay al menos un punto que pertenezca a* S*:*

$$z_0 \text{ es punto de acumulación de } S \Leftrightarrow \forall V(z_0) : \exists z[z \in V(z_0)_\wedge z \in S]$$

Al conjunto de todos los puntos de acumulación se lo llama 'Clausura'.

Definición A.4.7 *Punto aislado.* z_0 *es un punto aislado de* S *si pertenece a* S *y además existe un entorno reducido de* z_0 *tal que no contienen ningún punto de* S*:*

$$z_0 \text{ es un punto aislado de } S \Leftrightarrow z_0 \in S_\wedge[\exists V(z_0) : (z \in V(z_0) \Rightarrow z \notin S)]$$

Puede verse que todo punto aislado es también frontera. Un punto aislado no puede ser de acumulación. Llamamos *Adherencia* a la unión del Interior y la Frontera. El complemento de la *Clausura* de S con respecto a la *Adherencia* es el conjunto de puntos aislados.

A.4.3. Clasificación de subconjuntos

Si S es un subconjunto de $\mathbb{C}^*$, el mismo puede ser clasificado dentro de alguna de estas categorías:

1. S es un conjunto abierto si todos sus puntos son interiores.

2. S es un conjunto cerrado si todos sus puntos frontera pertenecen al conjunto.

3. S Puede no ser ni abierto no cerrado.

4. S es un conjunto acotado si se puede encontrar un entorno $E(z_0 = 0)$ que incluya a S.

5. S es un conjunto compacto si es cerrado y acotado.

6. S es un conjunto conexo si cualquier par de puntos del conjuntos pueden ser unidos por una poligonal incluida en S [4].Un conjunto conexo se suele denominar de una sola pieza.

7. Un conjunto S conexo, es simplemente conexo si su complemento es conexo. Si en el complemento aparecen dos conjuntos entonces se denomina doblemente conexo y así sucesivamente.

8. El conjunto S es un dominio si es abierto y conexo.

[4]La definición de conexidad es realmente compleja por lo cual se esboza de manera sencilla para comprender su significado.

A.5. Resumen del capítulo

Este capítulo es simplemente una introducción elemental a los números complejos. Se presentó el campo complejo y las formas binómica, de par ordenado, y polar de representar a un número complejo. Asimismo se introdujeron las principales operaciones entre las que se encuentra la suma, multiplicación, división, potenciación y el logaritmo. Todo número complejo se puede representar en un plano donde el eje horizontal representa su parte real y el vertical su parte imaginaria. La representación polar utiliza su módulo y su fase. La constante imaginaria i es el par ordenado $(0,1)$ y cumple con $i^2 = (-1,0) = -1$. El complejo conjugado de un número complejo es otro de igual módulo y fase opuesta. Finalmente se presentó la teoría de conjunto de puntos y su clasificación. Los temas aquí vertidos serán utilizados como base para desarrollar todas las aplicaciones a lo largo del libro, por lo que se sugiere al lector dedicar especial atención en comprender cada ítem en forma completa.

A.6. Problemas propuestos

1. Sean los siguientes números complejos: $z_1 = 1+2i$, $z_2 = -2+i$ y $z_3 = 4e^{-i\pi/3}$. Realizar las siguientes operaciones y expresar el resultado en la forma binómica y exponencial:

   a) $z_1 + z_2 + z_3$.

   b) $z_1.z_2$.

   c) $z_1.z_3^2$.

   d) $\frac{z_2}{z_3}$.

   e) $\sqrt[3]{z_1^*}$. Graficar los resultados en el plano complejo.

   f) $ln(z_2)$.Graficar los resultados en el plano complejo.

   g) $\frac{z_1^5}{z_3}$.

   h) $|z_1 + z_2^*|$.

   i) $|z_1^*| + |z_3|$.

2. Encontrar y graficar los resultados para $\sqrt[5]{1}$.

3. Encontrar los números reales x e y que verifiquen la siguiente igualdad: $3x + 2iy - ix + 5i = 7 + 5i$.

4. Separar la parte real y la parte imaginaria de las siguientes funciones. Utilice siempre como dominio la variable $z = x + i.y = \rho.ei\varphi$ y como imagen $\omega = u + iv = R.e^{i\theta}$:

   a) $\omega = f(z) = z^2$.

   b) $\omega = f(z) = z^8$.

   c) $\omega = f(z) = ln(z)$.

   d) $\omega = f(z) = e^z$.

   e) $\omega = f(z) = \sqrt[n]{z}, n \in I\!N$.

   f) $\omega = f(z) = (1+z)/(1-z)$.

   g) $\omega = f(z) = sen(z)$.

   h) $\omega = f(z) = cos(z)$.

   i) $\omega = f(z) = tan(z)$.

   j) $\omega = f(z) = senh(z)$.

   k) $\omega = f(z) = cosh(z)$.

   l) $\omega = f(z) = tanh(z)$.

   m) $\omega = f(z) = sec(z)$.

   n) $\omega = f(z) = cosec(z)$.

5. Se tienen las siguientes expresiones:

   i) $3+2e^{i\pi/4}$.
   ii) $\left(3e^{i\pi/3}\right)^2$.
   iii) $\left(3e^{i\pi/3}\right)^3$.
   iv) $(2-3i)/(2i)$.
   v) $(2-3i)/(2i+1)$.
   vi) $(2i-3)/(2i+1)$.
   vii) $(2-3i)*(2+3i)$.
   viii) $(4e^{i\pi/4})/(-1+i)$.
   ix) $(10e^{-i\pi/4})^{-1}$.
   x) $e^{-i\pi/4}+1-2i$.
   xi) $(3+2i)^{-2}$.
   xii) $3e^{1-2i}$.

   Se pide:

   a) Escriba los resultados en forma binómica y dibújelos en el plano.
      i) $3+2e^{i\pi/4}$. RTA: $4{,}41+i1{,}41$
      ii) $\left(3e^{i\pi/3}\right)^2$. RTA: $-4{,}5+i7{,}79$
      iii) $\left(3e^{i\pi/3}\right)^3$. RTA: -27
      iv) $(2-3i)/(2i)$. RTA: $-1{,}5-i$
      v) $(2-3i)/(2i+1)$. RTA: $-0{,}8-i1{,}4$
      vi) $(2i-3)/(2i+1)$. RTA: $0{,}2+i1{,}6$
      vii) $(2-3i)*(2+3i)$. RTA: 13
      viii) $(4e^{i\pi/4})/(-1+i)$. RTA: $-2{,}83i$
      ix) $(10e^{-i\pi/4})^{-1}$. RTA: $0{,}07-i0{,}07$
      x) $e^{-i\pi/4}+1-2i$. RTA: $1{,}7-i2{,}7$
      xi) $(3+2i)^{-2}$. RTA: $0{,}03-i0{,}07$
      xii) $3e^{1-2i}$. RTA: $-3{,}39-i7{,}42$

   b) Calcule el módulo y la fase de las expresiones del punto anterior.
      i) $3+2e^{i\pi/4}$. RTA: $4{,}64\angle 0{,}31$
      ii) $\left(3e^{i\pi/3}\right)^2$. RTA: $9\angle 2{,}09$
      iii) $\left(3e^{i\pi/3}\right)^3$. RTA: $27\angle 3{,}14$
      iv) $(2-3i)/(2i)$. RTA: $1{,}80\angle -2{,}55$
      v) $(2-3i)/(2i+1)$. RTA: $1{,}61\angle -2{,}09$
      vi) $(2i-3)/(2i+1)$. RTA: $1{,}61\angle 1{,}44$

vii) $(2-3i)*(2+3i)$. RTA: $13\angle 0$
viii) $(4e^{i\pi/4})/(-1+i)$. RTA: $2{,}83\angle -1{,}57$
ix) $(10e^{-i\pi/4})^{-1}$. RTA: $0{,}1\angle -0{,}79$
x) $e^{-i\pi/4}+1-2i$. RTA: $3{,}2\angle -1{,}01$
xi) $(3+2i)^{-2}$. RTA: $0{,}077\angle -1{,}18$
xii) $3e^{1-2i}$. RTA: $8{,}15\angle -2{,}0$

c) ¿Cuál es el complejo resultante más cercano al origen ? RTA: xi)

d) ¿Cuál es el complejo resultante más lejano al origen ? RTA: iii)

e) ¿Cuáles son los complejos **cuyo inverso** tienen un módulo mayor que 1? RTA: ix),xi)

6. Hallar el módulo y la fase de los siguientes números complejos.
   a) $5+2i$
   b) $(5+2i).(2-i)$
   c) $\frac{5+2i}{2-i}$
   d) $\frac{1}{2-i}$
   e) $\frac{-1}{2-i}$
   f) $\frac{i}{2-i}$
   g) $\frac{1}{(5+2i)(2-i)}$
   h) $1+e^{i\pi/4}$
   i) $\frac{1}{1+e^{i\pi/4}}$
   j) $\frac{1}{(2-i)^2}$
   k) $\frac{1}{(2-i)^4}$

7. Demostrar las siguientes identidades:
   a) $sen(iz)=i.senh(z)$.
   b) $cos(iz)=cosh(z)$.
   c) $tan(iz)=i.tanh(z)$.
   d) $senh(iz)=i.sen(z)$.
   e) $cosh(iz)=cos(z)$.
   f) $tanh(iz)=i.tan(z)$.
   g) $sen^2(z)+cos^2(z)=1$.
   h) $sen(z_1+z_2)=sen(z_1)cos(z_2)+cos(z_1)sen(z_1)$.
   i) $cosh^2(z)-senh^2(z)=1$.

8. Encontrar las raíces de los siguientes polinomios y graficarlas en el plano complejo:
   a) $z^2 + z + 1 = 0$.
   b) $z^2 + iz + 9 = 0$.
   c) $z^2 + z + i = 0$.
   d) $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.
   e) $z^4 + 81 = 0$.

9. Hallar el módulo, el argumento, la parte real e imaginaria de las siguientes expresiones, siendo $z = x + i.y$:
   a) e^{2z}.
   b) e^{i2z}.
   c) $1 + 2.e^{iz}$.

10. Probar las siguientes igualdades y desigualdades, siendo $z_1 = x_1 + i.y_1 = \rho_1.e^{i\varphi_1}$ y $z_2 = x_2 + i.y_2 = \rho_2.e^{i\varphi_2}$ y el asterisco * el complejo conjugado:
    a) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$.
    b) $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$.
    c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Dar además una interpretación gráfica.
    d) $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$.
    e) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$. Dar además una interpretación gráfica.
    f) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2.Re\{z_1 z_2^*\}$.
    g) $z_1^*/z_2^* = (z_1/z_2)^*$.

11. Graficar en el plano complejo los siguientes conjuntos
    a) $\{z/z \in \mathbb{C}_\wedge \left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2\}$.
    b) $\{z/z \in \mathbb{C}_\wedge z - z^* = -i\}$.
    c) $\{z/z \in \mathbb{C}_\wedge |z| = 2\}$.
    d) $\{z/z \in \mathbb{C}_\wedge |z + 1| < 1\}$.
    e) $\{z/z \in \mathbb{C}_\wedge |z - i| < 1\}$.
    f) $\{z/z \in \mathbb{C}_\wedge |z - 2 + 3i| < 1\}$.
    g) $\{z/z \in \mathbb{C}_\wedge Re\{z\} > -3_\wedge Im\{z\} > 2\}$.
    h) $\{z/z \in \mathbb{C}_\wedge |z - 3i| < 2_\wedge arg\{z - 3i\} \in [\pi, 5\pi/4]\}$.
    i) $\{z/z \in \mathbb{C}_\wedge |z - i| \leq |z - 1 + i|\}$.
    j) $\{z/z \in \mathbb{C}_\wedge arg\{z\} = -\pi/4_\wedge |z| \in [1, 3]\}$.

12. Encontrar los puntos interiores, frontera, exteriores y de acumulación de los siguientes conjuntos:

    a) $|z| < 1$.

    b) $0 < |z+1| \leq 1$.

    c) $\frac{i}{n}, n \in I\!N$.

    d) $\{z/z \in \mathbb{C}_{\wedge}2 \geq |z+3-4i| \geq 1\}$.

    e) $\{z/z \in \mathbb{C}_{\wedge}|z| \leq 3_{\wedge}z = 3-2i\}$.

    f) $\{z/z \in \mathbb{C}_{\wedge}arg\{z\} = \pi/4\}$.

    g) $\{z/z \in \mathbb{C}_{\wedge}arg\{z\} \in [\pi/4, 3\pi/4]_{\wedge}4 > |z| > 2\}$.

    h) $\{z/z \in \mathbb{C}_{\wedge}|Re\{z\}| \leq 1\}$.

    i) $\{z/z \in \mathbb{C}_{\wedge}|z-3| \leq 2\}$.

    j) $\{z/z \in \mathbb{C}_{\wedge}0 < |z-1| \leq 2\}$.

13. Indicar para los conjuntos del ejercicio 12 si son abiertos, cerrados, acotados, conexos o simplemente conexos.

Aplicación en MatLab

```
%Generación de magnitudes complejas
%Se definen variables utilizando la forma binómica, con "i" anexado al final de la
%parte imaginaria. Para la forma triginométrica se utiliza la función exp(valor).
z1=-5+3i
z2=3*exp(i*pi/4)
%Posibilidad alternativa: función complex(real,imag)
z1=complex(-5,3)
%Funciones para la obtención del módulo (abs()) y fase (angle()). Esta última
%devuelve el resultado en radianes y considera los cuatro cuadrantes.
abs(z1),angle(z1)

%Operaciones con magnitudes complejas
%Suma, resta y producto: Tratamiento de operación para cualquier constante.
z3=(z1*z2)-(z1/z2)
%Potenciación: Para elevar un número a una potencia específica se utiliza el
%operador "^". La potencia puede adquirir cualquier valor, ya sea real o complejo.
z2^3
%Radicación: Para obtener todas las raíces de la magnitud compleja, se utiliza la
%función "roots". Como parámetro deben pasarse los coeficientes del polinomio en
%formato vectorial. Ej: la raíz cúbica de 1, implica el vector [1 0 0 -1] pues el
%polinomio corresponde a z^3-1=0. Si el polinomio no está completo colocar cero
%en la potencia correspondiente.
roots([1 0 0 -1])
%Funciones trigonométricas: Se utilizan las mismas funciones que para magnitudes
%reales.
cos(z1)
%Logaritmación: Se utiliza la función "log()" para obtener la rama principal del
%logaritmo natural
log(z2)
```

Aplicación en MatLab

```
%Operaciones con polinomios
%Raíces de un polinomio: Se utiliza la función "roots" referenciada
%anteriormente, pasando como parámetro los coeficientes del polinomio formato
%vectorial, comenzando por el mayor grado.
roots([2 2-3i 5-i])

%Operaciones con funciones racionales (cocientes de polinomios)
%Se definen vectorialmente el numerador y denominador. Pueden hallarse los
%factores mediante las funciones "zero()" (factores del numerador) y "pole()"
%(factores del denominador)

%Definición de los vectores del numerador y denominador
num=[1 2-3i 5-i]
den=[3 0 0 0 -243]
%Definición de la función racional
H=tf(num,den)
zero(H)
pole(H)

%Validación de identidades trigonométricas
%Se utilizan las operaciones conocidas
z1=2+5i, z2=10*exp(-i*3*pi/4)
conj(z1+z2),conj(z1)+conj(z2)
sin(z1)^2+cos(z1)^2
```

Apéndice B

Ecuaciones diferenciales lineales

B.1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales tienen mucha importancia en ingeniería debido a que gran cantidad de leyes y relaciones físicas aparecen en la forma de ecuaciones diferenciales. En el momento de modelizar y encontrar analogías entre diferentes sistemas, utilizaremos a la ecuaciones diferenciales como patrón. Dentro del gran conjunto de ecuaciones diferenciales existentes, nos ocuparemos de un subgrupo muy reducido pero de gran importancia: *Ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de coeficientes constantes.* Estudiaremos su resolución por el método de la proposición, ya que el mismo es rápido y de gran aplicación práctica. Como al imponer las condiciones iniciales, la solución es única, todos los otros métodos pueden ser usados sin ningún inconveniente. Centraremos la atención en ecuaciones de primer y segundo orden que serán utilizadas extensamente en el libro.

B.2. E.D. Lineales ordinarias a coeficientes constantes

Por *ecuación diferencial ordinaria* se entiende una relación que comprende una o varias derivadas de una función no especificada $y(x)$, en la cual además pueden aparecer términos constantes. La denominación *ordinaria* permite distinguirlas de aquellas ecuaciones diferenciales que poseen derivadas parciales con respecto a otras variables independientes. Ejemplo de ecuaciones ordinarias son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
e^{-x} &= y' + 3y \\
4 &= y.y' + 3.cos(x)y \\
sen(2x) &= x.y'.y'' - y' + 4
\end{aligned}
$$

El *orden* de la ecuación diferencial ordinaria es la máxima derivada con respecto a la variable independiente. En los ejemplos anteriores las dos primeras ecuaciones son de primer orden (orden 1), mientras que la tercera es de segundo orden (orden 2).

Dentro de las ecuaciones diferenciales ordinarias existe una subclasificación más que se refiere a la linealidad. Las ecuaciones diferenciales lineales son de la forma:

$$r(x) = a_0(x) + a_1(x).y' + a_2(x).y'' + \cdots + a_N(x).y^{(N)}$$

Note que no hay términos cruzados entre derivadas de y. Si además restringimos a las funciones $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_N(x)$ a ser constantes, llegamos finalmente a las ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales, a coeficientes constantes:

$$r(x) = a_0 + a_1.y' + a_2.y'' + \cdots + a_N y^{(N)} \tag{B.1}$$

donde N es el orden y $a_N \neq 0$. Este será el tipo de ecuaciones diferenciales que utilizaremos de aquí en más para caracterizar sistemas lineales invariantes en el tiempo. Generalmente $r(x)$ será la entrada conocida del sistema, los coeficientes a_n serán parámetros físicos, y el objetivo será resolver la ecuación para hallar la salida $y(x)$.

Una función $y(x)$ que **verifique** la ecuación (B.1) se llamará *solución general.* Como generalmente la ecuación diferencial acepta varias soluciones, [1] esa solución general poseerá constantes arbitrarias. El número de constante arbitrarias coincide con el orden de la ecuación diferencial. Es así como la solución general de una ecuación de primer orden tendrá una única constante arbitraria, mientras que una de segundo orden tendrá dos. Es común denominar a la solución general como una *familia de curvas solución.* Por ejemplo, planteamos una ecuación de primer orden:

$$y' = cos(x)$$

Intuitivamente la solución de esta ecuación es $y(x) = sen(x)$, ya que verifica la ecuación para todo x. Es evidente además que $y(x) = sen(x) + 1$ también verifica la ecuación. Es así como la solución general es $y(x) = sen(x) + c$ donde c es la única constante arbitraria a determinar. La familia solución son senos con diferente valor medio.

Si se les asignan valores a las constantes arbitrarias, la solución se denomina *solución **particular***, y las mismas cumplen con lo que denominaremos condiciones iniciales. Por ejemplo, si en el caso del ejemplo anterior imponemos como condición inicial $y(x = 0) = 2$, la solución particular será una única curva de la familia: $y(x) = sen(x) + 2$.

A continuación plantearemos a modo de ejemplo las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden. Analizaremos su resolución y discutiremos casos particulares que serán muy útiles para la modelización de sistemas físicos. Los métodos aquí presentados serán de extrema simplicidad y practicidad, por lo que recomendamos la lectura de bibliografía específica más avanzada para comprender el tema en su totalidad.

B.3. Ecuaciones de primer orden

La ecuación de primer orden a resolver es la siguiente:

$$x(t) = y' + a.y \tag{B.2}$$

[1]Piense que si por ejemplo la solución es $y(x) = sen(x)$, como aparecen términos derivados es muy probable que $y(x) = sen(x) + 1$ también sea solución.

La variable independiente en este caso es t [2]. El único coeficiente constante es a. El término derivado posee coeficiente uno : $1.y'(t)$. La solución general posee una única constante arbitraria K. Como la ecuación es de primer orden, requiere una única condición inicial para determinar K. Llamaremos condiciones iniciales nulas si $y(t=0)=0$. Si no se especifican condiciones iniciales adoptaremos por defecto las nulas. La ecuación diferencial se utiliza para caracterizar sistemas lineales invariantes en el tiempo. La función $x(t)$ será típicamente la entrada del sistema e $y(t)$ la salida.

Para resolver la ecuación (B.2) planteamos una solución $y(t)$ compuesta por una solución homogénea $y_h(t)$ y otra particular $y_p(t)$:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \tag{B.3}$$

La solución homogénea es la que verifica la ecuación homogénea (entrada cero) siguiente:

$$0 = y_h' + a.y_h \tag{B.4}$$

Como la solución homogénea **no depende de la entrada** $x(t)$, su resolución es siempre la misma para las ecuaciones de primer orden. Es importante destacar que al no verse involucrada la entrada, la parte homogénea de la solución lleva información intrínseca (propia) del sistema.

Resolvemos (B.4) separando variables:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{dy(t)}{dt} + a.y(t) \\
-a.y(t) &= \frac{dy(t)}{dt} \\
-a.dt &= \frac{dy(t)}{y(t)}
\end{aligned}$$

integrando en ambos miembros e introduciendo la constante de integración a la derecha como $ln(C)$ (para mayor simplicidad), obtenemos

$$\begin{aligned}
\int -a.dt &= \int \frac{dy(t)}{y(t)} \\
-a.t &= ln\,(y(t)) + ln(C) = ln\,(C.y(t)) \\
y(t) &= K.e^{-a.t} \qquad K = 1/C
\end{aligned}$$

La constante K es la única constante arbitraria que será determinada con las condiciones iniciales.

Para completar la solución de la ecuación (B.3) necesitamos encontrar la parte particular $y_p(t)$. Esta última si depende de la entrada $x(t)$ de la ecuación (B.2). A continuación mostraremos un método en el cual se propone una solución particular dependiendo la función que

[2] El término y' es equivalente a la derivada de la función $y(t)$ con respecto a la variable independiente $\frac{dy(t)}{dt}$

aparece en la entrada. Este método puede parecer bastante arbitrario, pero las funciones $x(t)$ en la práctica no suelen ser tan variadas. Es importante aclarar que la solución particular no posee constantes arbitrarias y la misma debe verificar la ecuación (B.2).

El método es el siguiente. Dado una función $x(t)$, se elige de la tabla la función particular $y_p(t)$ a proponer como solución. Esta función propuesta posee algunas constantes que deben ser halladas introduciendo $y_p(t)$ e $y_p'(t)$ en (B.2). Si la función $x(t)$ es una suma de funciones, se propone una suma de particulares. La tabla de funciones propuestas es la siguiente:

Cuadro B.1: Tabla de soluciones particulares propuestas

entrada $x(t)$	Función propuesta $y_p(t)$
$A = cte$	$C = cte$
$A.e^{B.t}$	$C.e^{B.t}$
$A.t^n, (n = 0, 1, 2 \dots)$	$C_0 + C_1.t + C_2.t^2 + \dots + C_n.t^n$
$A.cos(B.t)$	$C.cos(B.t) + D.sen(B.t)$
$A.sen(B.t)$	$C.cos(B.t) + D.sen(B.t)$

Una vez determinada la solución particular, la misma se suma a la homogénea para conformar la solución general. Finalmente al introducir las condiciones iniciales se llega a la solución $y(t)$. Veamos un ejemplo concreto.

Ejemplo B.3.1 *Halle la solución de la siguiente ecuación diferencial, suponiendo condiciones iniciales nulas:*

$$2t + 4.e^{-3t} = y' + \underbrace{5}_{a}.y \tag{B.5}$$

La solución está compuesta por una parte homogénea y otra particular:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

La solución homogénea es

$$y_h(t) = K.e^{-a.t} = K.e^{-5.t}$$

donde se utilizó $a = 5$ según lo dispuesto en (B.2). Recuerde que para que esto sea válido el término que acompaña a la derivada debe tener constante uno : $1.y'(t)$. Si esto no sucede es necesario dividir en ambos miembros para conseguirlo.

La solución particular se propone, siguiendo la tabla como

$$y_p(t) = C_0 + C_1.t + C_2.e^{-3t}$$

donde es necesario determinar C_0, C_1, C_2. *Para introducir la solución particular en la ecuación diferencial derivamos ambos miembros:*

$$y'_p(t) = C_1 - 3.C_2.e^{-3t}$$

y reemplazamos en (B.5):

$$\begin{aligned}
2t + 4.e^{-3t} &= y'_p + 5.y_p \\
2t + 4.e^{-3t} &= \underbrace{C_1 - 3.C_2.e^{-3t}}_{y'_p} + 5.\underbrace{\left[C_0 + C_1.t + C_2.e^{-3t}\right]}_{y_p} \\
2t + 4.e^{-3t} &= (C_1 + 5.C_0) + 5.C_1.t + 2.C_2.e^{-3t}
\end{aligned}$$

finalmente por simple inspección hallamos las constantes:

$$\begin{aligned}
0 &= C_1 + 5.C_0 \\
2 &= 5.C_1 \\
4 &= 2.C_2
\end{aligned}$$

por lo tanto $C_0 = -2/25, C_1 = 2/5, C_2 = 2$ *y la solución particular es*

$$y_p(t) = -\frac{2}{25} + \frac{2}{5}.t + 2.e^{-3t}$$

Finalmente sumando la homogénea con la particular, obtenemos la solución general

$$y(t) = K.e^{-5.t} - \frac{2}{25} + \frac{2}{5}.t + 2.e^{-3t}$$

Para determinar la constante arbitraria K *utilizamos las condiciones iniciales nulas:*

$$y(t = 0) = 0 = K - \frac{2}{25} + 2 \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{48}{25}$$

entonces:

$$y(t) = -\frac{48}{25}.e^{-5.t} - \frac{2}{25} + \frac{2}{5}.t + 2.e^{-3t}$$

Queda a cargo del lector verificar la solución, introduciéndola en la ecuación diferencial (B.5).

B.4. Ecuaciones de segundo orden

La ecuación de segundo orden es la siguiente:

$$x(t) = y'' + a.y' + b.y \tag{B.6}$$

La ecuación posee dos coeficientes constantes a y b. El término derivado de mayor orden posee nuevamente coeficiente uno : $1.y''(t)$. La solución general posee dos constante arbitrarias K_1, K_2. Como la ecuación es de segundo orden, requiere dos condiciones iniciales para determinar las constantes K_1 y K_2. Llamaremos condiciones iniciales nulas si $y(t=0)=0$ y $y'(t=0)=0$. Si no se especifican condiciones iniciales adoptaremos por defecto las nulas.

Para resolver la ecuación (B.6) planteamos una solución $y(t)$ compuesta por una solución homogénea $y_h(t)$ y otra particular $y_p(t)$:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \tag{B.7}$$

La solución homogénea es la que verifica la ecuación homogénea (entrada cero) siguiente:

$$0 = y_h'' + a.y_h' + b.y_h \tag{B.8}$$

Como la solución homogénea **no depende de la entrada** $x(t)$, su resolución es siempre la misma, aunque en el caso de las ecuaciones de segundo orden encontraremos tres soluciones homogéneas diferentes.

Para resolver la ecuación homogénea se plantea una solución del tipo $y_h(t) = e^{\lambda t}$. Sus derivadas se reemplazan en (B.8), $y_h'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $y_h''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$:

$$\begin{aligned} 0 &= y_h'' + a.y_h' + b.y_h \\ 0 &= \lambda^2 e^{\lambda t} + a.\lambda e^{\lambda t} + b.e^{\lambda t} \\ 0 &= e^{\lambda t}\left[\lambda^2 + a.\lambda + b\right] \\ 0 &= \lambda^2 + a.\lambda + b \end{aligned}$$

La ecuación característica posee dos raíces $\lambda_{1,2}$. Por lo tanto dependiendo de los parámetros a y b, la solución homogénea puede presentar tres casos diferentes: **raíces reales distintas**, **una raíz real doble** y **raíces complejas conjugadas**.

Raíces reales distintas

De la ecuación característica hallamos las raíces:

$$0 = \lambda^2 + a.\lambda + b \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Como la solución homogénea posee las constantes arbitrarias, y en este caso por tratarse de una ecuación diferencial de orden dos, hay dos constantes, planteamos la siguiente solución homogénea:

$$y_h(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$

que es una combinación lineal de dos soluciones que verifican, como puede comprobar el lector, la ecuación (B.8). Estas dos soluciones son linealmente independientes y es por eso que con solo sumarlas se consigue la función deseada.

Una única raíz real doble

De la ecuación característica hallamos las raíces coincidentes $\lambda_1 = \lambda_2$. En este caso no podemos plantear como solución la suma de dos exponenciales con el mismo exponente, ya sería linealmente dependientes. Es por eso que la solución se plantea como:

$$y_h(t) = K_1 e^{\lambda t} + K_2.t.e^{\lambda t}$$

Raíces complejas conjugadas

De la ecuación característica hallamos las raíces:

$$0 = \lambda^2 + a.\lambda + b \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Las raíces en este caso son complejas conjugadas:

$$\lambda_1 = u + i.v \qquad \lambda_2 = u - i.v$$

y por lo tanto

$$u = \frac{-a}{2} \qquad v = \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

La solución propuesta en este caso es la siguiente:

$$y_h(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} = \underbrace{K_1 e^{(u+i.v)t}}_{y_1} + \underbrace{K_2 e^{(u-i.v)t}}_{y_2}$$

Utilizando la igualdad de *Euler* :$e^{ix} = cos(x) + i.sen(x)$ y realizando una suma y una resta de las soluciones individuales,

$$\begin{aligned} \frac{y_1 + y_2}{2} &= e^{ut} cos(vt) \\ \frac{y_1 - y_2}{2i} &= e^{ut} sen(vt) \end{aligned}$$

podemos llegar a una solución general puramente real:

$$y_h(t) = e^{ut} \left[K_1.cos(vt) + K_2.sen(vt) \right]$$

donde K_1 y K_2 son las constantes arbitrarias.

B.4.1. Solución particular

Luego de determinar la solución homogénea, que no depende de la entrada $x(t)$, es necesario hallar la solución particular. Así como en el caso de las ecuaciones de primer orden, y para señales de entrada típicas, se utilizará el método de proponer una solución. De esta forma, y en función de la entrada $x(t)$ se propone una $y_p(t)$ y reemplazándola (junto con su primera y segunda derivada) en la ecuación original (B.6) se consigue hallar la solución particular $y_p(t)$ que no debe tener ninguna constante arbitraria. La selección de las soluciones propuestas se realiza según la siguiente tabla:

Cuadro B.2: Tabla de soluciones particulares propuestas

entrada $x(t)$	Función propuesta $y_p(t)$
$A = cte$	$C = cte$
$A.e^{B.t}$	$C.e^{B.t}$
$A.t^n, (n = 0, 1, 2 \ldots)$	$C_0 + C_1.t + C_2.t^2 + \cdots + C_n.t^n$
$A.cos(B.t)$	$C.cos(B.t) + D.sen(B.t)$
$A.sen(B.t)$	$C.cos(B.t) + D.sen(B.t)$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo B.4.1 *Calcule la solución $y(t)$ para las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden:*

1. $2e^{-3t} = y'' + y' - 2y,\ t > 0.$
2. $2t^2 = y'' + 2y' + 5y,\ t > 0.$
3. $cos(3t) = y'' + 4y' + 4y,\ t > 0.$

En cada caso hallaremos primero la ecuación característica y luego la solución homogénea. Finalmente propondremos una solución particular. Note que en todos las ecuaciones se suponen condiciones iniciales nulas.

1. *La solución será la suma de la homogénea más la particular:*

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Para hallar la solución homogénea planteamos la ecuación característica:

$$0 = \lambda^2 + \lambda - 2$$

Las raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$. Por lo tanto la solución homogénea para raíces reales distintas es:

$$y_h(t) = K_1 e^t + K_2 e^{-2t}$$

Para hallar la solución particular, y basándonos en la tabla, proponemos $y_p(t) = C.e^{-3t}$; donde para hallar el valor de la constante C debemos reemplazar la particular y sus derivadas en la ecuación original ($y_p'(t) = -3C.e^{-3t}$,$y_p''(t) = 9C.e^{-3t}$):

$$\begin{aligned} 2e^{-3t} &= y_p'' + y_p' - 2y_p = 9C.e^{-3t} - 3C.e^{-3t} - 2C.e^{-3t} \\ 2e^{-3t} &= 4C.e^{-3t} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución particular es

$$y_p(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}$$

Finalmente la solución general queda

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = K_1 e^t + K_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

que puede ser verificada por el lector. Imponiendo las condiciones iniciales nulas ($y(0) = 0, y'(0) = 0$) hallamos los valores de las dos constantes arbitrarias:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 = K_1 + K_2 + \frac{1}{2} \\ y'(0) &= 0 = K_1 - 2K_2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$K_1 = -\frac{7}{6} \qquad\qquad K_2 = \frac{2}{3}$$

La solución es:

$$y(t) = -\frac{7}{6}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

2. *Nuevamente la solución será la suma de la homogénea más la particular:*

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Comenzamos con la homogénea planteando la ecuación característica:

$$0 = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

Las raíces son $\lambda_1 = -1+2i$ y $\lambda_2 = -1-2i$. Por lo tanto la solución homogénea para raíces complejas conjugadas es:

$$y_h(t) = K_1 e^{(-1+2i)t} + K_2 e^{(-1-2i)t}$$

Donde K_1 y K_2 son las dos constantes arbitrarias. Para hallar la solución particular, y basándonos en la tabla, proponemos $y_p(t) = C_2t^2 + C_1t + C_0$; donde para hallar el valor de las constantes debemos reemplazar la particular y sus derivadas en la ecuación original ($y_p'(t) = 2C_2t + C_1$, $y_p''(t) = 2C_2$):

$$\begin{aligned} 2t^2 &= y_p''(t) + 2y_p'(t) + 5y_p(t) \\ 2t^2 &= 2C_2 + 2\left(2C_2t + C_1\right) + 5\left(C_2t^2 + C_1t + C_0\right) \\ 2t^2 &= 5C_2t^2 + \left(4C_2 + 5C_1\right)t + \left(2C_2 + 2C_1 + 5C_0\right) \end{aligned}$$

Entonces las constantes son $C_0 = -4/125$, $C_1 = -8/25$ y $C_2 = 2/5$. Por lo tanto la solución particular es

$$y_p(t) = \frac{2}{5}t^2 - \frac{8}{25}t - \frac{4}{125}$$

Finalmente escribimos la solución general

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = K_1 e^{(-1+2i)t} + K_2 e^{(-1-2i)t} + \frac{2}{5}t^2 - \frac{8}{25}t - \frac{4}{125}$$

Imponiendo las condiciones iniciales nulas ($y(0) = 0, y'(0) = 0$) hallamos los valores de las dos constantes arbitrarias:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 = K_1 + K_2 - \frac{4}{125} \\ y'(0) &= 0 = (-1+2i)K_1 + (-1-2i)K_2 - \frac{8}{25} \end{aligned}$$

$$K_1 = \frac{2}{125} + i\frac{11}{125} = 0{,}089.e^{i1{,}39} \qquad K_2 = \frac{2}{125} - i\frac{11}{125} = 0{,}089.e^{-i1{,}39}$$

Las constantes son complejas conjugadas. *La solución es:*

$$y(t) = \left[\frac{2}{125} + i\frac{11}{125}\right] e^{(-1+2i)t} + \left[\frac{2}{125} - i\frac{11}{125}\right] e^{(-1-2i)t} + \frac{2}{5}t^2 - \frac{8}{25}t - \frac{4}{125}$$

La solución de esta ecuación debe ser una función real. Para hallar una expresión más sencilla operemos algebraicamente colocando a K_1 y a K_2 en su expresión exponencial e intentemos llevar a las dos exponenciales complejas a un coseno: $cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$.

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[0{,}089.e^{i1{,}39}\right] e^{(-1+2i)t} + \left[0{,}089.e^{i1{,}39}\right] e^{(-1-2i)t} + \frac{2}{5}t^2 - \frac{8}{25}t - \frac{4}{125} \\ &= 0{,}089.e^{-t}2.cos(2t + 1{,}39) + \frac{2}{5}t^2 - \frac{8}{25}t - \frac{4}{125} \\ &= 0{,}179.e^{-t}cos(2t + 1{,}39) + \frac{2}{5}t^2 - \frac{8}{25}t - \frac{4}{125} \end{aligned}$$

La función resultante es un coseno modulado por una exponencial decreciente, sumado a una función de segundo orden. El lector puede verificar que $y(t=0)=0$.

3. *En este último caso planteamos:*

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

La ecuación característica de la solución homogénea es:

$$0 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

cuyas raíz doble está ubicada en $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. *La solución homogénea para raíces dobles es:*

$$y_h(t) = K_1 e^{-2t} + K_2.t.e^{-2t}$$

Donde K_1 *y* K_2 *son las dos constantes arbitrarias. Para hallar la solución particular, y basándonos en la tabla, proponemos* $y_p(t) = C.cos(3t)+D.sen(3t)$; *donde para hallar el valor de las constantes debemos reemplazar la particular y sus derivadas en la ecuación original* ($y_p'(t) = -3.C.sen(3t) + 3.D.cos(3t)$, $y_p''(t) = -9.C.cos(3t) - 9.D.sen(3t)$):

$$\begin{aligned}
cos(3t) &= y_p''(t) + 4y_p'(t) + 4y_p(t) \\
cos(3t) &= -9.C.cos(3t) - 9.D.sen(3t) - 12.C.sen(3t) + 12.D.cos(3t) + \\
&+ 4.C.cos(3t) + 4.D.sen(3t) \\
cos(3t) &= (12D - 5C).cos(3t) + (-12C - 5D).sen(3t)
\end{aligned}$$

Entonces las constantes son $C = -5/169$ *y* $D = 12/169$. *Por lo tanto la solución particular es*

$$y_p(t) = -\frac{5}{169}cos(3t) + \frac{12}{169}.sen(3t)$$

Finalmente escribimos la solución general

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = K_1 e^{-2t} + K_2.t.e^{-2t} - \frac{5}{169}cos(3t) + \frac{12}{169}.sen(3t)$$

Imponiendo las condiciones iniciales nulas ($y(0) = 0, y'(0) = 0$) *hallamos los valores de las dos constantes arbitrarias:*

$$\begin{aligned}
y(0) &= 0 = K_1 - \frac{5}{169} \\
y'(0) &= 0 = -2.K_1 + K_2 + \frac{12}{169}
\end{aligned}$$

$$K_1 = \frac{5}{169} \qquad K_2 = -\frac{2}{169}$$

La solución es:

$$y(t) = \frac{5}{169}e^{-2t} - \frac{2}{169}.t.e^{-2t} - \frac{5}{169}cos(3t) + \frac{12}{169}.sen(3t)$$

B.5. Resumen del capítulo

Este breve apéndice introdujo un método práctico para solucionar ecuaciones diferenciales lineales, ordinarias y a coeficientes constantes. Ejemplificamos la resolución de la ecuación de primer orden y de segundo orden mediante el método de proponer una solución particular dependiendo de la entrada específica. Esto se puede realizar ya que las entradas a los sistemas que estudiaremos están enmarcadas dentro de las señales prácticas más comunes. Las ecuaciones diferenciales y su estudio conforman una rama teórica de relevancia sobresaliente dentro de la ingeniería y su estudio es indispensable en temas específicos como la modelización. Los ejercicios de aplicación los enunciaremos en el capítulo 2.

Apéndice C

Transformada rápida de Fourier

C.1. Introducción

Para calcular el espectro de una señal real continua $x(t)$ en forma digital es necesario introducir la señal en una computadora. El proceso que permite llevar una señal analógica a una digital se denomina muestreo. El muestreo produce una periodización del espectro original, ya que toda señal discreta posee un espectro periódico. La señal normalizada resultante del muestreo se denomina $x[n]$ y será una sucesión de muestras. Por el momento consideraremos que la amplitud de cada muestra puede tomar cualquier valor real, aunque en la práctica los valores que se introducen en la computadora deben ser *cuantificados* y sus amplitudes son, en realidad y dependiendo del método, discretas. Para calcular el espectro de la señal $x[n]$ se estudió el algoritmo de la DFT (8.5). El mismo permite, dado $x[n]$ de N muestras, obtener las N muestras [1] de su espectro $X(\Omega_k)$, donde $\Omega_k = (2\pi k)/N$. Este algoritmo requiere N^2 multiplicaciones. Presentaremos a continuación una optimización muy conveniente para disminuir el número de operaciones que se debe realizar para obtener *exactamente* el mismo espectro. El algoritmo se conoce como FFT (Fast Fourier Transform) o transformada rápida de Fourier.

C.2. DFT

Recordemos de la sección 8.5 la definición de la DFT de N puntos espectrales, de una señal $x[n]$ de longitud N_0:

Definición C.2.1 *Sea $x[n]$ una señal discreta de duración finita, con $x[n] = 0$ para $N_0 \leq n \leq 0$*

$$DFT\{x[n]\} = X[k] = \sum_{n=<N_0>} x[n]e^{-ik\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

[1] Formalmente la señal $x[n]$ puede poseer N_0 muestras y el espectro hallado N. El valor de N impone la resolución frecuencial de la DFT, pero en la práctica se adopta $N_0 = N$.

donde N_0 es el largo del array y N son la cantidad de puntos del espectro a calcular. Generalmente se adopta $N = N_0$.

La antitransformada o IDFT es:

$$IDFT\{X[k]\} = x[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{k=<N_0>} X[k]e^{ik(\frac{2\pi}{N})n}$$

La nomenclatura para la transformada es:

$$x[n] \longrightarrow X[k]$$

La señal $x[n]$ es aperiódica. El cálculo de los coeficiente $X[k]$ es análogo a considerar a $x[n]$ una señal periódica de periodo N_0, y calcular los coeficientes de su serie de Fourier C_k. La relación es la siguiente:

$$X[k] = N_0.C_k$$

Como una señal discreta normalizada posee un espectro periódico de periodo 2π, podemos entonces comprender que los N puntos del espectro de la DFT son el equivalente a muestrear el espectro continuo de la $x[n]$ aperiódica en intervalos frecuenciales $\Omega_k = 2\pi k/N$. Reproducimos la transformada de Fourier para señales discretas para observar el efecto:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{in\Omega}$$

En este caso la variable Ω es continua. Si la discretizamos de manera que $\Omega_k = 2\pi k/N$, el vector $e^{in\Omega_k}$ de módulo unitario recorre la circunferencia en pasos de ángulo Ω_k. Para $N = 8$ graficamos

Se denomina **resolución frecuencial** al intervalo entre dos muestras espectrales Ω_k. La resolución frecuencial está comandada por el valor de N. Sin embargo el número de muestras N_0 de la señal $x[n]$ original impone la **resolución física** que no se puede superar. Una vez impuesto el N_0 se puede elegir un N de cualquier valor, aunque en la práctica se utiliza $N = N_0$. Si el N_0 fuera menor al N, se completa la señal $x[n]$ con ceros al final para que su largo sea $N_0 = N$. Este procedimiento se denomina *zero padding*. El agregado de ceros al final no modifica el espectro original de la señal.

C.2.1. Forma matricial de la DFT

La DFT se puede pensar como una transformación matricial lineal del vector de entrada x de longitud N_0 en uno X de longitud N:

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_{N_0-1} \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{DFT} \quad X = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \dots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}$$

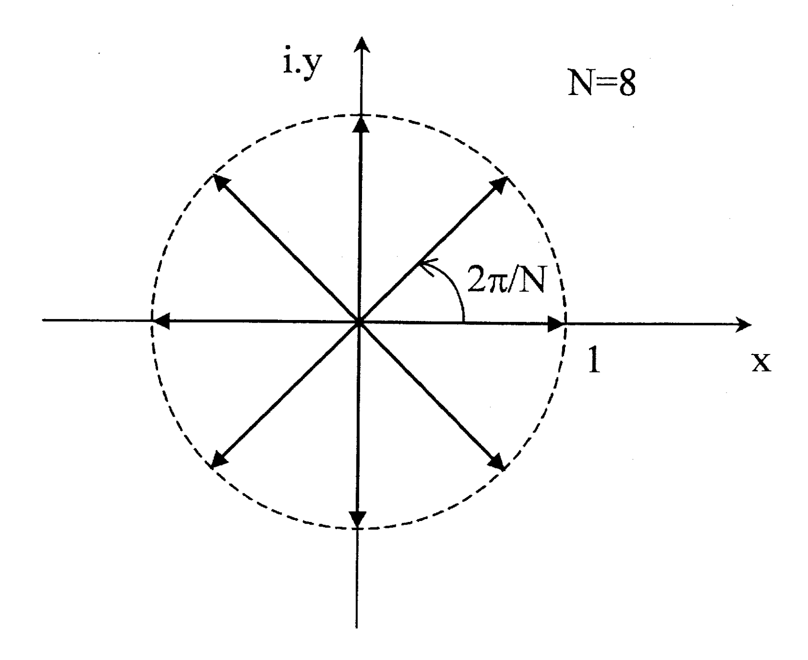


Figura C.1: Resolución frecuencial.

La transformación lineal se implementa a través de una matriz A de $N \times N_0$ que denominaremos **matriz DFT**. Podemos escribir entonces

$$\boxed{X = DFT(x) = A.x} \tag{C.1}$$

o componente a componente como

$$\boxed{X_k = \sum_{k=0}^{N_0-1} A_{kn} x_n \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1} \tag{C.2}$$

Donde los elementos de la matriz son

$$\boxed{A_{kn} = e^{-i\Omega_k n} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = W_N^{kn}} \tag{C.3}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots N-1$ y $n = 0, 1, 2, \ldots N_0 - 1$. Utilizaremos muy seguido la siguiente nomenclatura

$$\boxed{W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}} \tag{C.4}$$

para no repetir la exponencial en cada caso. Note que la matriz DFT está compuesta por potencias de W. Si por ejemplo $N_0 = 4$ y $N = 2$, la matriz es de 2×4 (4 columnas y 2 filas)

$$A_{nk} = \begin{bmatrix} W_2^{00} & W_2^{10} & W_2^{20} & W_2^{30} \\ W_2^{01} & W_2^{11} & W_2^{21} & W_2^{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^{0} & W_2^{0} & W_2^{0} & W_2^{0} \\ W_2^{0} & W_2^{1} & W_2^{2} & W_2^{3} \end{bmatrix}$$

donde se simplificaron los exponentes $(n.k)$ en cada caso. La operación se completa realizando los productos de la ecuación C.2 o matricialmente C.1:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 & W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 & W_2^2 & W_2^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Pero calculemos cuales son los elementos de la matriz DFT. Por ejemplo, note qué sucede para $k = 0$, o sea para la primer fila:

$$W_N^{n0} = e^{i\frac{2\pi}{N}n,0} = 1$$

Lo mismo ocurre si $n = 0$, para la primer columna:

$$W_N^{0k} = e^{i\frac{2\pi}{N}0.k} = 1$$

Calculando los elementos restantes, y para $N_0 = 4$ y $N = 2$ encontramos:

$$W_N^{11} = e^{-i\frac{2\pi}{2}1,1} = -1 \qquad W_N^{12} = e^{-i\frac{2\pi}{2}1,2} = 1 W_N^{13} = e^{-i\frac{2\pi}{2}1,3} = -1$$

por lo tanto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tanto la simetría observada como el hecho que $W_N^{nk} = W_N^{kn}$, simplificarán significativamente los cálculos. Note además que $W_N^{nk} = W^{nk/N}$. A continuación ejemplificamos las matrices DFT para el caso en que $N = N_0 = 2$ y para $N = N_0 = 4$ respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

Para la matriz DFT de $N = N_0 = 2$, el vector de salida X es $X = A.x$:

$$X = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \end{bmatrix}$$

C.2.2. Forma matricial de la IDFT

Para recuperar la señal $x[n]$ de la transformada $X[k]$ es necesario invertir la relación

$$X = A.x$$

Para esto es necesario encontrar la matriz inversa A^{-1} de manera que

$$\boxed{x = A^{-1}.X} \tag{C.5}$$

Para que exista matriz inversa, la matriz DFT A debe ser una matriz cuadrada de $N \times N$. Es por esto que normalmente $N = N_0$. La relación componente a componente es:

$$\boxed{x_n = \sum_{n}^{N-1} (A^{-1})_{nk} X_k, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots N-1} \tag{C.6}$$

La matriz DFT verifica la siguiente relación,

$$\boxed{\frac{1}{N} A.A^* = I_N} \tag{C.7}$$

donde I_N es la matriz identidad de $N \times N$ y el * simboliza el conjugado de cada elemento. El lector puede probar esta identidad para el ejemplo de $N = N_0 = 4$. Multiplicando por A^{-1} ambos miembros de C.7 obtenemos la matriz inversa IDFT a partir de la matriz DFT conjugada

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{N} A^*} \tag{C.8}$$

y podemos escribir la antitransformada en términos matriciales como

$$\boxed{x = IDFT(X) = \frac{1}{N} A^* X} \tag{C.9}$$

Acabamos de confirmar que la IDFT se puede calcular con el mismo algoritmo que se calcula la DFT. Esto se debe a que $A^* X = (AX^*)^* = [DFT(X^*)]^*$, y por lo tanto

$$\boxed{IDFT(X) = \frac{1}{N} DFT\,[X^*]^*} \tag{C.10}$$

Finalmente escribimos la IDFT en término de W_N:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{ink\Omega_k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk} \end{aligned}$$

C.3. FFT

La FFT es una implementación rápida de la DFT. Está basada en el algoritmo divide y triunfarás donde una DFT de N muestras se subdivide en DFT más pequeñas y se reconstruye la salida $X[k]$. En la versión más simple una DFT de N muestras se va dividiendo en sucesivas DFT de $N/2$ muestras, lo que obliga a que N sea una potencia de 2:

$$\boxed{N = 2^B} \tag{C.11}$$

El problema de calcular una DFT de N muestras se reemplaza por calcular dos DFT de $N/2$ muestras cada una. A su vez, cada DFT de $N/2$ se calcula como otras dos DFT de $N/4$ muestras. El proceso continua hasta que se llega a la DFT de dos muestras que posee un cálculo sencillo. La ecuación C.11 es la primera limitación del algoritmo. Veamos por qué esta subdivisión en pequeñas DFT es benéfica en tiempos de cálculo y cantidad de operaciones. Si calculamos una DFT de N muestras debemos realizar N^2 multiplicaciones. Si ahora subdividimos a esa DFT en dos de $N/2$ muestras cada una, la cantidad de operaciones aproximada [2] es $2.(N/2)^2 = N^2/2$, donde vemos que realizamos la mitad de las multiplicaciones. Si volvemos a subdividir la entrada (donde ahora tenemos 4 DFT de $N/4$ muestras cada una) obtenemos una reducción de cuatro veces en el número de operaciones $4.(N/4)^2 = N^2/4$. Procediendo de manera similar demostraremos que si partimos de una DFT de $N/2^m$ puntos y se realizan m subdivisiones , el costo total del algoritmo de FFT será

$$\frac{N^2}{2^m} + \frac{N}{2}m$$

donde además se tuvieron en cuenta las operaciones de reconstrucción de las muestras separadas. El primer término de esta ecuación muestra las operaciones necesarias para realizar las $N/2^m$ DFT iniciales, y el segundo las operaciones necesarias para la reconstrucción. Si el número de subdivisiones llega al B de la ecuación C.11 [3], entonces $N/2^m = N/2^B = 1$ y la cantidad de operaciones es $N + NM/2$. Como las N operaciones de DFT (primer término) son de una DFT de una muestra, las mismas no implican ningún cálculo quedando solamente el segundo término. Además como $B = log_2(N)$, finalmente el número de operaciones requeridas por la FFT es

$$\boxed{\frac{1}{2}NB = \frac{1}{2}Nlog_2(N)} \tag{C.12}$$

Por ejemplo, si $N = 8$ tendremos $log_2(8) = 3$ etapas de subdivisión por dos. La cantidad de operaciones de la FFT serán $\frac{1}{2}$,$8.log_2(8) = 12$ en comparación con las $8^2 = 64$ requeridas por la DFT.

[2] Al subdividir la DFT original en dos y calcular dos DFT por separado, es necesario finalmente volver a unir los datos. Este proceso lleva algunas operaciones más ($N/2$).

[3] Se llega hasta DFT de una muestra.

C.3.1. El algoritmo FFT

Dado una señal $x[n]$ de N muestras, tal que $N = 2^B$, la DFT de N muestras se escribe como

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots N-1$$

donde se utilizó la expresión $W_N^{nk} = e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$. Separemos la sumatoria en dos. Tomemos primero la sumatoria sobre las muestras pares $(x[0], x[2], x[4], \ldots)$ y luego sobre las impares $(x[1], x[3], x[5], \ldots)$:

$$X[k] = \underbrace{\sum_n x[2n] W_N^{k(2n)}}_{PARES} + \underbrace{\sum_n x[2n+1] W_N^{k(2n+1)}}_{IMPARES}$$

Calculemos los límites de cada sumatoria. Para las muestras pares, el rango es $0 \leq 2n \leq N-1$. Como N es siempre par (ya que debe ser $N = 2^B$), el límite superior $N-1$ es impar. De esta forma el límite superior será $N-2$, por lo tanto para las muestras pares, el rango de la sumatoria es:

$$0 \leq 2n \leq N-2 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$$

Para las impares el rango es $0 \leq 2n+1 \leq N-1$. El límite inferior no puede ser cero, ya que es una muestra impar, por lo tanto el rango de la sumatoria para las muestras impares es

$$1 \leq 2n+1 \leq N-1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$$

Reescribimos la sumatoria como

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_N^{k(2n)} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_N^{k(2n+1)} \tag{C.13}$$

Entonces separamos a la señal $x[n]$ de N muestras en dos señales de $N/2$ muestras cada una. La primera contiene las muestras pares y la segunda las muestras impares:

$$\begin{aligned} g[n] &= x[2n] \qquad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \\ h[n] &= x[2n+1] \qquad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned}$$

Las respectivas DFT son las siguientes

$$\begin{aligned} G[k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} g[n] W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \\ H[k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} h[n] W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned}$$

Pare reescribir la expresión C.13 observe la siguiente deducción recordando que $W_N = e^{-i2\pi/N}$:

$$W_{N/2} = e^{-i2,2\pi/N} = W_N^2$$

entonces

$$W_N^{k(2n)} = (W_N^2)^{kn} = W_{N/2}^{kn} \qquad , \qquad W_N^{k(2n+1)} = W_N^k W_N^{2kn} = W_N^k W_{N/2}^{kn}$$

Reemplazando todo esto en C.13 obtenemos

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} g[n] W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} h[n] W_{N/2}^{kn}$$

y utilizando la definición de la DFT de $g[n]$ y $h[n]$ escribimos

$$\boxed{X[k] = G[k] + W_N^k H[k] \qquad k = 0, 1, 2, \ldots N-1} \tag{C.14}$$

Observamos que la DFT de $X[k]$ se puede descomponer un dos DFT de $N/2$ puntos cada una, sumado a N multiplicaciones $W_N^k H[k]$. Como tanto $G[k]$ como $H[k]$ son periódicas cada $N/2$ muestras [4], podemos dividir el cálculo de $X[k]$ de la ecuación C.14 en dos. Como el rango de k es $N-1 \geq k \geq 0$, lo transformamos en $N/2-1 \geq k \geq 0$ escribiendo:

$$\begin{aligned} X[k] &= G[k] + W_N^k H[k] \\ X[k+\frac{N}{2}] &= G[k+\frac{N}{2}] + W_N^{k+N/2} H[k+\frac{N}{2}], \qquad con \qquad \frac{N}{2}-1 \geq k \geq 0 \end{aligned}$$

pero como dijimos $G[k] = G[k+\frac{N}{2}]$ y $H[k] = H[k+\frac{N}{2}]$. Además

$$W_N^{N/2} = \left(e^{i-2\pi/N}\right)^{N/2} = e^{-i\pi} = -1$$

De esta forma concluimos en un par de ecuaciones muy importantes:

$$X[k] = G[k] + W_N^k H[k] \tag{C.15}$$

$$X[k+\frac{N}{2}] = G[k] - W_N^k H[k], \qquad \frac{N}{2}-1 \geq k \geq 0 \tag{C.16}$$

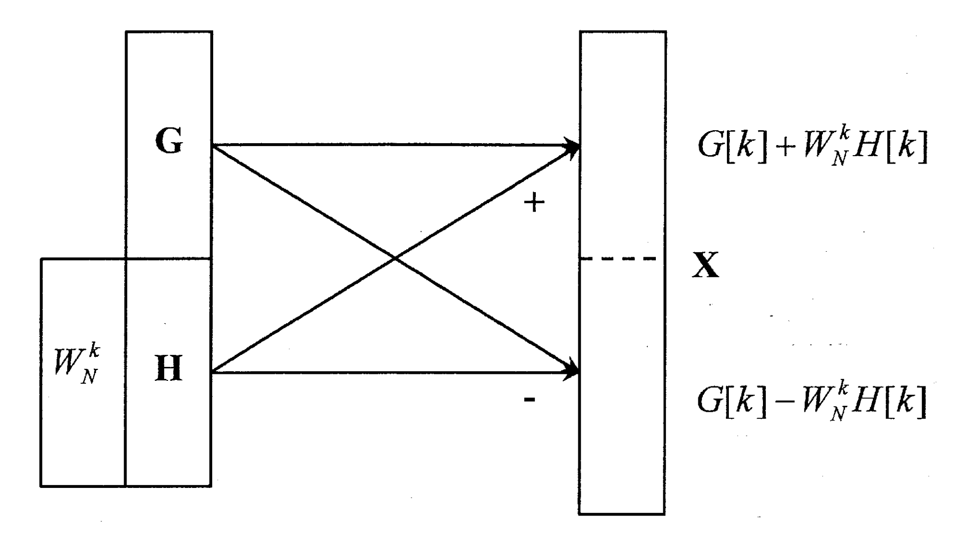
Las mismas se denominan **mariposa**. La primera permite calcular la mitad superior de la DFT de N puntos, y la segunda genera la mitad inferior. El producto $W_N^k H[k]$ es el mismo en ambos casos y por lo tanto se reduce en $N/2$ la cantidad de productos totales. Matricialmente los cálculos son:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \cdots \\ X_{N/2-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \cdots \\ G_{N/2-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \cdots \\ H_{N/2-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_N^0 \\ W_N^1 \\ \cdots \\ W_N^{N/2-1} \end{bmatrix}$$

[4] La DFT de una señal de N muestras, posee N puntos que se repiten periódicamente con periodo N

$$\begin{bmatrix} X_{N/2} \\ X_{N/2+1} \\ \dots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \dots \\ G_{N/2-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \dots \\ H_{N/2-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_N^0 \\ W_N^1 \\ \dots \\ W_N^{N/2-1} \end{bmatrix}$$

Donde recuerde que $G[k]$ y $H[k]$ son las DFT de las muestras pares e impares de $x[n]$ respectivamente. Para reconstruir la $X[k]$ es necesario realizar la siguiente operación:



Para realizar la DFT hubo que separar la señal $x[n]$ en sus muestras pares $g[n]$ e impares $h[n]$, calcular la DFT de cada parte para obtener $G[k]$ y $H[k]$ y unirlas mediante las ecuaciones C.15 y C.16. Ahora nos proponemos calcular las DFT de las partes par e impar del mismo modo. Armaremos así cuatro señales. Tomaremos las pares de las pares, las impares de las pares, las pares de las impares y las impares de las impares. Repetiremos el algoritmo sucesivamente hasta llegar a la DFT de señales de solo dos muestras $N = 2$. En este caso las ecuaciones se convierten en:

$$\begin{aligned} X[k] &= G[k] + W_2^0 H[k] \\ X[k+1] &= G[k] - W_2^0 H[k], \qquad k = 0 \end{aligned}$$

donde el rango de k pasa a ser solo cero. Como $W_2 = e^{-i2\pi/2} = -1$ entonces la mariposa para una DFT de solo dos muestras, como muestra la Fig. C.3.1 es

$$\begin{aligned} X[0] &= G[0] - H[0] \\ X[1] &= G[0] + H[0] \end{aligned}$$

Para ejemplificar tomemos una señal $x[n] = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ de $N = 8$ muestras. Deseamos calcular su FFT y obtener $X[k]$ de 8 puntos. El primer paso es separar sus muestras pares e impares sucesivamente. Mostramos esto en la figura C.3, donde llegamos a obtener 8 DFT de una muestra cada una. La DFT de una única muestra es esa misma muestra, como se puede verificar en cualquier expresión de la DFT para $N = 1$. Es por eso que la transformada de p_0 será $P_0 = p_0$ y así para el resto.

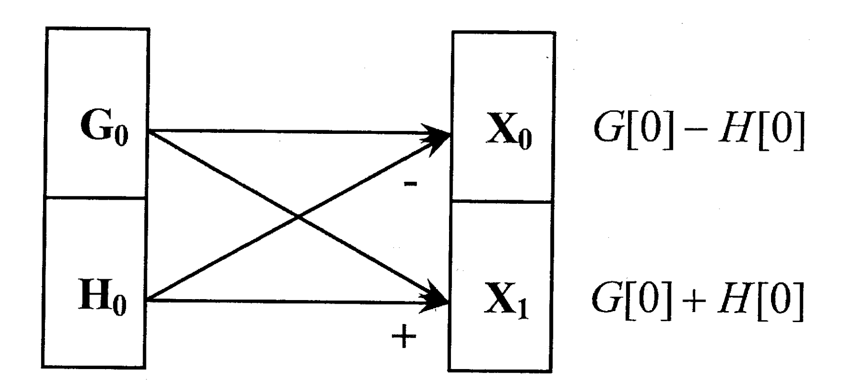


Figura C.2: Mariposa parauna DFT de dos muestras

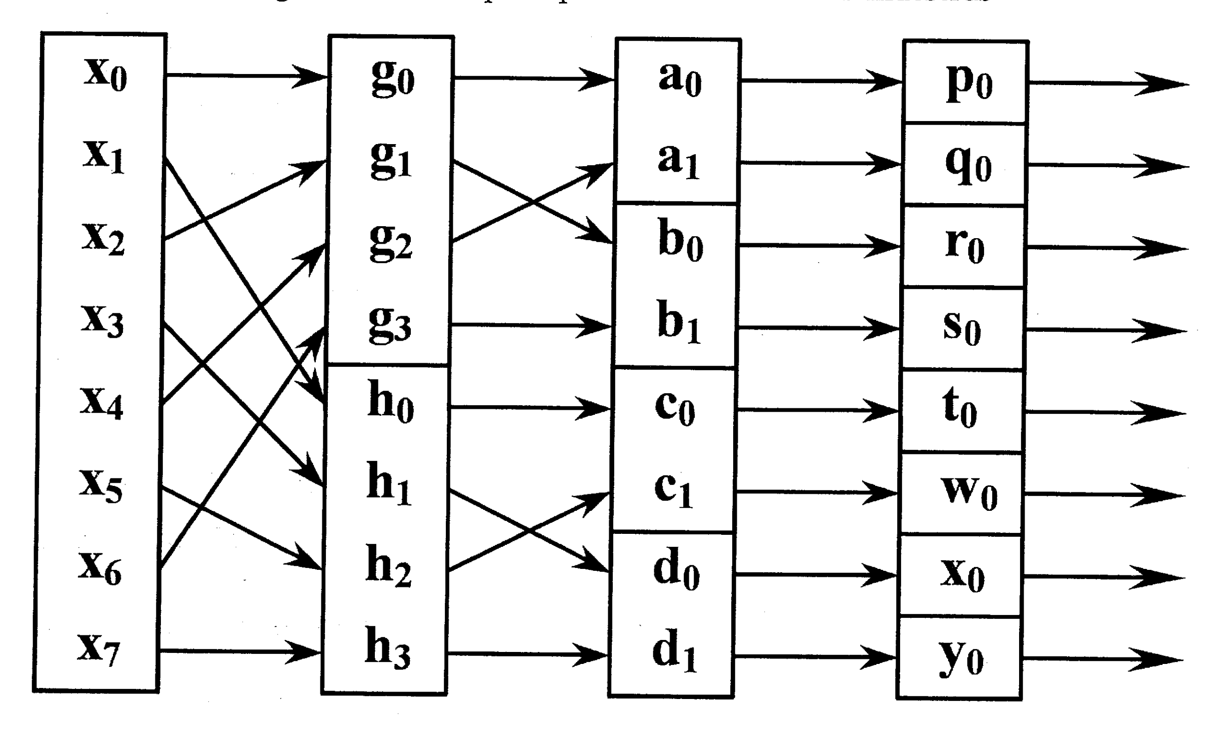


Figura C.3: Ejemplo de cálculo de la DFT para $N = 8$

Debemos entonces comenzar a reconstruir las DFT mediante las fórmulas de la mariposa, que reproducimos a continuación por comodidad:

$$\begin{aligned} X[k] &= G[k] + W_N^k H[k] \\ X[k + \frac{N}{2}] &= G[k] - W_N^k H[k], \qquad \frac{N}{2} - 1 \geq k \geq 0 \end{aligned}$$

La cantidad de etapas está dada por el $B = log_2(N) = 3$. Tomando las 8 DFT de una muestra, armamos la DFT de 2 muestras utilizando $N = 2$. Luego reconstruimos la DFT de 4 muestras y así sucesivamente como muestra la figura C.4.

Note cómo las mariposas van tomando los valores abriéndose a medida que avanzamos de etapa. Una ventaja adicional del algoritmo es que, una vez ordenados los valores para

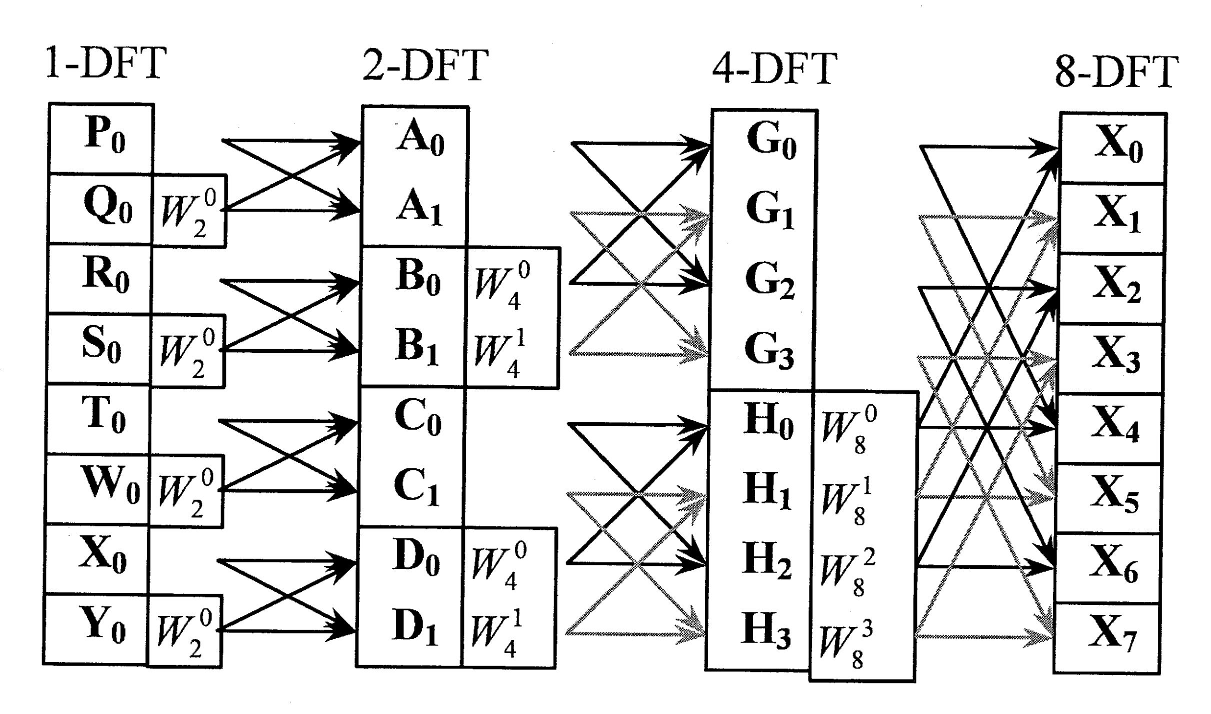


Figura C.4: Ejemplo de cálculo de la DFT para $N = 8$

comenzar, solo se requiere almacenar la etapa actual para calcular la próxima. Este tipo de cálculo se denomina *in place* y es muy eficiente en término de recursos utilizados.

Para el ordenamiento previo de las muestras, separando las pares y las impares, existe un método denominado *bit invertido* (bit reversal). El mismo se basa en escribir a la posición de cada muestra de entrada en su representación binaria de base 2, con $log_2(N)$ dígitos. Para nuestro ejemplo, con $N = 8$ requerimos 3 bits: b_2, b_1, b_0. En la representación en base 2, cada bit puede valer cero o uno, y el peso dependiendo la posición es $2^2, 2^1, 2^0$ respectivamente. De esta manera el número binario se tres dígitos se puede pasar a decimal como $b_2{,}2^2 + b_1{,}2^1 + b_0{,}2^0$. Para encontrar el orden en que debemos colocar los bits antes de comenzar a calcular las DFT, se procede a invertir el orden de los bits en forma de espejo. Observe atentamente la figura C.5 y verifique la posición en la que quedan las muestras.

Este procedimiento es sencillo y rápido de realizar. En la figura aparecen todos los pasos intermedios. En la práctica solo se toma el vector de entrada, se aplica el método de bit invertido para acomodar las muestras de entrada, y se comienzan a realizar las $B = log_2(N)$ etapas del algoritmo calculando las mariposas correspondientes en cada caso.

Para el calculo de la transformada inversa IFFT, se utiliza la misma relación hallada para la DFT:

$$x[n] = IFFT(X[k]) = \frac{1}{N}\,[FFT(X^*[k])]^*$$

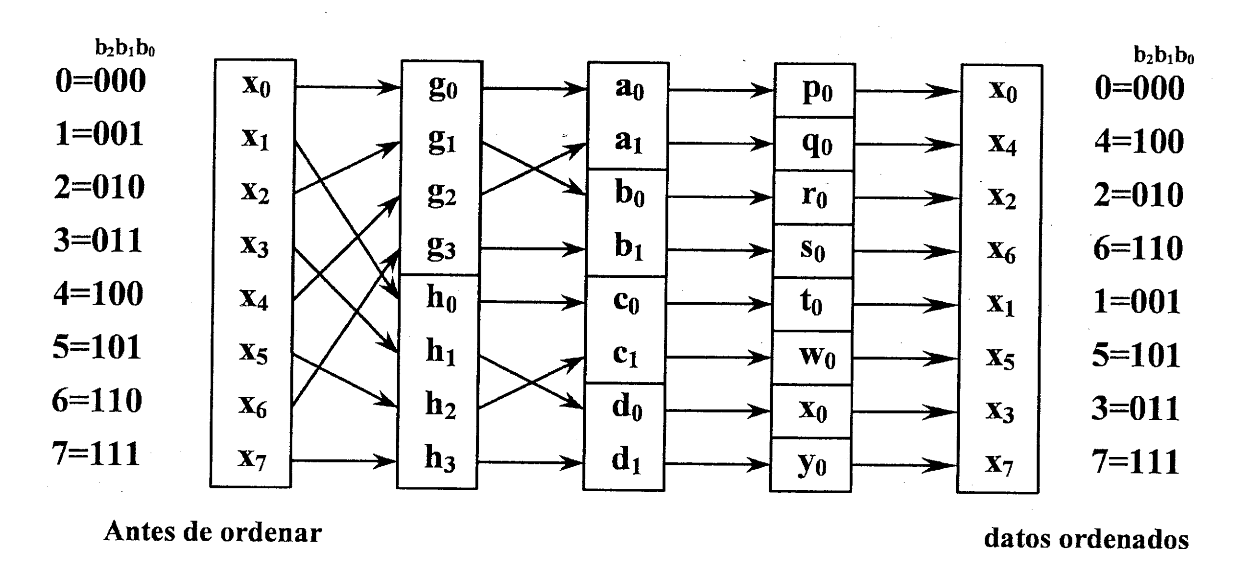


Figura C.5: Ejemplo de cálculo de la DFT para $N = 8$

C.4. Resumen del capítulo

En este capítulo estudiamos los métodos que permiten calcular el espectro de una señal continua. Para poder ingresar la señal $x(t)$ a la computadora es necesario muestrearla a una frecuencia adecuada y cuantificar su amplitud, obteniéndose una señal discreta normalizada $x[n]$. La señal $x[n]$ es una sucesión de N_0 muestras. El espectro $x[n]$ es periódico. Para calcularlo se comenzó planteando la DFT. La misma supone a $x[n]$ periódica y calcula los coeficientes C_k de su serie muestreando el espectro con una resolución frecuencial $\Omega_k = 2\pi/N$. La resolución física máxima está dada por el largo de la señal $x[n]$. En la práctica se utiliza $N = N_0$. El cálculo de la DFT tiene un costo computacional de N^2 operaciones o multiplicaciones complejas. Para reducirlo se propone un algoritmo denominado FFT que propone subdividir a $x[n]$ en sus muestras pares e impares sucesivamente (en $log_2(N)$ etapas) creando pequeñas DFT que deben ser reagrupadas para hallar la DFT buscada. La cantidad de multiplicaciones se reduce a $(N/2)log_2(N)$. Esto convierte a la FFT en una herramienta indispensable a la hora calcular en tiempo real el espectro de una señal. La limitación principal que tiene el algoritmo es que requiere que el número de muestras de entrada sea una potencia de 2: $N = 2^B$. Si esto no sucede es necesario rellenar con ceros la entrada $x[n]$ hasta conseguirlo. Existen otros métodos más avanzados que están fuera del alcance del presente capítulo.

C.5. Problemas propuestos

1. Calcule una DFT de cuatro puntos ($N = 4$) para la señal $x[n] = \{1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2\}$.

2. Calcule la matriz DFT para $N = 8$ en término del operador W_N y luego simplifique numéricamente al máximo el resultado.

3. Utilizando la matriz anterior, calcule la DFT de la señal $x[n] = \{4, -3, 2, 0, -1, -2, 3, 1\}$. Verifique que el espectro resultante posea módulo par y fase impar.
   RTA: $X[k] = \{4, 5 + i + i\sqrt{2}, -2 + i6, 5 - i + i\sqrt{2}, 12, 5 + i - i\sqrt{2}, -2 - i6, 5 - i - i\sqrt{2}\}$

4. Calcule la DFT de 8 puntos $N = 8$ y de $N = 16$ para la señal del primer ejercicio. Para el $N = 16$ utilice el método se *zero padding*. Compare los resultados con la DFT de $N = 4$. Concluya acerca de la resolución frecuencial versus la física.

5. Realice la transforma de la $x[n]$ del ejemplo anterior pero por medio de la FFT. Plantee el ordenamiento por el método de bit invertido y realice el diagrama de la 3 etapas necesarias para llegar al resultado $X[k]$.

6. Plantee la resolución de una FFT para una entrada de 16 muestras. Realice el diagrama completo con todos los pasos desde el ordenamiento de la entrada $x[n]$ hasta la obtención del $X[k]$.

7. Calcule la IDFT de $X[k] = \{0, 4, -4i, 4, 0, 4, 4i, 4\}$ por el método matricial y luego utilizando la FFT.

Índice general

Índice alfabético

Análisis de Sistemas Lineales es un libro que le brinda a los alumnos de los primeros años de Ingeniería la definición de las herramientas fundamentales para el análisis de sistemas lineales. El libro comprende todos los temas de variable compleja comenzando desde la definición de números complejos. Luego, aplica esta teoría para el estudio de la transferencia y la respuesta en frecuencia de sistemas continuos y discretos. Se introducen allí las transformadas de Fourier, Laplace y Zeta. Cada capítulo está acompañado de una guía de ejercicios con respuestas y una introducción a aplicaciones con Matlab®. La simbología y el lenguaje utilizado son amigables y de lectura llevadera, priorizando el perfil pedagógico y brindando abundante ejercitación con ejemplos.

Dr. Damian Craiem

Actualmente es Investigador del CONICET trabajando en la Universidad Favaloro. Recibió su título de Ingeniero Electrónico en la UTN en el año 2001, se especializó culminando su maestría en Ingeniería Biomédica en la Universidad Favaloro en el 2003 y obtuvo su título de doctorado en UBA Facultad de Ingenería en el año 2007. Es profesor de la cátedra de Análisis de Señales y Sistemas de la UTN-FRBA desde el año 1997. Sus áreas principales de investigación se relacionan con la ingeniería cardiovascular y el procesamiento de señales e imágenes médicas.

Dr. Ricardo L. Armentano

Es actualmente decano de la Facultad de Ingeniería, Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Favaloro, investigador clase 1 del Ministerio de Educación, Cultura y Tecnología de la República Argentina y grado 5 del PEDECIBA en Montevideo, Uruguay. Recibió si título de Ingeniero en la UTN en 1984, su primer título de doctorado en fisiología en la UBA en 1994, que culminó en la Universidad Paris VII Denis Diderot en Francia. Es investigador en la Universidad Favaloro en áreas de dinámica cardiovascular, fue presidente de la Sociedad Argentina de Bioingeniería y actualmente dirige el programa de doctorado de la UTN-FRBA. Es el director de la cátedra de Análisis de Señales y Sistemas desde el año 1995.



